



1750

# Réflexions sur quelques loix générales de la nature qui s'observent dans les effets des forces quelconques

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

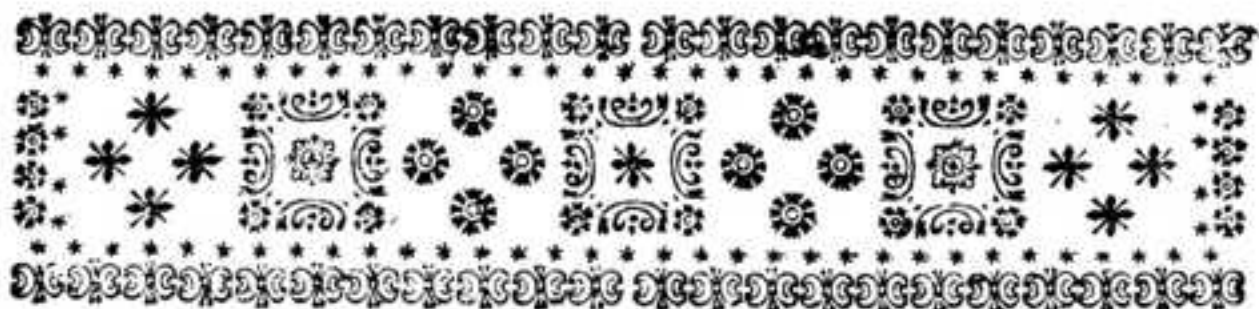
Record Created:

2018-09-25

## Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Réflexions sur quelques loix générales de la nature qui s'observent dans les effets des forces quelconques" (1750).  
*Euler Archive - All Works*. 146.  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/146>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).



R É F L É X I O N S  
SUR QUELQUES LOIX GÉNÉRALES DE LA  
NATURE QUI S'OBSERVENT DANS LES EFFETS  
DES FORCES QUELCONQUES,  
PAR M. EULER.



I.

Yant examiné dans le Mémoire précédent la figure que doit prendre un fil, soit parfaitement flexible, ou doué de quelque roideur, étant sollicité par des forces quelconques dirigées vers autant de points fixes, qu'on voudra; j'ai recherché les formules, dont la valeur est la plus petite dans cette figure, de sorte que, si l'on connoissoit d'ailleurs ces formules, on pourroit par la methode des plus grands & des plus petits trouver la même figure d'un tel fil, sans avoir égard aux principes directs de la Mécanique, sur lesquels cette recherche est fondée. Comme il y a longtems, que les Philosophes soutiennent avec bien de la raison, que la nature dans toutes ses productions affecte constamment un certain *minimum*, ce que Monsieur de *Maupertuis* a mis tout à fait hors de doute dans quelques Mémoires, qu'il a donnés, tant sur l'état d'équilibre des corps, que sur celui de mouvement; nous nous trouvons en état d'assigner ce *minimum* pour les figures des fils sollicités par des forces quelconques. Mais puisque j'ai été

conduit à la connoissance de ce *minimum a posteriori*, il s'agit maintenant de découvrir les raisonnemens, qui nous puissent conduire *a priori* à la même connoissance : ou bien il faut rechercher les principes, desquels on pourroit conclure ce *minimum*, quand même on ne connoitroit pas encore la courbe, que le fil prend actuellement. Ces principes une fois découverts ne manqueront pas de répandre beaucoup de lumière sur les loix que la nature observe dans un nombre infini de ses autres productions, pour la détermination desquelles la Mécanique même n'est pas encore portée à un degré suffisant de perfection ; & il n'y a aucun doute, que la Métaphysique ne puisse tirer de cette découverte quantité d'éclaircissemens sur la manière d'agir des forces en général.

II. Pour mieux réussir dans cette recherche, il faut commencer par la même considération, dont Mr. de *Maupertuis* s'est servi pour établir sa loi générale du repos : car cette considération nous conduira à une idée plus précise & plus féconde de ce qu'on doit entendre par *la quantité d'action des forces*. Nous verrons que la chose nommée par ce terme est de la dernière importance dans toutes les actions des forces, soit que les corps, qui en sont sollicités demeurent en équilibre, ou qu'ils soient mis en mouvement, ce que je ferai voir par plusieurs preuves très convaincantes. Après cela on conviendra aisément que cette quantité d'action des forces doit entrer dans toutes les formules, dont la valeur est la plus petite dans les effets, qui sont produits par ces forces. C'est une règle assez généralement reçue, que la nature dans toutes ces productions n'emploie que la plus petite quantité d'action, qu'il soit possible ; mais dans la plupart des cas il a été jusqu'ici extrêmement difficile de bien déterminer cette quantité d'action, pour l'épargne de laquelle la nature est si soigneuse. Mais dès que nous nous serons formé une idée assez distincte de la quantité d'action des forces, que Mr. de *Maupertuis* a découverte si heureusement dans le cas d'équilibre, qu'il a traité, la plupart des autres difficultés, que la diversité des cas semble renfermer, disparaîtront bientôt, & on sera obligé de reconnoître que cette idée est d'un usage universel, tant dans la Mécanique, que dans  
toute

toute la Physique. Quand même on ne gouteroit pas les raisonnemens, par lesquels je ferai l'application de cette idée à quantité d'effets produits par des forces quelconques, on sera obligé d'en reconnoître la solidité par un grand nombre de cas, qu'on est en état de vérifier par les principes ordinaires de la Mécanique.

III. C'est la figure, que doit prendre une masse fluide, dont toutes les particules sont sollicitées par des forces quelconques, qui a été le principal objet des recherches de Mr. de Maupertuis, pour découvrir la loi générale du repos dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris de l'An. 1740. Je considérerai donc de même une masse fluide dont toutes les particules sont attirées vers autant de centres fixes, qu'on voudra, par des forces, qui sont proportionnelles à des fonctions quelconques des distances à ces centres, & je rechercherai premièrement la figure, que doit prendre cette masse fluide, afin qu'elle soit en repos, ou en équilibre. De là je tâcherai ensuite de découvrir ce qui sera dans cette figure un *maximum*, ou un *minimum*, pour être d'autant mieux en état de déterminer ce qu'il faut entendre sous le nom de la *quantité d'action des forces sollicitantes*, dont je ferai sentir après, par quelques réflexions, la dernière importance dans toutes les recherches où il s'agit des effets produits par des forces quelconques. D'abord il est évident que, pour qu'une telle masse fluide soit en équilibre, il faut que la moyenne direction des forces, dont chaque particule, qui se trouve à la surface, est sollicitée, soit perpendiculaire à la surface : car si la moyenne direction étoit oblique à la surface, la particule qui en étoit sollicitée, suivroit cette direction oblique selon la tangente, & partant la masse ne seroit point en équilibre. Donc, pour entrer dans cette recherche, je commencerai par déterminer en général la position de la ligne perpendiculaire à une surface quelconque.

### P R O B L E M E I.

IV. Une surface quelconque étant proposée sur laquelle se trouve le point Z, trouver la position de la ligne ZP, qui est perpendiculaire à cette surface au point Z.

Fig. 1.

SOLU-



S O L U T I O N.

Pour exprimer la nature de cette surface, je choisis à volonté trois axes AB, AC, AD perpendiculaires entr'eux, dont les deux AB & AC soient pris dans le plan de la planche, & le troisième AD y soit perpendiculaire. Du point quelconque de cette surface Z je tire sur le plan BAC la perpendiculaire ZY, & du point Y à l'axe AB la perpendiculaire YX, de sorte que la position du point Z soit déterminée par les trois coordonnées AX, XY & YZ, que je nommerai  $AX = x$ ,  $XY = y$ , &  $YZ = z$ . Maintenant la nature de la surface étant exprimée par une équation quelconque entre ces trois coordonnées  $x, y, z$ , je n'ai qu'à en considérer la différentielle, qui soit :

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

les lettres X, Y, Z marquant des fonctions quelconques des coordonnées  $x, y, z$ , qui peuvent résulter de la différentiation de l'équation en termes finis. A'present je considère premièrement la figure EZ, qui résulte, lorsqu'on coupe la surface proposée par le plan IYZ parallèle au plan BAD. La nature de cette ligne courbe EZ sera donc exprimée par l'équation donnée, si l'on pose  $XY = y$  constante & partant son différentiel  $dy = 0$ , de sorte que pour cette courbe EZ nous aurons cette équation  $X dx + Z dz = 0$  entre les deux coordonnées  $IX = x$  &  $YZ = z$ . Soit la ligne ZM perpendiculaire à cette section EZ, & on fait que la sounormale YM fera  $\frac{z dz}{dx}$ ; or puisque  $\frac{dz}{dx} = -\frac{X}{Z}$  nous aurons  $YM = -\frac{Xz}{Z}$ .

