



1750

Recherches sur les plus grands et plus petits qui se trouvent dans les actions des forces

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

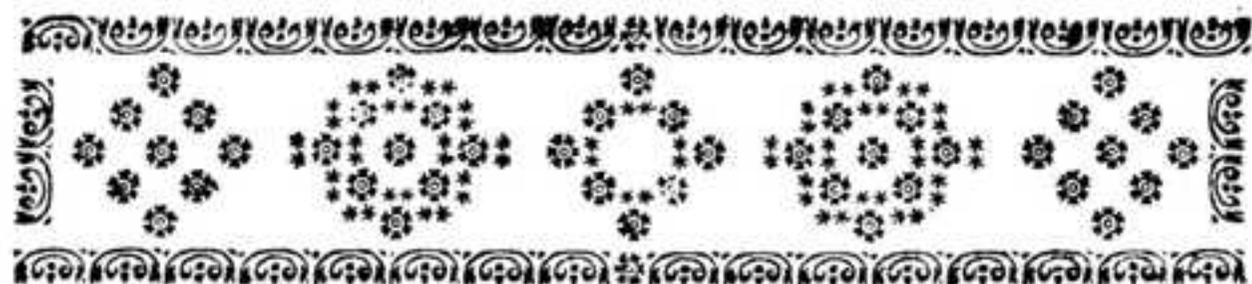
Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Recherches sur les plus grands et plus petits qui se trouvent dans les actions des forces" (1750). *Euler Archive - All Works*. 145.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/145>



RECHERCHES
SUR LES PLUS GRANDS ET PLUS PETITS
QUI SE TROUVENT DANS LES ACTIONS
DES FORCES,

PAR M. EULER.



I.

Est une vérité dont on ne peut plus douter, que toutes les actions, qui sont produites par les forces de la nature, renferment constamment un *maximum*, ou un *minimum*. C'est à dire, les forces étant données, l'effet qu'elles produisent, sera toujours tel, qu'une certaine quantité y devient un *maximum*, ou un *minimum*, de sorte que cette prérogative n'auroit plus lieu, si l'effet avoit été tout autre. Cette considération nous conduit à reconnoître un principe général de la nature, sur lequel toutes ses actions se réglient ; & qui nous fait voir, que la nature se propose toujours un certain but, auquel elle tache de parvenir, en y employant les moindres dépenses. On sera tout à fait convaincu de la vérité de ce principe général, par les excellentes réflexions, que Monsieur de *Maupertuis*, notre illustre Président, a publiées sur ce sujet, tant dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, que dans nos Mémoires pour l'Année 1746, où il a démontré que dans le choc des Corps le mouvement se distribue de manière que la quantité d'action, que suppose un changement arrivé, est la

plus petite qu'il soit possible. De plus il a fait voir, que dans le repos les Corps, qui se tiennent en équilibre, doivent être tellement situés, que s'il leur arrivoit quelque petit mouvement, la quantité d'action seroit la moindre.

II. C'est donc ce principe de *la moindre quantité d'action*, auquel Mr. de *Maupertuis* réduit tous les *maxima*, ou *minima*, que la Nature observe dans toutes ses productions: & la quantité d'action pourra toujours être représentée par une certaine formule algebrique, qui étant appliquée à l'effet produit réellement par la Nature, y obtient une valeur plus petite, qu'elle obtiendrait, s'il étoit arrivé tout autre effet. Ce principe aura donc également lieu dans la Mécanique & dans la Statique, c. à d. dans le mouvement, aussi bien que dans tous les états d'équilibre, où les corps se peuvent trouver. Pour le mouvement, Mr. de *Maupertuis* vient de faire voir que ce principe de *la moindre quantité d'action* s'observe à la rigueur dans le choc des corps, tant élastiques que non élastiques: & moi, j'ai découvert une semblable loi dans le mouvement des corps, qui sont attirés vers un, ou plusieurs centres de forces, par des forces quelconques; ayant remarqué que le mouvement du corps, & la courbe qu'il décrit, renferme toujours cette propriété, que nommant *u* sa vitesse dans un endroit quelconque, & *ds* l'élément de l'espace, cette formule *∫ u ds* sera toujours un *minimum*. Ce sera donc dans ce cas cette formule *∫ u ds*, qui exprime ce que Mr. de *Maupertuis* nomme la quantité d'action. Ces deux cas du mouvement, dans lesquels nous voyons, que ce principe a lieu, sont d'une si grande étendue, qu'on y peut presque réduire tous les mouvemens, qui arrivent au monde; & partant on n'aura plus la moindre raison de douter, que dans tous les mouvemens, par quelques forces qu'ils soient produits, il n'y ait toujours une certaine formule, dont la valeur soit la plus petite, & par laquelle sera représentée la quantité d'action.