Qu'on tire sur le plan BAC, auquel la section IYZ est perpendiculaire, par le point M la ligne MP perpendiculaire à YM, & il est clair que toutes les lignes tirées du point Z à cette droite MP seront également perpendiculaires à la section EZ. Par conséquent parmi ces lignes sera comprise celle ZP, qui est perpendiculaire, non seulement à la section EZ, mais aussi à la surface proposée même. Pour trouver cette perpendiculaire cherchée ZP, je coupe pareille-

ment



ment la surface proposée par un plan  $XZ$  parallèle au plan  $C'AD$ , & supposant  $FZ$  la section, qui en résulte, sa nature sera exprimée par l'équation générale, en faisant  $AX = x$  constante, & partant  $dx = 0$ . Donc l'équation pour la section  $FZ$  sera  $Ydy + Zdz = 0$ . entre ses coordonnées  $XY = y$  &  $YZ = z$ . Qu'on tire de même à cette section  $FZ$  la perpendiculaire  $ZN$ , & on voit que la sou-normale sera  $YN = \frac{z dz}{dy} = -\frac{Yz}{Z}$ . Tirant donc par  $N$  à  $YN$  la perpendiculaire  $NP$  dans le plan  $BAC$  auquel la section  $FZ$  est perpendiculaire, toutes les lignes tirées du point  $Z$  à la ligne  $NP$  seront également perpendiculaires à la section  $FZ$ . Par conséquent si de l'intersection  $P$  des lignes  $MP$  &  $NP$  nous tirons la ligne  $PZ$ , elle sera perpendiculaire à l'une & à l'autre des sections  $EZ$  &  $FZ$ , & partant elle sera perpendiculaire à la surface proposée même  $EZF$ . Donc le point  $P$  dans le plan  $BAC$ , où la perpendiculaire cherchée  $ZP$  rencontre ce plan, se trouvera si on prend  $YM = -\frac{Xz}{Z}$  &  $YN = -\frac{Yz}{Z}$ , & qu'on acheve le parallélogramme  $YMPN$ , dont le quatrième angle  $P$  sera au point cherché. Or il est clair, qu'ayant pour la surface l'équation différentielle  $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ , on en tirera les valeurs des lignes  $YM$  &  $YN$  en termes finis. Ce qu'il falloit trouver.

## PROBLEME II.

V. *Trouver la nature des forces, qui peuvent agir sur le point  $Z$  d'une surface proposée, afin que leur moyenne direction soit perpendiculaire à cette surface.*

## SOLUTION.

Soit comme auparavant  $Xdx + Ydy + Zdz = 0$  l'équation différentielle, qui exprime la nature de la surface proposée entre les trois coordonnées  $AX = x$ ,  $XY = y$  &  $YZ = z$ . Cela posé, de quelques forces que soit sollicité le point  $Z$ , elles peuvent toujours être



réduites à trois, selon des directions paralleles aux trois axes  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ . Soit  $Q$  la force, qui agit selon la direction parallele à  $AB$ ,  $R$  la force qui agit selon  $AC$ , &  $S$  celle qui agit selon  $AD$ , de sorte que ces forces tendent à augmenter les valeurs des variables  $x, y, z$ . Parce que la moyenne direction de ces forces doit être perpendiculaire à la surface, elle tombera dans la ligne  $ZP$ , dont nous venons de déterminer la position, ayant trou-

vé  $YM = -\frac{Xz}{Z}$ , &  $YN = -\frac{Yz}{Z}$ . Soit donc  $P$  la force, qui

agissant dans la direction  $ZP$  soit équivalente aux trois forces proposées  $Q, R, S$ . Or cette force  $P$  étant décomposée selon les directions

$ZY$  &  $YP$ , donnera pour la direction  $ZY$  la force  $= \frac{YZ}{ZP} P$ , &

pour la direction parallele à  $YP$  la force  $= \frac{YP}{ZP} P$ ; celle-cy se de-

composera encore selon les directions  $YM$  &  $YN$ , & pour la direction

$YM$  nous aurons la force  $\frac{YM}{ZP} P$ , & pour l'autre direction

$YN$  la force  $= \frac{YN}{ZP} P$ . Donc la force  $P$  sera resoluë en trois, sui-

vant des directions paralleles aux trois axes  $AB, AC, AD$ , dont la

premiere qui agit parallelement à  $AB$  sera  $= \frac{YM}{ZP} P$ ; la seconde,

qui agit parallelement à  $AC$  sera  $= \frac{YN}{ZP} P$ ; & la troisieme, qui agit

parallelement à  $AD$  sera  $= -\frac{YZ}{ZP} P$ ; puisque la direction  $ZY$  de

la derniere est contraire à celle de l'axe  $AD$ , auquel nous la rapportons. Donc, afin que la force  $P$  perpendiculaire à la surface selon

$ZP$  soit équivalente aux forces proposées  $Q, R, S$ , il faut que celles-cy soient égales respectivement à ces trois, dans lesquelles nous ve-

nons

nous de résoudre la force P. Et partant nous en obtiendrons ces égalités

$$Q = \frac{Y M}{Z P} P; R = \frac{Y N}{Z P} P \text{ \& } S = - \frac{Y Z}{Z P} P.$$

Or ayant trouvé  $Y M = -\frac{X z}{Z}$ , &  $Y N = -\frac{Y z}{Z}$ , à cause de

$$Y Z = z \text{ nous aurons } Y P = \frac{z}{Z} \sqrt{X X + Y Y} \text{ \& } Z P = \frac{z}{Z}$$

$\sqrt{X X + Y Y + Z Z}$ . Soit pour abrégier  $\sqrt{X X + Y Y + Z Z} =$

W, & ayant  $Z P = \frac{W z}{Z}$  les trois égalités trouvées se changeront en

celles-cy :

$$Q = - \frac{X}{W} P; R = - \frac{Y}{W} P \text{ \& } S = - \frac{Z}{W} P$$

Par conséquent les trois forces Q, R, S, qui agissent suivant les directions des trois coordonnées  $x, y, z$ , seront entr'elles comme les quantités X, Y, Z, qui se trouvent dans l'équation différentielle  $X dx + Y dy + Z dz = 0$  qui exprime la nature de la surface, C. Q. F. T.

### P R O B L E M E III.

VI. *Trouver la figure, à laquelle sera réduite une masse fluide, dont toutes les particules seront sollicitées par des forces quelconques.*

### S O L U T I O N.

Soit Z un point dans la surface de cette masse fluide dont nous cherchons la figure, ou ce qui revient au même, il s'agit de trouver une équation entre les trois coordonnées  $A X = x, X Y = y$  &  $Y Z = z$ , laquelle exprime la nature de la surface de la masse fluide proposée. Soit la différentielle de cette équation, que nous cherchons:  $X dx + Y dy + Z dz = 0$ . Maintenant de quelques forces que soit sollicité le point Z, elles se pourront réduire selon les directions



de nos trois coordonnées. Soit donc Q la force qui agit selon la direction parallèle à AX, R la force qui agit selon la direction parallèle à XY, & S celle, qui agit dans la direction YZ. Cela posé pour que la masse fluide soit en équilibre il faut que la moyenne direction de ces trois forces soit perpendiculaire à la surface. Pour cet effet nommant P la force équivalente aux trois forces données Q, R, & S, laquelle doit agir perpendiculairement à la surface, & pour abrégé  $W = \sqrt{XX + YY + ZZ}$ , la solution du problème précédent nous fournira les équations suivantes,

$$Q = -\frac{X}{W} \cdot P; \quad R = -\frac{Y}{W} \cdot P; \quad S = -\frac{Z}{W} \cdot P$$

Desquelles nous tirerons  $X = -\frac{W}{P} \cdot Q; \quad Y = -\frac{W}{P} \cdot R$  &  $Z = -$

$\frac{W}{P} \cdot S$ : ces valeurs étant substituées dans l'équation  $X dx + Y dy + Z dz = 0$ , qui doit exprimer la nature de la surface que nous cherchons, nous en obtiendrons cette équation :

$$Q dx + R dy + S dz = 0$$

D'où l'on voit, que connoissant les forces Q, R, S, qui agissent sur chaque point de la masse fluide suivant les directions des trois coordonnées  $x, y, z$ , il n'y a rien de plus aisé que d'assigner l'équation différentielle, qui exprimera la nature de la figure de la masse fluide, qu'il falloit chercher. Or la force équivalente aux trois forces Q, R, S, qui agissent ensemble sur le point Z, fera  $P = \sqrt{QQ + RR + SS}$ , laquelle aura sa direction perpendiculaire à la surface : & pour trouver la situation de cette direction ZP, nous n'avons qu'à prendre

$$YM = -\frac{Qz}{S}, \quad \& \quad YN = -\frac{Rz}{S},$$

pour en remplir le parallélogramme rectangle YMPN, dont l'angle P donnera le lieu du point P, où la perpendiculaire ZP à la surface rencontre le plan BAC. Du reste il faut remarquer que, pour que la figure soit possible, les forces Q, R, S, doivent être telles fonctions de  $x, y, z$ , afin que l'équation

tion

tion  $Q dx + R dy + S dz = 0$  puisse être réduite à des quantités finies.

VII. On fait qu'une équation différentielle, qui ne renferme que deux variables, est toujours possible, ou qu'il y a toujours une équation en termes finis entre les mêmes quantités variables, qui étant différentiée produise l'équation différentielle proposée, quoique même fort souvent on ne soit pas en état de trouver cette équation intégrale. Mais il n'en est pas de même des équations différentielles qui renferment trois quantités variables, comme  $x, y$  &  $z$ : car il y a quantité de cas où il est absolument impossible, qu'une telle équation puisse résulter par la différentiation d'une équation exprimée en termes finis. Un exemple d'une telle équation impossible est  $x dx + y dy + x dz = 0$ : car puisque les deux premiers membres  $x dx + y dy$  sont intégrables d'eux mêmes, il n'est pas possible de trouver un facteur, par lequel l'équation étant multipliée devienne intégrable. On a même déjà découvert les conditions, sous lesquelles une telle équation devient possible ou impossible: & Mons. *Clairaut* & *d'Alembert* ont démontré qu'une équation de cette forme  $Q dx + R dy + S dz = 0$  n'est possible, que dans les cas où il y aura:

$$Q \left( \frac{dR}{dz} - \frac{dS}{dy} \right) + R \left( \frac{dS}{dx} - \frac{dQ}{dz} \right) + S \left( \frac{dQ}{dy} - \frac{dR}{dx} \right) = 0.$$

Dans cette équation la formule  $\frac{dR}{dz}$  marque le différentiel de la fonction  $R$ , en ne supposant que  $z$  variable, dont le différentiel  $dz$  est détruit par le dénominateur  $dz$ . De même la valeur de  $\frac{dS}{dy}$  se trouvera en supposant la seule  $y$  variable dans la différentiation de  $S$ : & pour trouver la valeur de  $\frac{dS}{dx}$ , dans la différentiation de  $S$  il ne faut

supposer que  $x$  variable, en sorte que ces expressions  $\frac{dR}{dz}, \frac{dS}{dy}, \frac{dS}{dx},$

$\frac{dQ}{dz}$  &c. ne renfermeront que des quantités finies, puisque les denominateurs détruisent les différentiels des numérateurs. Donc toutes les fois que la propriété contenue dans cette équation n'aura pas lieu entre les fonctions  $Q, R, S$ , l'équation  $Q dx + R dy + S dz = 0$  sera impossible; & dans ces cas la masse fluide ne sauroit jamais parvenir à l'état de l'équilibre, comme a fort bien remarqué Mons. *Clairaut*, dans son *Traité sur la figure de la terre*.

VIII. Le cas le plus évident, auquel l'équation  $Q dx + R dy + S dz = 0$  devient possible, est si  $Q$  est une fonction de  $x$ ,  $R$  une fonction de  $y$ , &  $S$  une fonction de  $z$ : car alors chaque membre de l'équation sera intégrable à part. Donc si chaque particule de la masse fluide est sollicitée de trois forces  $Q, R, S$ , suivant les directions des trois axes  $AB, AC$  &  $AD$ , ou des trois coordonnées  $x, y$  &  $z$ : & que la force  $Q$ , qui agit dans la direction de  $x$ , soit exprimée par une fonction quelconque de  $x$ , la force  $R$  qui agit dans la direction de  $y$  par une fonction de  $y$ , & la force  $S$  par une fonction de  $z$ , alors l'équation différentielle  $Q dx + R dy + S dz = 0$  étant intégrable, la figure de la masse fluide sera exprimée par cette équation intégrale.

$$\int Q dx + \int R dy + \int S dz = A$$

où  $A$  marque une quantité constante, que la quantité du fluide déterminera. Dans ce cas donc la masse fluide sera réduite à l'état de l'équilibre, & à chaque point de sa surface la valeur de cette formule  $\int Q dx + \int R dy + \int S dz$  sera la même. Or si nous envisageons en général la nature de l'équilibre, nous appercevrons aisément, qu'elle exige de toutes parts une égalité dans l'action des forces, quoique nous ne sachions d'abord comme il faut estimer cette action des forces. Mais voyant dans le cas proposé, que c'est cette quantité  $\int Q dx + \int R dy + \int S dz$  qui est par tout la même, nous en conclurons sûrement, que cette même formule représente la quantité d'action des forces, qui dans l'équilibre doit partout être la même. Donc la quantité d'action des forces  $Q, R, S$ , qui agissent sur le point  $Z$  de la manière que je viens de supposer, sera  $= \int Q dx + \int R dy + \int S dz$ :

*d*z: formule qui est parfaitement conforme aux principes de *Mons. de Maupertuis*, & dont je ferai voir plus clairement la force & l'importance dans les réflexions suivantes.

P R O B L E M E IV.

IX. Une masse fluide étant attirée vers plusieurs centres fixes *C*, *C'*, *C''* par des forces proportionnelles à des fonctions quelconques des distances, trouver la figure, à laquelle cette masse fluide sera réduite.

Fig. 2.

S O L U T I O N.

Soit *Z* un point quelconque dans la surface de la masse fluide proposée, dont les distances aux centres fixes *C*, *C'*, *C''* soient nommées  $CZ = v$ ,  $C'Z = v'$ ,  $C''Z = v''$ , & les forces dont ce point *Z* est attiré vers ces centres soient des fonctions quelconques de ces distances *V*, *V'*, *V''*, la force *V* qui tire dans la direction *ZC*, étant une fonction quelconque de *v*, la force *V'* dans la direction *ZC'* une fonction de *v'*, & la force *V''* dans la direction *ZC''* une fonction de *v''*. Cela posé, qu'on choisisse comme auparavant trois axes perpendiculaires entr'eux, auxquels on tire du point *Z* les droites parallèles *ZQ*, *ZR*, *ZY*, suivant lesquelles on décompose les forces *V*, *V'*, *V''* qui agissent sur le point *Z*. Pour cet effet on n'a qu'à concevoir des plans parallèles au plan *QZR*, qui passent par les points *C*, *C'*, *C''*, lesquels seront traversés perpendiculairement par la droite *ZY* aux points *Y*, *Y'*, *Y''*, & dans ces plans on tire les droites *CX*, *C'X'*, *C''X''* parallèles à *ZQ*, & à celles-cy les perpendiculaires *YX*, *Y'X'*, *Y''X''*, qui seront parallèles à *ZR*. Maintenant on aura pour chaque centre *C*, *C'*, *C''* trois coordonnées qu'on nommera: pour le centre *C*;  $CX = x$ ,  $XY = y$  &  $YZ = z$ : pour le centre *C'*;  $C'X' = x'$ ,  $X'Y' = y'$  &  $Y'Z' = z'$  & pour le centre *C''*;  $C''X'' = x''$ ;  $X''Y'' = y''$  &  $Y''Z'' = z''$ . De ces coordonnées nous obtiendrons d'abord ces équations  $vv = xx + yy + zz$ ;  $v'v' = x'x' + y'y' + z'z'$  &  $v''v'' = x''x'' + y''y'' + z''z''$ . Et puisque les variables *x*, *x'*, *x''* ne diffèrent entr'elles que des quantités constantes, leurs différentiels seront égaux entr'eux d'où nous aurons  $dx = dx' = dx''$ , & par la même raison:

*dy*



$dy = dy' = dy''$ ; &  $dz = dz' = dz''$ . Maintenant la force  $ZC = V$  étant décomposée suivant les directions  $ZQ, ZR$  &  $ZY$ , donnera ces trois forces

$$ZQ = \frac{Vx}{v}, \quad ZR = \frac{Vy}{v} \quad \& \quad ZY = \frac{Vz}{v}$$

De la force  $ZC'$  résulteront ces trois forces

$$ZQ = \frac{V'x'}{v'}; \quad ZR = \frac{V'y'}{v'}, \quad \& \quad ZY = \frac{V'z'}{v'}$$