III. L'usage de ce principe est déjà depuis long tems reconnu dans la Statique, ou Dynamique, où il s'agit de l'équilibre des corps sollicités par des forces quelconques, & c'est par son moyen, qu'on a donné des solutions de plusieurs problemes de cette nature. Il a été
aisé

aisé de prévoir, qu'une chaîne suspendue de ses deux bouts doit prendre une telle figure, afin que son centre de gravité soit le plus bas: ou que la distance de ce centre au centre de la terre, ou bien à un plan horizontal, soit un *minimum*. Si l'on nomme un élément quelconque de la chaîne $= ds$, & sa distance à un plan horizontal fixe pris à volonté $= x$, ce sera la valeur de cette formule $\int x ds$, qui sera un *minimum* pour la courbe de la chaîne: & partant ce sera la même formule $\int x ds$, qui représente la quantité d'action, qui doit être la plus petite. De même un liges rempli d'un fluide prendra la figure, dont la capacité est la plus grande, afin que le fluide puisse descendre le plus bas qu'il est possible: & Mr. de *Maupertuis* a fait voir l'usage de ce grand principe en plusieurs autres figures, que ces corps sollicités par des forces quelconques sont obligés de recevoir; où il a déterminé la formule, qui représente en chaque cas la quantité d'action, qui y doit être un *minimum*. Mr. *Daniel Bernoulli* a aussi remarqué, que la courbe d'une lame élastique renferme un tel *minimum*; car nommant un élément quelconque de cette courbe $= ds$, & le rayon de sa développée dans cet endroit $= r$, il a observé que la valeur de cette formule $\int \frac{ds}{r}$ devient un *minimum* dans la courbe élastique; & c'est de ce principe que j'ai déterminé la nature de cette courbe, dans mon traité sur la méthode *de Maximis & Minimis*, pour faire voir, que ce principe fournit la même courbe, qu'on a trouvée par la méthode directe, dont on se sert ordinairement.

IV. Par là on voit qu'il doit y avoir une double méthode de résoudre les problèmes de Mécanique; l'une est la méthode directe, qui est fondée sur les loix de l'équilibre, ou du mouvement; mais l'autre est celle dont je viens de parler, où sachant la formule, qui doit être un *maximum*, ou un *minimum*, la solution se fait par le moyen de la méthode *de Maximis & minimis*. La première fournit la solution en déterminant l'effet par les causes efficientes; or l'autre a en vue les causes finales, & en déduit l'effet: l'une & l'autre doit conduire à la même solution, & c'est cette harmonie, qui nous convainc

de

de la vérité de la solution, quoique chaque methode doive être fondée sur des principes indubitables. Mais il est souvent très difficile de découvrir la formule, qui doit être un *maximum*, ou *minimum*, & par laquelle la quantité d'action est représentée. C'est une recherche qui n'appartient pas tant à la Mathématique, qu'à la Métaphysique puisqu'il s'agit de connoître le but, que la nature se propose dans les opérations : & ce seroit porter cette science à son plus haut degré de perfection, si l'on étoit en état d'assigner pour chaque effet que la nature produit, cette quantité d'action, qui y est la plus petite, & qu'on pût la deduire des premiers principes de notre connoissance. Mais je crois que nous sommes encore bien éloignés de ce degré de perfection, & qu'il sera presque impossible d'y arriver, à moins que nous ne découvriions pour un grand nombre de cas differens les formules, qui y deviennent, ou des *maxima*, ou *minima*. Or sachant les solutions, que la methode directe nous fournit, il ne sera pas difficile de deviner des formules, qui étant supposées des *maxima*, ou *minima*, conduisent aux mêmes solutions. Par ce moyen nous connoîtrons *a posteriori* ces formules qui expriment la quantité d'action, & alors il ne sera plus si difficile d'en demontrer la vérité par les principes connus de la Métaphysique.

V. C'est dans cette vuë, que je me propose de développer quelques problêmes de Statique, qui roulent sur la courbe, qu'un fil parfaitement flexible doit former, étant sollicité par des forces quelconques. Je chercherai premièrement la solution de ces problêmes par la methode directe, c. à. d. par les loix connuës de l'équilibre ; ensuite je tacherai de découvrir les formules, qui dans ces courbes trouvées obtiennent, ou la plus grande, ou la plus petite valeur, & lesquelles par conséquent pourront être regardées comme les expressions de la quantité d'action, dont la valeur sera plus petite pour l courbe, qu'on aura trouvée par l'autre methode, qu'elle seroit, si le fil avoit pris tout autre courbure. J'ai choisi cette espece de problêmes, puisqu'on fait déjà, que dans le cas où le fil n'est sollicité que par la gravité, c'est la distance du centre de gravité du fil au centre de la terre, qui est un *minimum*. Or je rendrai ce problême plus
general,

général, en supposant que toutes les particules du fil soient sollicitées par des forces quelconques, qui soient dirigées, ou vers un point fixe, ou vers plusieurs, étant proportionnelles à des fonctions quelconques de ces distances: de plus on pourra supposer que, tant la direction que la quantité de ces forces, dépende de la courbure même, comme cela arrive dans la courbe des voiles, & d'autres semblables, où la direction des forces est toujours perpendiculaire à la courbe même: & dans ces cas j'ai remarqué qu'il est beaucoup plus difficile de deviner la formule qui y est un *maximum*, ou *minimum*; & partant cette considération contribuera d'autant plus à la connoissance des choses, que la nature dans ses opérations tache de ménager le plus qu'il est possible.

P R O B L E M E G É N É R A L.

VI. *Le fil parfaitement flexible AYM étant sollicité dans chacun de ses élémens par des forces quelconques, trouver la courbe AYM, à laquelle ce fil sera réduit.*

Fig. 1.

S O L U T I O N.

Rapportons la courbe AYM, qu'il faut chercher à l'axe CP, & nommons une abscisse quelconque $CP = x$, l'appliquée $PM = y$, & la longueur du fil, qui y répond $AYM = s$, de sorte que $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, puisque l'appliquée PM est supposée perpendiculaire à l'abscisse CP. Maintenant de quelque force que l'élément $Mm = ds$ soit sollicité, elle pourra être réduite à deux forces, dont l'une tirera selon la direction MQ parallèle à l'abscisse CP, l'autre selon la direction de l'appliquée MP. Soit donc la force $MQ = Qds$, & la force $MP = Pds$, puisque chacune n'agissant, que sur l'élément du fil $Mm = ds$ sera infiniment petite. Afin que le fil demeure en équilibre, puisqu'il est parfaitement flexible, il faut que les momens de toutes les forces, dont la partie antérieure du fil AYM est sollicitée, par rapport au point M, se détruisent mutuellement. Pour cet effet considérons une portion quelconque du fil AY, que nous regarderons comme variable, pendant que le point M demeure fixe, &



partant les quantités x & y constantes; supposition qui ne durera, que jusqu'à ce que nous aurons trouvé la somme de tous les momens des forces par rapport au point M. Soit donc notre nouvelle abscisse variable $CX = \phi$, l'appliquée $XY = \psi$, & la courbe $AY = \omega$, de sorte que $d\omega = \sqrt{d\phi^2 + d\psi^2}$; & soit des forces, dont l'élément $Yy = d\omega$ est sollicité, celle qui agit selon YZ parallèle à $CX = qd\omega$, & l'autre qui agit selon $YX = pd\omega$. Or le moment de celle-là YZ par rapport au point M fera $= qd\omega (PM - YX) = (y - \psi) qd\omega$, qui tendra à tourner le fil autour du point M, en sorte que l'angle AMQ soit diminué: & le moment de l'autre force $YX = pd\omega$ fera $= pd\omega (CP - CX) = (x - \phi) pd\omega$, dont l'effet sera contraire au précédent, & tendra à augmenter l'angle AMQ . Par conséquent le moment de ces deux forces prises ensemble fera $= (y - \psi) qd\omega - (x - \phi) pd\omega$, qui sera employé à tourner le fil autour de M dans le sens AQ . Donc le moment de toutes les forces qui agissent sur la portion du fil AY , fera l'intégrale de cette expression, & puisque x & y sont considérés comme constantes, ce moment qui résulte de la portion AY fera $= y \int q d\omega - \int \psi q d\omega - x \int p d\omega + \int \phi p d\omega$. Approchons maintenant le point Y jusqu'au point M pour avoir le moment, qui résulte de toutes les forces dont le fil AYM est sollicité, & alors les quantités ϕ , ψ , q , p & $d\omega$ deviendront égales à x , y , Q , P & ds de sorte que la somme de tous les momens des forces qui agissent sur le fil AYM , pour le tourner autour de M dans le sens AQ fera $= y \int Q ds - \int y Q ds, - x \int P ds + \int x P ds$. Or afin que le fil étant parfaitement flexible, ne soit pas renué, il faut que la somme de ces momens évanouisse, d'où nous obtiendrons cette équation, qui exprimera la nature de la courbe cherchée AYM