& de la force  $ZC''$  ces trois

$$ZQ = \frac{V''x''}{v''}; \quad ZR = \frac{V''y''}{v''} \quad \& \quad ZY = \frac{V''z''}{v''}$$

Dont de l'action commune de ces trois forces le point  $Z$  fera sollicité

suivant la direction

par la force

$ZQ$	$\frac{Vx}{v} + \frac{V'x'}{v'} + \frac{V''x''}{v''}$
$ZR$	$\frac{Vy}{v} + \frac{V'y'}{v'} + \frac{V''y''}{v''}$
$ZY$	$\frac{Vz}{v} + \frac{V'z'}{v'} + \frac{V''z''}{v''}$

Ces forces agissant selon des directions contraires à celles que nous avons données aux forces  $Q, R, S$  dans le problème précédent, si nous ferons l'application, nous aurons :

$$Q = -\frac{Vx}{v} - \frac{V'x'}{v'} - \frac{V''x''}{v''}$$

$$R = -\frac{Vy}{v} - \frac{V'y'}{v'} - \frac{V''y''}{v''}$$

$$S = -\frac{Vz}{v} - \frac{V'z'}{v'} - \frac{V''z''}{v''}$$

Or

Or la nature de la surface de cette masse fluide sera exprimée par cette équation  $Q dx + R dy + S dz = 0$ . Mais substituant les valeurs trouvées pour  $Q, R, S$ , nous obtiendrons en changeant les signes cette équation.

$$\left. \begin{aligned} + \frac{V x dx}{v} + \frac{V' x' dx'}{v'} + \frac{V'' x'' dx''}{v''} \\ + \frac{V y dy}{v} + \frac{V' y' dy'}{v'} + \frac{V'' y'' dy''}{v''} \\ + \frac{V z dz}{v} + \frac{V' z' dz'}{v'} + \frac{V'' z'' dz''}{v''} \end{aligned} \right\} = 0$$

Or les premières formules, qui expriment les valeurs des distances  $v, v', v''$  fournissent

$$x dx + y dy + z dz = v dv$$

$$x' dx' + y' dy' + z' dz' = v' dv'$$

$$x'' dx'' + y'' dy'' + z'' dz'' = v'' dv''$$

Par conséquent la figure de la masse fluide sera exprimée par cette équation  $V dv + V' dv' + V'' dv'' = 0$  dont chaque terme est intégrable de lui même, & partant nous aurons pour la figure cherchée cette équation intégrale :  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' = \text{Const.}$   
P. Q. F. T.

X. La même équation se peut aussi trouver, sans qu'on ait égard à la position des trois axes, laquelle est arbitraire, & ne se trouve plus dans l'équation finale. Nous n'avons qu'à considérer un élément infiniment petit  $Zz$ , conçu d'une manière quelconque depuis le point  $Z$  sur la surface de la masse fluide, & il est d'abord clair, que pour que le point  $Z$  puisse être en équilibre ou demeurer en repos, il faut que les forces, qui sollicitent le point  $Z$  selon la direction  $Zz$  évanouissent, après avoir décomposé les forces  $V, V', V''$ , qui y agissent, selon cette direction  $Zz$ , & d'autres qui y sont perpendiculaires. Car si les forces suivant  $Zz$  ne se détruisoient pas mutuelle-

ment, rien n'empêcheroit, que le point  $Z$  ne se mût actuellement suivant cette direction & partant la masse fluide ne seroit pas en équilibre. On nomme ces forces *tangentes*, qui résultent de cette décomposition selon la direction de l'élément  $Zz$ ; ce seront donc ces forces tangentes, qui doivent se détruire mutuellement, ou dont la somme doit être  $= 0$ . Pour trouver ces forces tangentes, je mène du point  $z$  sur les distances  $CZ, C'Z, C''Z$  les perpendiculaires  $zt, zt', zt''$ , & nommant l'élément  $Zz = ds$ , nous aurons  $Zt = -dv, Zt' = -dv' & Zt'' = -dv''$ . La ressemblance des triangles élémentaires  $Zzt, Zzt', Zzt''$  aux triangles, qui se forment en baissant des perpendiculaires des points  $C, C', C''$  sur la tangente ou l'élément  $Zz$  prolongé, donnera les forces tangentes, qui résultent de chacune des forces  $V, V', V''$  & de la force  $V$  on obtiendra la force tangente  $= -\frac{V dv}{ds}$ , de la force  $V'$  provien-

dra la force tangente  $= -\frac{V' dv'}{ds}$  & de la force  $V''$  celle - cy  $= -\frac{V'' dv''}{ds}$ . Donc puis que la somme de ces forces tangentes doit

être égale à  $0$ , nous aurons pour la figure de la masse fluide cette équation  $= -\frac{V dv}{ds} - \frac{V' dv'}{ds} - \frac{V'' dv''}{ds} = 0$ , ou bien celle - cy

$V dv + V' dv' + V'' dv'' = 0$ , dont l'intégrale sera :

$$\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' = C.$$

qui est la même équation, à laquelle nous a conduit la solution précédente.

XI. La masse fluide donc étant sollicitée par ces forces  $V, V', V''$ , que nous venons de considérer, parviendra dans un état d'équilibre, & la figure qu'elle prendra alors, aura cette propriété que pour chaque point  $Z$  de sa surface la valeur de cette expression  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ , sera partout la même. Donc puisque l'état d'équilibre exige de toutes parts une égalité d'action, il est d'abord clair que

que cette même formule nous exprimera la quantité d'action, qui par son égalité se contrebalance de tous cotés ; & on ne sauroit douter, que cette formule,  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$  ne fût la vraie mesure de la quantité d'action des forces, qui agissent sur la masse fluide, quand même on n'auroit point d'autres raisons, par lesquelles on seroit en état de déterminer cette mesure. Or Mr. de Maupertuis, dans son excellente piece sur les loix du repos, a expliqué les principes, desquels il a tiré précisément la même mesure de la quantité d'action des forces : & ces principes lui ont fourni pour ce cas d'équilibre d'une masse fluide la même formule  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ , sans qu'il ait été obligé d'avoir recours aux principes ordinaires de la Mécanique. De là on tirera la règle suivante pour trouver la quantité d'action des forces, qui agissent sur un point quelconqué Z : *Qu'on multiplie chaque force V par le différentiel de la ligne ZC = v, suivant la direction de laquelle cette force agit, du produit V dv qu'on prenne l'intégrale, & la somme de toutes ces intégrales  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$  donnera la quantité d'action de toutes ces forces sur le point Z.* Cette règle, qui coule immédiatement des principes de Mr. de Maupertuis, est donc parfaitement d'accord avec la solution, que je viens de déduire des principes ordinaires de la Mécanique.

XII. Mr. de Maupertuis dans ses réflexions sur cette matière est encore allé plus loin, & a soutenu que non seulement la quantité d'action des forces, qui agissent sur toutes les particules de la surface d'une masse fluide, étoit partout la même ; mais que sa valeur étoit encore la plus petite, qu'il soit possible. Cette propriété si convenable aux loix générales de la nature, qui affecte constamment de produire ses effets à moindres frais, est aussi une suite fort naturelle de la solution, que je viens de trouver. Car puisque la valeur de cette expression  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$  est partout la même, son différentiel sera égal à zero, ou  $V dv + V' dv' + V'' dv'' = 0$ . Or on sait que, pour que la valeur d'une quantité variable soit la plus grande, ou plus petite, il faut, que son différentiel soit = 0. Donc réciproquement, puisque dans la figure de la masse fluide le différentiel  $V dv + V' dv' + V'' dv''$  est = 0, on pourra dire, que son inté-



gral  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$  est un *minimum*. Il est bien vrai que cette conversion n'est pas toujours juste; car, par exemple, dans un cercle dont la nature est exprimée par cette équation  $x x + y y = a a$ , quoique le différentiel de la quantité  $x x + y y$  soit égal à zero, on ne sauroit dire que la quantité  $x x + y y$  même y étoit un *maximum*, ou *minimum*. Mais outre que le principe général de la nature exige que la quantité d'action, que cette formule  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$  exprime, soit un *minimum*, de sorte que l'exception tirée de l'exemple du cercle, n'y puisse pas avoir lieu, jem'en vai prouver cette conclusion par un cas tout particulier, dont l'évidence sautera d'abord aux yeux.

XIII. Supposons que la masse fluide vienne à être diminuée à l'infini, desorte qu'elle soit réduite à un seul point Z: on demandera donc où ce point Z doit être placé, afin qu'étant attiré vers les centres de forces C, C', C'', il soit en équilibre: & on s'apercevra d'abord que ce lieu d'équilibre du point Z sera là, où la quantité d'action de forces, ou la valeur de l'expression  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$  fera la plus petite. Quand j'aurai prouvé cela, on ne fera aucune difficulté de reconnoître, que pour le cas d'une masse fluide d'une étendue finie, le même raisonnement n'ait lieu: & que puisque le différentiel de cette même formule est également zero, la valeur de cette formule n'y soit un *minimum*. Car si cette conclusion n'étoit pas juste dans le cas d'une masse fluide, elle ne le seroit pas non plus dans le cas, où la masse fluide est réduite à un seul point. Or le cas de l'état d'équilibre d'un point, qui est sollicité par des forces quelconques, que je m'en vai considérer, est celui d'où dépendent les premiers principes de la Statique, savoir la composition & la décomposition des forces, dont la vérité est par conséquent d'autant moins assujétie à des doutes: quoique les démonstrations qu'on en donne ordinairement ne soient pas assés rigoureuses; puisqu'on y fait entrer la considération du mouvement, qui paroît tout à fait étrangère dans ce cas, où il ne s'agit que de l'état du repos. Feu Monsieur *Nicolas Bernoulli* a bien fait sentir ce défaut général dans le I. Tome des Comment. de l'Acad. de Petersbourg, où il a donné une fort

belle

belle démonstration de ce principe de la Statique, qui est aussi ingénieuse, que purement geometrique, & fondée sur des axiomes incontestables.

XIV. Cependant je me flatte, qu'on trouvera la démonstration suivante, que je donnerai de ce même principe, également convaincante, quoiqu'elle soit fondée sur quelque principe tiré de la Mécanique. Soit un point quelconque Z, qui étant sollicité par trois forces V, V' V'' selon les directions ZC, ZC', ZC'', se trouve actuellement en équilibre : & on soutient qu' alors ces trois forces seront entr'elles comme les sinus des angles opposés C'ZC'' ; CZC'', CZC'. Pour démontrer cette vérité, de laquelle dépend toute la Statique, au lieu des forces, je concevrai des fils élastiques égaux entr'eux, qui étant attachés aux lignes AB, A'B', A''B'', & les tirant vers les parois immobiles EF, E'F', E''F'' agissent sur le point Z par le moyen des verges ZC, ZC', ZC'' de la même manière, que les forces proposées V, V', V''. Soit la force de chaque fil élastique, dont il tache de se contracter, = 1, & le nombre des fils, qui sont attachés à la ligne AB pour l'approcher au parois EF, soit = V, afin que toute la force unie de ces fils élastiques devienne = V. & que le point Z par ce moyen soit sollicité par la même force V dans la direction ZC. De même, soit le nombre des fils semblables attachés à la ligne A'B' = V', & le nombre des fils attachés à la ligne A''B'' = V'' afin que le point Z soit sollicité suivant les directions ZC' & ZC'' par les forces V' & V''.

Fig 3.

XV. Cela posé il est clair que ces forces n'agissent qu' entant que les fils élastiques tachent de se raccourcir, & le point Z ne sauroit être en repos, que lorsqu'il sera impossible, que la contraction de tous ces fils ensemble se puisse augmenter davantage. On m'accordera donc sans aucune difficulté, que le point Z sera alors en équilibre, lorsque les fils se seront raccourcis autant qu'il sera possible, ou lorsque la somme de tous les fils pris ensemble sera la plus petite : car si le point Z pouvoit être trainé dans un autre endroit z, où le raccourcissement des fils, considérés tous ensemble, seroit encore plus grand, il n'y a aucun doute, que les forces ne le transportassent dans

cet endroit là, avant que l'état d'équilibre arrive. Ce principe est si évident, que pour peu qu'on y réfléchisse on sera convaincu de sa vérité : puisque ces fils se contracteront effectivement, tandis qu'une plus grande contraction sera possible, & ils ne cesseront d'agir, qu'il ne s'oppose des obstacles insurmontables, qui rendront impossible une plus grande contraction. Donc, si nous nommons la longueur des fils élastiques  $AG = x$ , celle des fils  $A'G' = x'$  &  $A''G'' = x''$ , la longueur de tous les fils pris ensemble sera  $= Vx + V'x' + V''x''$ , & celle-cy sera par conséquent la plus petite, lorsque le point Z est réduit dans l'état d'équilibre.

XVI. Donc, si le point Z sera transporté infiniment peu de l'endroit où il est en équilibre, la valeur de la formule  $Vx + V'x' + V''x''$  demeurera encore la même, ou son différentiel  $Vdx + V'dx' + V''dx''$  sera égal à zero ; car je regarderai ici les forces  $V, V', V''$  comme constantes, de sorte qu'elles n'augmentent ni ne diminuent, pendant que les fils élastiques s'allongent, ou se raccourcissent : je fais cette hypothèse, afin que le cas soit plus évident & moins embarrassé, puisqu'il ne sera pas difficile ensuite de juger des cas, où les forces  $V, V', V''$  sont elles-mêmes variables. Qu'on conçoive donc le point Z transporté en z par l'espace infiniment petit Zz, & comme un tel changement se peut faire d'une infinité de manières, j'en choisirai celui où le point z est également éloigné de AB, que le point Z, de sorte que par ce changement les fils AG, BH ne souffrent aucune alteration. Mais comme le point Z par ce mouvement Zz s'est approché plus de E'F', & qu'il s'est éloigné plus de E''F'', les fils A'G', B'H', se feront raccourcis, & les fils A''G'', B''H'' allongés : & partant la ligne A'B', à laquelle sont attachés les fils, sera parvenue en a'b', & la ligne A''B'' en a''b'' : donc le raccourcissement de ceux-là sera  $= A'a'$ , & l'allongement de ceux-cy  $= A''a''$ . Or en vertu de la propriété des plus petits, l'allongement total d'un côté  $V''A''a''$  doit être égal au raccourcissement de l'autre côté  $V'A'a'$ . Tirons les lignes  $zc'', zc'$  égales & parallèles aux lignes ZC' & ZC'', & y ayant mené les perpendiculaires Zq, zp, le raccourcissement A'a' sera  $= Zp$ , & l'allongement A''a''  $= zq$ , donc il y aura  $V'Zp = V''zq$ .



$\equiv V'' \cdot z q$ , ce qui donnera cette proportion  $V' : V'' \equiv z q : Z p$ .  
 Or prenant  $Z z$  pour le sinus total,  $z q$  sera le sinus de l'angle  $z Z q$ ,  
 ou bien de  $C Z C''$  à cause des angles droits  $C Z z$  &  $C'' Z q$ ; de mê-  
 me  $Z p$  sera le cosinus de  $z Z p$  & partant le sinus de  $C Z C'$ , d'où il  
 s'ensuit que les forces  $V'$  &  $V''$  seront entr'elles comme les sinus des  
 angles  $C Z C''$  &  $C Z C'$ , & de là on tirera cette proportion  
 connuë :

force  $Z C$  : force  $Z C'$  : force  $Z C'' \equiv \sin C' Z C'' : \sin C Z C'' , \sin C Z C'$ .

XVII. De cette nouvelle démonstration du principe général de  
 la Statique, en vertu duquel trois forces appliquées à un point sont  
 en équilibre, lorsque ces forces sont entr'elles, comme les sinus des  
 angles opposés, on sera convaincu, que non seulement la formule  
 différentielle  $V dx + V' dx' + V'' dx''$  doit être  $\equiv 0$ , mais aussi  
 que la valeur de la formule finie  $V x + V' x' + V'' x''$  y est la plus  
 petite. J'ai supposé ici les forces  $V, V', V''$  constantes, ou qu'elles  
 demeurent les mêmes, quelque changement que subissent les fils éla-  
 stiques que j'ai substitués à leurs places: mais la formule différentielle  
 demeurera la même, quoique les forces soient variables: on n'a pour  
 cet effet qu'à nommer les distances  $Z C \equiv v, Z C' \equiv v', Z C'' \equiv v''$ ,  
 & on aura  $dx \equiv -dv, dx' \equiv -dv', dx'' \equiv -dv''$ . De plus,  
 si les forces  $V, V', V''$  sont des fonctions quelconques de ces di-  
 stances  $v, v', v''$ , l'état d'équilibre du point  $Z$  donnera la même équation  
 différentielle  $V dv + V' dv' + V'' dv'' \equiv 0$ , qui a été trou-  
 vée dans la solution du problème, & à présent il n'y a aucun doute  
 que son integral  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$  ne soit aussi un *mini-  
 mum*. Or si cette formule est un *minimum* dans le cas, où les forces  
 n'agissent que sur le seul point  $Z$ , elle sera pareillement un *minimum*  
 dans le cas d'une masse fluide quelconque, qui est sollicitée par les  
 mêmes forces. Par conséquent, nous avons les plus fortes raisons de  
 soutenir, que la quantité d'action des forces  $V, V', V''$  sur un point  
 quelconque  $Z$ , doit être exprimée par cette formule  $\int V dv + \int V' dv'$   
 $+ \int V'' dv''$  puis que cette formule se trouve, soit qu'on considère  
 le point  $Z$  tout seul, ou qu'il appartienne à une masse fluide quelcon-  
 que. Voilà donc un appuy inébranlable, sur lequel est fondée la  
règle



regle donnée cy - dessus pour déterminer la quantité d'action des forces quelconques sur un point donné.