$$y \int Q ds - \int y Q ds - x \int P ds + \int x P ds = 0.$$

Cette équation deviendra plus simple, en prenant sa différentielle qui sera:

$$\therefore dy \int Q ds - dx \int P ds = 0.$$

où $\int Q ds$ exprime la somme de toutes les forces, dont le fil AM est sollicité suivant la direction de l'abscisse PC , & $\int P ds$ la somme de
toutes

toutes les forces, dont le fil AM est sollicité suivant la direction des appliquées PM. C. Q. F. T.

VII. Si le fil est arrêté au point A, ou tenu fixe par une force quelconque, on résoudra aussi celle-cy suivant les directions AB & AC. Soit la force AB = B, & la force AC = C; & celle-là doit être comprise dans $\int Q ds$, & celle-cy dans $\int P ds$. Donc, si ces expressions $\int Q ds$ & $\int P ds$, ne comprennent que les forces, qui agissent sur les élémens du fil, on y doit ajouter ces forces finies B & C, & au lieu de $\int Q ds$ nous aurons $B + \int Q ds$, & $C + \int P ds$ au lieu de $\int P ds$; ce qui donnera pour la courbe cette équation différentielle :

$$dy (B + \int Q ds) - dx (C + \int P ds) = 0.$$

dont l'intégrale sera exprimée par :

$$\int dy (B + \int Q ds) - \int dx (C + \int P ds) = \text{Const.}$$

Or puisque $\int dy (B + \int Q ds)$ exprime la somme des momens, qui résultent des forces selon la direction des abscisses, & $\int dx (C + \int P ds)$ la somme des momens, qui résultent des forces selon la direction des appliquées, comme ces momens se doivent détruire mutuellement, il est évident que la constante doit être = 0, pourvu que les intégrales s'étendent par tout le fil.

VIII. Cependant, puisque les intégrales $\int Q ds$ & $\int P ds$ peuvent déjà renfermer les constantes B & C, on les pourra omettre sans faute, de sorte que la nature de la courbe du fil sera exprimée, ou par cette équation intégrale $\int dy \int Q ds - \int dx \int P ds = \text{Const.}$ ou par cette équation différentielle $dy \int Q ds - dx \int P ds = 0$. Laquelle nous fournit cette analogie :

$$dy : dx = \int P ds : \int Q ds.$$

D'où nous tirons cette règle générale pour trouver la courbure d'un fil parfaitement flexible, étant sollicité par des forces quelconques. C'est qu'ayant tiré l'appliquée infiniment proche pm, & Mn parallèle à l'abscisse, il y aura toujours : le différentiel de l'appliquée mn au différentiel de l'abscisse Mn = Pp, comme la somme de toutes les forces, qui agissent dans la direction des appliquées, est à la somme de toutes les forces, qui agissent dans la direction des abscisses.

IX. Si le fil AYM n'est pas parfaitement flexible, mais qu'il soit élastique, ou qu'il ait quelque roideur qui résiste à l'inflexion, il ne sera pas difficile aussi dans ce cas de déterminer la courbe, que ce fil prendra, quoiqu'il soit outre cela sollicité par des forces quelconques, comme je viens de supposer. Car la force, ou plutôt le moment, qui est requis pour courber le fil au point M , sera proportionnel à la courbure dans ce point, ou réciproquement comme le rayon de la développée au point M . Supposant donc ce rayon $= r$, de sorte que $r = \frac{ds^3}{dx ddy}$, en supposant dx constant, ou $r = \frac{ds dx}{ddy}$ en supposant ds constant, la force de roideur sera comme $\frac{1}{r}$, si la roideur est partout égale. Or si l'épaisseur du fil est supposée variable, la force de roideur pourra être exprimée par $\frac{S}{r}$, ou S est une fonction proportionnelle à l'épaisseur du fil au point M . Cette force de roideur tendant à remettre le fil dans sa situation droite, que je suppose lui être naturelle, elle doit être contrebalancée par la somme des momens de toutes les forces dont le fil est sollicité. Or la somme de ces momens a été trouvée $= y \int Q ds - \int y Q ds - x \int P ds + \int x P ds$ ou bien $= \int dy \int Q ds - \int dx \int P ds$, dont la direction étant contraire à la force de roideur $\frac{S}{r}$, il faut que ces deux expressions soyent égales entr'elles. De là nous obtiendrons pour la courbe de ce fil roide, ou élastique, cette équation :

$$\frac{S}{r} = \int dy \int Q ds - \int dx \int P ds$$

qui se réduit à celle, que nous avons trouvée dans la solution du problème, si la roideur S évanouit.

X. En voicy donc la solution du problème le plus général, par laquelle on est en état de déterminer la courbe, que forme un fil, ou parfaitement flexible, ou élastique, dont tous les points sont sollicités

cités

cités par des forces quelconques. Mais je remarque d'abord, que cette solution générale ne se peut déduire par la methode *de maximis & minimis*: car quoique cette methode soit propre à fournir des solutions générales, il faut pourtant qu'on sache, desquelles des variables soyent composées les fonctions, qui entrent dans la formule qui doit être, ou un *maximum*, ou un *minimum*. Donc, à moins qu'on ne détermine la nature des fonctions P & Q, qui expriment les forces, dont chaque élément *Mm* du fil est sollicité, il est impossible de découvrir une formule, qui étant supposée un *maximum*, ou un *minimum*, produise la même courbe. Je m'en vais donc appliquer cette solution générale à des cas particuliers, en déterminant les fonctions P & Q, ou par les abscisses *x*, ou par les appliquées *y*, ou par une expression, qui contienne toutes les deux d'une maniere, dont la composition soit connuë. Pour cet effet je ferai l'application de la solution générale trouvée aux problemes suivants: & je tâcherai de joindre à la solution de chacun la formule, qui étant supposée un *maximum*, ou un *minimum*, conduite à la même courbe: afin qu'on en puisse connoitre pour chaque cas l'expression, qui représente la quantité d'action.

P R O B L E M E I.

XI. *Le fil parfaitement flexible AYM étant dans chaque point M sollicité selon la direction des appliquées MP par des forces, qui soient exprimées par une fonction quelconque de ces appliquées: trouver la courbe AYM que ce fil formera.*

S O L U T I O N.

Ayant nommé comme auparavant l'abscisse $CP = x$, l'appliquée $PM = y$, & l'arc $AYM = s$, soit *Y* la fonction de l'appliquée *y*, à laquelle la force dont le fil au point *M* est tiré suivant la direction *MP*, est supposée proportionnelle, de sorte que la force qui agit sur l'élément $Mm = ds$ soit $= Y ds$, laquelle ayant été supposée dans la solution générale $= P ds$, nous aurons $P = Y$ & $Q = 0$. Et partant puisque le fil est supposé parfaitement flexible, la nature de la

courbe sera exprimée par cette équation, $B dy - dx \int Y ds = 0$.
 Car quoique $Q = 0$, l'intégral $\int Q ds$ n'évanouira pas, mais il sera
 égale à une constante B, qui exprime la force A B appliquée au bout
 du fil A: or l'autre force A C = C sera renfermée dans l'expression
 intégrale $\int Y ds$. Pour réduire cette équation, & pour la ramener à
 la forme, qui se trouve dans la méthode de *maximis & minimis*, je
 suppose $dy = p dx$, pour avoir $ds = dx \sqrt{1 + pp}$, & l'équation
 trouvée se changera en cette forme $B p = \int Y dx \sqrt{1 + pp}$, dont
 le différentiel est $B dp = Y dx \sqrt{1 + pp}$, ou $B p dp = Y dy \sqrt{1 + pp}$
 à cause de $dx = \frac{dy}{p}$, d'où nous tirons $\frac{B p dp}{\sqrt{1 + pp}} = Y dy$,
 & prenant les intégrales $\int Y dy = B \sqrt{1 + pp}$, la constante qu'on
 pourroit ajouter, étant comprise dans l'intégrale $\int Y dy$: & cette é-
 quation $\int Y dy = B \sqrt{1 + pp}$ ayant ses deux variables p & y séparées,
 peut suffire pour la construction de la courbe, que nous cherchons.