XVIII. Les réflexions suivantes mettront encore davantage dans tout son jour cette idée de la quantité d'action des forces, & on en entendra plus clairement la raison, pourquoi la quantité d'action des forces  $V, V', V''$  sur le point  $Z$  doit être exprimée précisément par la formule  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ . Dans la recherche précédente, où j'ai substitué des fils élastiques égaux entr'eux au lieu des forces  $V, V', V''$ , l'état ou l'action de chaque force appliquée au point  $Z'$  a été représentée par la somme des longueurs de tous les fils élastiques, qui tiennent lieu des forces: car nous avons vu, si la longueur des fils élastiques  $AG$  substitués à la place de la force  $V$  est nommée  $\equiv x$ , & que  $V$  marque le nombre de ces fils, puisque la force de chacun a été posée  $\equiv 1$ ; alors la somme totale de tous ces fils étoit  $\equiv Vx$ : ce sera donc cette quantité  $Vx$ , qui représente l'action de cette force  $V$  sur le point  $Z$ , puisque  $Vx$  exprime l'état actuel de contraction des fils élastiques, de laquelle dépend l'action de la force  $V$ . Or posant toute la distance du point  $Z$  aux parois immobiles  $EF \equiv v$ , & la distance constante  $ZC \equiv a$ , nous aurons  $x \equiv v - a$ , & l'action de la force  $V$  sera  $\equiv V(v - a)$  pourvu que la force  $V$  soit constante, ou que sa quantité ne dépende point de la distance  $v$ . Or en cas que la force  $V$  dépende de la distance  $v$ , ou ce qui revient au même de la longueur des fils élastiques  $x$ , alors le nombre des fils  $V$  seroit variable, & leur longueur totale ne seroit plus  $Vx$  ou  $V(v - a)$ , mais on s'apercevra aisément que pour avoir cette longueur totale, il faudra prendre l'intégrale de  $V dx$  ou de  $V dv$ , y ayant égard à la variabilité de  $V$ . Ce sera donc alors  $\int V dv$ , qui exprime la longueur totale des fils élastiques substitués au lieu de la force  $V$ , & partant il est évident que cette même formule  $\int V dv$ , exprimera aussi la quantité d'action de la force  $V$  sur le point  $Z$ ; & on comprendra de même que la quantité d'action de plusieurs forces  $V, V', V''$  sera  $\equiv \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ .

XIX. Mais il y a plus : la formule  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$  est non seulement d'un si grand usage dans l'état de repos, c'est aussi d'elle que dépend principalement la détermination du mouvement. Car supposons qu'un corps sollicité vers les centres C, C', C'' par des forces V, V', V'' ait parcouru déjà l'arc AZ d'une courbe quelconque, ayant commencé son mouvement du repos en A : & soit  $u$  la vitesse, que ce corps aura acquise au point Z : &  $u + du$  celle qu'il aura au point  $z$ , après avoir parcouru l'élément d'espace,  $Zz = ds$ . Soient les distances du corps en Z aux centres C, C', C'' nommées  $CZ = v$ ,  $C'Z = v'$ ,  $C''Z = v''$ , & V, V', V'' les forces dont le corps est attiré à ces centres. Qu'on tire de  $z$  sur les distances CZ, C'Z, C''Z les perpendiculaires  $z\epsilon$ ,  $z\epsilon'$ ,  $z\epsilon''$  & on aura  $Z\epsilon = dv$ ,  $Z\epsilon' = -dv'$ ,  $Z\epsilon'' = -dv''$ , d'où nous tirerons les forces

Fig. 4.

tangentes  $-\frac{V dv}{ds}$ ,  $-\frac{V' dv'}{ds}$ ;  $-\frac{V'' dv''}{ds}$ , & partant le mouvement du corps, pendant qu'il parcourt l'élément  $Zz = ds$  sera accéléré par la force  $-\frac{V dv - V' dv' - V'' dv''}{ds}$ , qui étant

multipliée par l'espace  $ds$  sera égale au produit de la vitesse  $u$  par son différentiel  $du$  : de sorte que nous aurons cette équation  $u du = -V dv - V' dv' - V'' dv''$ , dont l'intégrale sera  $\frac{1}{2}uu = C - \int V dv - \int V' dv' - \int V'' dv''$ , où la constante C doit être prise, en sorte qu'au point A la vitesse devienne  $= 0$ . Donc le demi-quarré de la vitesse au point Z, ou ce qui revient au même, la hauteur due à la vitesse sera exprimée par la formule  $C - \int V dv - \int V' dv' - \int V'' dv''$ , qui consiste de deux membres, dont le premier C dépend uniquement du point A où le mouvement a commencé; mais l'autre membre  $-\int V dv - \int V' dv' - \int V'' dv''$  dépend uniquement du point Z où le corps est parvenu. Par conséquent la formule  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ , qui dans l'état de repos marque la quantité d'action des forces sur le point Z, exprime aussi dans l'état de mouvement la partie du quarré de la vitesse, laquelle dépend du point Z, de sorte que cette for-



mule est de la dernière importance, aussi bien dans l'état de repos, que dans celui de mouvement.

XX. Ayant donc établi la véritable idée de la quantité d'action des forces quelconques sur un point donné, soit qu'il se trouve en repos, ou en mouvement, je ferai voir plus clairement le grand usage de cette idée, en considérant plusieurs centres fixes  $C, C', C''$  &c. qui attirent à soi avec des forces  $V, V', V''$  &c, proportionnelles à des fonctions quelconques des distances  $v, v', v''$ , &c. de sorte que la quantité d'action de ces forces sur un point  $Z$ , dont les distances à ces centres sont  $v, v', v''$  &c. est  $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$  &c. Et d'abord pour trouver le lieu, où il faut placer un corps considéré comme un point, afin qu'il demeure en repos, ou en équilibre, entre ces centres de forces, je viens de montrer que ce point cherché  $Z$  sera là, où la valeur de cette formule  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ , ou la quantité d'action, est la plus petite. Par le moyen de cette propriété on trouvera aisément le lieu de ce point  $Z$ , en transportant ce point  $Z$  par un espace infiniment petit  $Zz$ , & supposant le différentiel  $V dv + V' dv' + V'' dv'' + \dots$  égal à zero : comme j'ai fait voir dans le cas, où le point  $Z$  étoit sollicité de trois forces. C'est de ce cas, que dépend la composition & la résolution des forces, laquelle étant la base de toute la Statique, on voit que ce seul principe de la quantité d'action fournit le fondement de cette science.

XXI. En second lieu, si on considère une masse fluide dont toutes les particules sont attirées à ces centres de forces,  $C, C', C''$  &c. on trouvera encore la figure, que cette masse fluide prendra, par le seul moyen de la quantité d'action : car il faut, comme j'ai fait voir que la quantité d'action des forces soit la même partout, sur chaque point de la surface de la masse fluide : ou la nature de cette surface sera exprimée par cette équation :

$$\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \dots = \text{Const.}$$

Ou bien cette masse fluide ne sauroit être en repos, que dans un tel endroit & avec une telle figure, afin que la quantité d'action totale soit la plus petite qu'il est possible : *c. d. d.* pour que la masse fluide  
soit



soit en équilibre, il faut que la valeur de cette formule  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.$  soit un *minimum*. C'est de ce principe que dépend toute l'hydrostatique, ou la théorie de l'équilibre des liqueurs. Car si nous ne considérons qu'une seule force centrale, pour avoir le cas de la pesanteur naturelle, nous aurons pour l'état d'équilibre d'une masse fluide l'équation  $\int V dv = C$ , & puisque  $V$  est une fonction de  $v$ , la distance  $v$  sera constante; donc tous les points de la surface fluide doivent être également éloignés du centre de la terre, ou la surface d'un fluide sera horizontale.