XII. Pour trouver cette même courbe par la méthode de *Ma-
 ximis & Minimis*, il faut se rappeler cette solution générale, que
 j'ai donnée dans mon traité sur cette matière. Ayant posé l'abscisse
 $= x$, l'appliquée $= y$, & pour les différentiels $dy = p dx$; $dp = q dx$;
 $dq = r dx$ &c. Soit $\int Z dx$ la formule, dont la valeur doit être un *maxi-
 mum*, ou *minimum*, où Z marque une fonction quelconque des quantités
 x, y, p, q, r , &c. de sorte que son différentiel ait une telle forme:

$$dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr \text{ \&c.}$$

alors j'ai démontré, que la courbe, où $\int Z dx$ est un *maximum*, ou
minimum, sera exprimée par cette équation, supposant l'élément dx
 constant.

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{\&c.}$$

XIII. Comme cette équation est encore trop générale pour no-
 tre cas, soit Z seulement une fonction de y & p , de sorte que $dZ =$
 $N dy + P dp$, & la formule $\int Z dx$ fera un *maximum*, ou *minimum*, dans

la courbe exprimée par cette équation: $0 = N - \frac{dP}{dx}$ ou $N dx =$
 dP ,

dP , qui étant multipliée par p , à cause de $p dx = dy$, donne $N dy = p dP$. Or nous avons $dZ = N dy + P dp$, & partant il y aura $dZ = p dP + P dp$, dont l'intégrale est : $Z = Pp + \text{Const.}$ Nous voilà donc réduits à trouver une telle fonction Z de y & de p , que supposant $dZ = N dy + P dp$, l'équation $Z = Pp + \text{Const.}$ devienne la même, que nous avons trouvée, savoir $\int Y dy = B \sqrt{(1 + pp)}$, ou comme B sera égale à la constante de la première équation, que $Z - Pp$ devienne $= \frac{\int Y dy}{\sqrt{(1 + pp)}}$, ou $\int Y dy = (Z - Pp) \sqrt{(1 + pp)}$.

XIV. Pour refondre cette équation, ou pour en tirer la valeur de Z , puisque $P = \frac{Z}{p} - \frac{\int Y dy}{p \sqrt{(1 + pp)}}$, je remets cette valeur dans l'équation $dZ = N dy + P dp$, & j'aurai $dZ = N dy + \frac{Z dp}{p} - \frac{dp \int Y dy}{p \sqrt{(1 + pp)}}$, ou bien $\frac{p dZ - Z dp}{pp} = \frac{N dy}{p} - \frac{dp \int Y dy}{pp \sqrt{(1 + pp)}}$, où le premier membre étant intégrable, ayant pour intégrale $\frac{Z}{p}$, il faut que le second membre soit aussi intégrable.

Or son intégrale tirée de la partie $\frac{-dp \int Y dy}{pp \sqrt{(1 + pp)}}$ en supposant y constant est $= \frac{\int Y dy}{p} \sqrt{(1 + pp)} + \text{funct. } y$ & partant nous aurons $\frac{Z}{p} = \frac{\int Y dy}{p} \sqrt{(1 + pp)} + \text{funct. } y$: ou $Z = \int Y dy \sqrt{(1 + pp)} + p \text{ funct. } y$. Par conséquent la courbe du fil se trouvera, si l'on cherche parmi toutes les courbe celle, dans laquelle $\int Z dx$ c. à. d. $\int dx \sqrt{(1 + pp)} \cdot \int Y dy + \int p dx \cdot \text{funct. } y$, sera un *maximum*, ou un *minimum* ; & l'expression, qui représente la quantité d'action sera $\int ds \int Y dy + \int dy \text{ funct. } y$. Ou puisque $\int dy \text{ funct. } y$ est une fonction

ction de y , qui demeure la même pour toutes les courbes, qui passent par les mêmes points A & M, la courbure du fil AYM aura cette propriété, que parmi toutes les courbes qui passent par les points A & M, il y aura cette expression $\int ds \int Y dy$ un minimum: d'où je tire le Theoreme suivant.

T H E O R E M E I.

XV. *Le fil AYM, comme nous avons supposé dans le probleme précédent, étant dans chaque point M sollicité selon la direction des appliquees MP par des forces, qui sont exprimées par une fonction quelconque Y des appliquees PM = y, prendra une telle figure AYM, que parmi toutes les autres courbes possibles, il y aura cette expression $\int ds \int Y dy$ un minimum.*

On trouvera donc cette courbe, si on cherche parmi toutes les courbes, qui sont comprises entre les mêmes termes, celle où la valeur de cette expression $\int ds \int Y dy$ devient un *minimum*. Il n'est pas nécessaire, comme la nature de la question semble de demander, que cette propriété ne regarde que les courbes de la même longueur; car il revient au même, soit qu'on suppose la formule $\int ds \int Y dy$ parmi toutes les courbes possibles, ou seulement parmi les isoperimetres: Car pour ce dernier cas, on devroit, comme j'ai démontré dans mon traité sur cette matiere, rendre cette formule $\int ds \int Y dy + \alpha \int ds$ un *minimum*. Or cette constante α pouvant être comprise dans l'integral $\int Y dy$, on pourra negliger ce terme $\alpha \int ds$, & alors il ne reste à rendre un *minimum*, que la formule trouvée $\int ds \int Y dy$.

P R O B L E M E II.

XVI. *Le fil parfaitement flexible AYM étant sollicité dans chaque point M suivant les directions MP, MQ par des forces, dont celle-là, qui agit selon MP, soit exprimée par une fonction de l'appliquee MP = y, & celle-cy, qui agit selon MQ par une fonction de l'abscisse CP = x: trouver la figure du fil AYM.*

S O L U.

S O L U T I O N.

Retenant toujours les mêmes denominations $CP = x$, $PM = y$, l'arc $AYM = s$, soit Y la fonction de y , qui exprime la force, qui agit selon MP , & X la fonction de x , qui exprime la force MQ . Nous n'avons donc que mettre dans la solution générale, que X & Y au lieu de Q & P , pour avoir l'équation suivante, qui exprimera la nature de la courbe cherchée AYM

$$dy (B + \int X ds) - dx (C + \int Y ds) = 0$$

ou, puisque les constantes B & C peuvent être comprises dans les formules intégrales, nous aurons:

$$dy \int X ds = dx \int Y ds.$$

Supposons $dy = p dx$, pour avoir $ds = dx \sqrt{1+pp}$, & l'équation trouvée sera $p \int X dx \sqrt{1+pp} = \int Y dx \sqrt{1+pp}$ qui étant différentiée donne

$$dp \int X dx \sqrt{1+pp} + X p dx \sqrt{1+pp} = Y dx \sqrt{1+pp}$$

Soit de plus $dp = q dx$, & après avoir différentié cette équation :

$$\int X dx \sqrt{1+pp} + \frac{X p \sqrt{1+pp}}{q} = \frac{Y \sqrt{1+pp}}{q}$$

nous obtiendrons mettant partout $q dx$ au lieu de dp

$$X dx \sqrt{1+pp} + X dx \sqrt{1+pp} + \frac{X p p dx}{\sqrt{1+pp}} + \frac{p dX \sqrt{1+pp}}{q} = \frac{X p dq \sqrt{1+pp}}{q q}$$

$$= \frac{Y p dx}{\sqrt{1+pp}} + \frac{dY \sqrt{1+pp}}{q} - \frac{Y dq \sqrt{1+pp}}{q q} \text{ qui se réduit à}$$

$$2 X dx + \frac{X p p dx}{1+pp} + \frac{p dX}{q} - \frac{X p dq}{q q} = \frac{Y p dx}{1+pp} + \frac{dY}{q} - \frac{Y dq}{q q}$$

Multiplions cette équation par $1+pp$ pour avoir

$$\frac{(dY - p dX)(1+pp)}{q} - \frac{dq}{q q} (Y - pX)(1+pp) + Y p dx - 2 X dx (1+pp) - X p p dx = 0$$