XXII. Ce ne sera pas donc seulement la quantité d'action des forces sur un seul point  $Z$ , qui est la plus petite, mais on reconnoitra aisément que dans une masse fluide, qui est en équilibre, la somme totale de toutes les quantités d'action des forces sur tous les élémens de la masse fluide doit être un *minimum*. Ainsi si l'on nomme  $dS$  une particule quelconque de la masse fluide, & que la quantité d'action des forces  $V, V', V'' \&c.$  sur cette particule, soit  $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.$  entant qu'elle n'est considérée que comme un point, il est clair que la quantité d'action sur l'élément  $dS$  sera  $= dS (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.)$ , puisque  $dS$  est déjà regardé comme un assemblage de plusieurs points, sur chacun desquels la quantité d'action des forces est  $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.$  de sorte que cette quantité doit être multipliée par le nombre des points de l'élément  $dS$ , *c. à. d.* par l'élément  $dS$  même, pour avoir la quantité d'action des forces sur cet élément  $dS$ . Par conséquent la quantité d'action des forces sur toute la masse fluide sera  $= \int dS (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.)$ . Ce sera donc cette expression intégrale, dont la valeur doit être la plus petite; puisqu'elle comprend la somme totale de toutes les quantités d'action des forces sur toutes les particules de la masse fluide. De là il est aisé de tirer cette règle générale pour trouver l'état d'équilibre d'un corps quelconque sollicité par des forces quelconques: *Qu'on multiplie chaque élément du corps par la quantité d'action des forces, qui y agissent, & l'intégrale de ce produit, qui sera la quantité d'action totale sur le corps entier, doit*



être un minimum. Quiconque aura compris la réalité de l'idée de la quantité d'action des forces sur un point, que je viens d'établir par les plus fortes raisons, accordera sans difficulté, que dans tous les cas d'équilibre la somme de toutes ces quantités d'action doit être la plus petite.

XXIII. Si le corps entier, dont nous cherchons l'état d'équilibre, est infiniment petit, de sorte que  $dS$  exprime tout ce corps, alors la quantité d'action totale sera  $\equiv dS (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.)$  laquelle sera un *minimum*, si  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.$  aura la plus petite valeur, puisque  $dS$  est constant : & c'est le cas que j'ai déjà développé cy - dessus. Mais si le corps proposé est une masse fluide, dont  $dS$  est un élément, il n'est plus si aisé, que la figure où  $\int dS (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.)$  est un *minimum*, sera la même, que j'ai trouvée auparavant, & qui avoit cette propriété, qu'à chaque point de sa surface la quantité d'action  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.$  étoit d'une valeur constante; Car en général il est extrêmement difficile de déterminer la figure d'un solide, où une telle formule  $\int dS (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.)$  est un *maximum*, ou un *minimum*, puisque cette méthode n'est encore assez cultivée, que pour les figures décrites sur un plan. Donc, pour affermir la vérité de cette règle générale, & pour faire voir qu'elle conduit à la même solution, que j'ai déjà trouvée, je considérerai une masse fluide infiniment mince, couchée sur un plan, & dont toutes les particules sont poussées vers plusieurs centres fixes  $C, C', C''$  &c. situés dans le même plan.

Fig. 5.

XXIV. Soit donc  $AM$  la surface de cette masse fluide, quand elle sera en équilibre; & pour trouver cette figure qu'on prenne les coordonnées  $CX \equiv x$ ,  $XM \equiv y$ , & pour les autres centres soient des coordonnées semblables  $C'X' \equiv x'$ ,  $X'M \equiv y'$ ;  $C''X'' \equiv x''$ ,  $X''M \equiv y''$ : & il y aura  $dx \equiv dx' \equiv dx''$  &  $dy \equiv dy' \equiv dy''$ . Mais avant que de considérer le dernier point  $M$ , il faut chercher la quantité d'action des forces sur l'élément  $XxmM$  de l'aire  $CXMA$ , qui nous représente la masse fluide. Pour cet effet qu'on prenne de cet élément  $XxmM$  une particule quelconque  $Yy$ , & qu'on nomme en  
 atten-

attendant  $XY = y$ ,  $X'Y = y'$ ,  $X''Y = y''$  : & la particule  $Yy$  fera  $= dx dy$ . Maintenant soient les distances de cette particule aux centres des forces:  $CY = v$ ,  $C'Y = v'$ ,  $C''Y = v''$ , & les forces mêmes, comme jusqu'ici,  $V, V', V''$ : de sorte que nous ayons  $vv = xx + yy$ ;  $v'v' = x'x' + y'y'$ ;  $v''v'' = x''x'' + y''y''$ . Or la quantité d'action de ces forces sur le point  $Y$  étant  $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ , la quantité d'action sur la particule  $Yy$  fera  $= dx dy (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$  dont l'intégrale, en supposant  $x$  constant, donnera la quantité d'action des forces sur tout l'élément  $XxmM$ , pourvu qu'on avance le point  $Y$  jusqu'en  $M$ , & que les significations des  $y, y', y''$  soient les mêmes, que je leur ai données au commencement. Par conséquent la quantité d'action des forces sur tout l'élément de l'aire  $XxmM$  sera  $= dx \int dy (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$ , supposant dans cette intégrale l'abscisse  $x$  constante, & la seule appliquée  $y$  variable. Je nommerai pour abrégé cette intégrale, qui résulte en supposant  $x$  constante,  $\int dy (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.) = U$ , de sorte que le différentiel de  $U$  en supposant encore  $x$  constante soit  $dy (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$ , ou si nous posons en général  $dU = M dx + N dy$ , il y aura  $N = \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ .

XXV. Ayant ainsi trouvé la quantité d'action sur l'élément  $XxmM$ , laquelle est  $= U dx$ , il est clair que la quantité d'action sur toute l'aire  $CXMA$  sera  $= \int U dx$ . Par conséquent cette quantité  $\int U dx$  doit être la plus petite entre toutes les figures, que cette aire pourroit prendre; il s'agit donc de trouver parmi toutes les figures de la même aire,  $\int y dx$ , celle où la valeur de cette formule  $\int U dx$  est la plus petite. Cette question revient au même que si l'on cherchoit parmi toutes les courbes possibles celle, où cette formule  $\alpha \int y dx + \int U dx$  ou  $\int dx (U + \alpha y)$  est un *minimum*. Pour cet effet suivant ma méthode, en comparant cette formule avec  $\int Z dx$ , & posant  $dZ = M dx + N dy + P dp + \&c.$  la courbe cherchée sera  $0 = N - \frac{dP}{dx}$ . Mais puisque  $Z = U + \alpha y$ , & que  $U$  ne renferme que les va-

riables  $x$  &  $y$ , nous aurons  $N = 0$ , ou bien le différentiel de  $U + \alpha y$ , en ne supposant que  $y$  variable doit être  $= 0$ . Et partant le différentiel de  $U$ , en ne supposant que  $y$  variable, étant  $= dy (fV dv + fV' dx' + fV'' dx'')$  & celui de  $\alpha y = \alpha dy$ , nous en obtiendrons pour la courbe cherchée  $AM$  cette équation  $0 = \alpha + fV dv + fV' dx' + fV'' dx''$  ou bien la quantité d'action des forces sur chaque point  $M$  de la courbe  $AM$  doit être la même ; tout comme il a été trouvé par les autres principes. Ce bel accord de notre principe général dans ce cas ne laissera pas le moindre doute, qu'il ne soit pareillement d'accord dans tous les autres cas.

XXVI. On sera encore plus fortement convaincu de la vérité de ce principe général, si l'on remarquera, que la formule, dont la valeur est la plus petite dans la figure des fils flexibles, est parfaitement conforme à ce principe. Car soit  $AM$  la figure d'un fil parfaitement flexible, dont tous les élémens sont sollicités aux centres  $C, C', C''$  par des forces  $V, V', V''$  &c. & en vertu de notre principe le fil demeurera en repos, si la somme de toutes les actions des forces sur le fil  $AM$  fera la plus petite. Pour trouver cette somme, il faut chercher la quantité d'action sur l'élément  $Mm = ds$ , & puisque, en nommant les distances  $CM = v, C'M = v', C''M = v''$  la quantité d'action sur le point  $M$  est  $= fV dv + fV' dx' + fV'' dx''$  l'action sur l'élément  $Mm = ds$  fera  $= ds (fV dv + fV' dx' + fV'' dx'')$ , & partant la somme de toutes les actions sur la partie du fil  $AM$ , fera l'intégrale  $\int dS (fV dv + fV' dx' + fV'' dx'')$ . La valeur de cette formule étant rendue un *minimum*, donnera la figure du fil lors qu'il s'est mis en équilibre. Or ayant déterminé dans le Mémoire précédent la figure d'un tel fil par les principes ordinaires de la Mécanique, j'ai déjà remarqué que cette figure se trouve, si l'on cherche la courbe, où la valeur de cette même formule  $\int dS (fV dv + fV' dx' + fV'' dx'')$  est la plus petite.

XXVII. Je ne puis pas passer sous silence une fort belle propriété de la courbe d'un fil parfaitement flexible, & d'une épaisseur partout égale, à laquelle cette solution conduit. Soit  $AM$  ce fil parfaitement flexible, & partout de la même épaisseur, dont chaque point  $M$  est



M est attiré à trois centres C, C', C'' par des forces V, V', V'', qui sont des fonctions quelconques des distances CM = v, CM' = v', C''M = v''. Qu'on nomme les abscisses CX = x, C'X' = -x', C''X'' = -x'' les appliquées XM = y, X'M' = y', X''M = y'' & puisque dx = dx' = dx'' & dy = dy' = dy'' l'élément de la courbe Mm fera ds = v (dx² + dy²). Soit maintenant dy = p dx, & dp = q dx; & la methode des plus grands & plus petits a fourni pour la courbe du fil AM l'équation suivante

$$\frac{V(y - px)}{v} + \frac{V'(y' - px')}{v'} + \frac{V''(y'' - px'')}{v''} = \frac{q}{1 + pp} (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$$

où la formule  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$  exprime la quantité d'acti, on sur le point M. Qu'on divise de part & d'autre par  $v(1 + pp)$ , & puisque le rayon de la developée MO =  $\frac{(1 + pp) V(1 + pp)}{q}$

nous aurons cette equation

$$\frac{\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''}{MO} = \frac{V(y - px)}{vV(1 + pp)} + \frac{V'(y' - px')}{v'V(1 + pp)} + \frac{V''(y'' - px'')}{v''V(1 + pp)}$$

Or  $\frac{y - px}{V(1 + pp)} = \frac{y dx - x dy}{ds}$  exprime la perpendiculaire CT qui est menée du centre C à la tangente MT; car baissant du point X sur la même tangente la perpendiculaire XP & CQ sur XP, on voit d'abord que XP =  $\frac{y dx}{ds}$  & XQ =  $\frac{x dy}{ds}$ , de sorte que CT =

$$\frac{y dx - x dy}{ds} = \frac{y - px}{V(1 + pp)}; \text{ Donc si des autres centres } C', C'' \text{ on}$$

tire pareillement sur la tangente les perpendiculaires C'T', C''T'', l'équation trouvée se changera en cette forme:

$$\frac{\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''}{MO} = \frac{V}{v} \cdot CT + \frac{V'}{v'} \cdot C'T' + \frac{V''}{v''} \cdot C''T''$$

Multiplions par MO, &  $\frac{CT \cdot MO}{v} = \frac{CT \cdot MO}{CM}$  exprimera la

ligne





ligne  $MR$ , ayant baissé sur la ligne  $CM$  prolongée du point  $O$  la perpendiculaire  $OR$ . Ce qui nous fournit cette propriété : Si du centre  $O$  du cercle osculateur en  $M$  on mène sur les distances  $CM$ ,  $C'M$ ,  $C''M$  prolongées les perpendiculaires  $OR$ ,  $OR'$ ,  $OR''$ ; alors la quantité d'action des forces sur le point  $M$ , c'est à dire  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$  sera égale à  $V.MR + V'.MR' + V''.MR''$ .

XXVIII. Mais notre principe est encore plus général, & s'étend même aux fils élastiques, comme j'ai fait voir dans mon Mémoire précédent ; il s'agit seulement de ramener l'effet de l'élasticité à l'idée de la quantité d'action. Qu'on retienne toutes les dénominations du cas précédent, où chaque particule du fil  $AM$  est attirée vers les centres  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$  par les forces  $V$ ,  $V'$ ,  $V''$ , & soit le rayon de la développée

$MO = r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx dy}$ , duquel dépend la force de l'élasticité,

qu'on suppose ordinairement  $= \frac{A}{r}$ , ou  $= \frac{S}{r}$ , si le fil n'est pas

partout de la même épaisseur, de sorte que l'élasticité est dans un endroit plus grande, ou plus petite que dans un autre. Or pour rendre la solution plus générale, je supposerai que l'élasticité en  $M$  soit  $= T$ , cette lettre  $T$  marquant une fonction quelconque de  $r$ , qui renferme même la longueur du fil, en cas qu'il soit d'une élasticité variable. Cela posé, les principes de la Mécanique nous fournissent pour la courbe de ce fil élastique cette équation

$$T = + \int dy \int ds \left( \frac{Vx}{v} + \frac{V'x'}{v'} + \frac{V''x''}{v''} + \&c. \right) \\ - \int dx \int ds \left( \frac{Vy}{v} + \frac{V'y'}{v'} + \frac{V''y''}{v''} + \&c. \right)$$

Pour trouver cette même équation par la méthode des plus grands & plus petits, puisque la quantité d'action des forces  $V, V', V''$  sur le point  $M$  est  $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.$  on n'aura qu'à y ajouter la quantité d'action de l'élasticité, que je viens de nommer  $T$  :

on

Or nommant  $\frac{1}{r} = t$ , de sorte que  $t$  soit proportionnel à la courbure même, on comprendra aisément que, comme de la force  $V$  est résulté l'action  $\int V dv$ , ainsi de la force  $T$  résultera l'action  $\int T dt$ . Par conséquent, nommant la masse de l'élément du fil  $Mm = dS$ , la somme totale de toutes les actions sur la portion du fil  $AS$  sera  $= \int dS (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \& + \int T dt)$  & celle-cy sera la plus petite, quand le fil se trouve en équilibre: & cette propriété doit avoir lieu en vertu de notre principe, non seulement, lorsque les centres des forces  $C, C', C''$  avec la figure du fil se trouvent dans le même plan, mais aussi lorsque leur situation est quelconque.

XXIX. Mais ayant établi ce principe général, que dans tout état d'équilibre la somme de toutes les actions des forces sur toutes les particules du corps, qui est en équilibre, est un *minimum*, je remarque de plus que ce même principe a lieu dans tous les mouvemens libres des corps, de quelques forces qu'ils soient sollicités. Soit un corps, après avoir reçu un mouvement quelconque, attiré constamment vers plusieurs centres de forces  $C, C', C''$ , & que les forces  $V, V', V''$  soient exprimées par des fonctions quelconques des distances  $CM = v, C'M = v', C''M = v''$ ; ce corps éprouvera à chaque instant une autre quantité d'action de ces forces, & au moment qu'il se trouve en  $M$ , la quantité d'action est  $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ , comme j'ai fait voir au commencement de ce discours. Donc nommant l'élément du tems  $= dt$ , la quantité d'action instantanée, que le corps soutient pendant cet élément de tems  $dt$ , sera  $= dt (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.)$ : & partant la somme de toutes les actions instantanées, auxquelles le corps est exposé pendant le tems fini  $= t$ , sera  $= \int dt (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.)$ . Maintenant il est fort naturel, que ce corps prendra une telle route, que cette somme de toutes les actions instantanées y soit un *minimum*. Voilà donc un nouveau principe général, pour le mouvement libre des corps sollicités par des forces quelconques, dont la vérité faite d'a-

bord aux yeux, dès qu'on fait réflexion sur l'idée de la quantité d'action, que j'ai établie.

XXX. En se servant de ce principe on trouvera en effet les mêmes courbes pour le mouvement des corps sollicités par des forces quelconques, auxquelles les principes ordinaires de la mécanique nous conduisent. Car ce principe ne diffère point de celui, dont je me suis servi pour déterminer ces mêmes courbes par la méthode *de maximis & minimis* : où j'ai fait voir, tout comme le principe de Mr. de Maupertuis exige que nommant l'élément de la courbe  $Mm = ds$  & la vitesse du corps en  $M = u$ , la valeur de cette formule  $\int u ds$  étoit toujours un *maximum*. Or j'ai remarqué cy-dessus que la quantité d'action  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$  étant retranchée d'une quantité constante donne le carré de la vitesse  $uu$ , de sorte que  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' = C - uu$ ; donc, suivant notre nouveau principe, cette formule  $\int dt (C - uu)$ , où  $Ct - \int uu dt$  sera un *minimum*, ou bien pendant le même tems  $t$  la valeur de cette formule  $\int uu dt$  ou à cause de  $ds = u dt$ , la valeur de celle-cy  $\int u ds$  doit être un *maximum*, tout comme j'ai prouvé dans mon *Traité de Maximis & Minimis*.