& pour en trouver l'intégrale, s'il y en a, je suppose;

$$\frac{(Y - pX)(1+pp)}{q} = Z \text{ ce qui étant différentié donne}$$

$$\frac{(dY - p dX)(1+pp)}{q} - \frac{dq}{q q} (Y - pX)(1+pp) + 2 p dx (Y - pX) - X dx (1+pp) = dZ$$

ayant mis partout $dp = q dx$, Retranchons de cette équation la précédente, & il nous restera :

$dZ = Y p dx - 2 X p p dx + X dx (1 + p p) + X p p dx$
 ou bien $dZ = Y p dx + X dx$. Or puisque $dy = p dx$, nous aurons $dZ = X dx + Y dy$, laquelle expression, parceque X est fonction de x & Y fonction de y , sera integrable & donnera

$$Z = \int X dx + \int Y dy$$

de sorte que notre equation integrale cherchée sera

$$\frac{(Y - pX)(1 + p p)}{q} = \int X dx + \int Y dy$$

ou à cause de $q = \frac{dp}{dx}$ & $dy = p dx$:

$$\frac{dp}{1 + p p} = \frac{Y dx - X dy}{\int X dx + \int Y dy}$$

Il ne paroît pas que cette équation se puisse encore integrer ; aussi n'est ce pas mon dessein de construire ces courbes, ou d'en rechercher la nature : mon but n'étant ici, que de trouver les formules, qui étant supposées devenir un *maximum*, ou un *minimum*, fournissent les mêmes courbes que nous trouvons par les principes de mécanique.

XVII. Soit $\int Z dx$ cette formule, qui étant supposée un *maximum*, ou *minimum*, produise la courbe, que nous venons de trouver, ou l'équation :

$$\frac{dp}{1 + p p} = \frac{Y dx - X dy}{\int X dx + \int Y dy}$$

& soit $dZ = M dx + N dy + P dp$, voiant, que Z doit être une fonction des quantités x, y , & p . Et alors la courbe cherchée sera ex-

primée par cette équation : $0 = N - \frac{dP}{dx}$, ou $0 = N dx - dP$,

équation qui doit être la même, que $\frac{dp}{1 + p p} = \frac{Y dx - X dy}{\int X dx + \int Y dy}$.

Ici je remarque, que dans l'analyse il nous manque encore une methode, par laquelle on puisse decouvrir la formule $\int Z dx$, sachant l'équation, à laquelle elle doit conduire : mais après quelques essais on trouve-

ra, que l'on n'a qu'à mettre $Z = (\int X dx + \int Y dy) \sqrt{(1+pp)}$.
Car alors on aura $M = X \sqrt{(1+pp)}$; $N = Y \sqrt{(1+pp)}$

& $P = \frac{p(\int X dx + \int Y dy)}{V(1+pp)}$, d'où l'on tire

$$dP = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{(1+pp)V(1+pp)} + \frac{Xp dx + Yp dy}{V(1+pp)}$$

& partant l'équation $N dx = dP$ donnera

$$Y dx \sqrt{(1+pp)} = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{(1+pp)V(1+pp)} + \frac{Xp dx + Yp dy}{V(1+pp)}$$

qui étant multipliée par $\sqrt{(1+pp)}$ produira :

$$Y dx + Ypp dx - Xp dx - Yp dy = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{1+pp}$$

Or puisque $p dx = dy$, il sera $Ypp dx - Yp dy = 0$; & par consé-
quent on aura :

$$Y dx - X dy = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{1+pp} \text{ ou } \frac{dp}{1+pp} = \frac{Y dx - X dy}{\int X dx + \int Y dy}$$

qui est la même équation, que nous avons trouvée pour la courbure
du fil AFM .

THEOREME II.

XVIII. *Le fil AFM étant sollicité, comme on a supposé dans le pro-
bleme II. dans chaque point M par deux forces, l'une selon la direction des
abscisses MQ qui soit égale à une fonction X de l'abscisse CP = x; &
l'autre selon la direction des appliquées MP, qui soit égale à une fonction
Y de l'appliquée PM = y; alors ce fil prendra une telle figure AFM,
dans laquelle cette expression $\int ds (\int X dx + \int Y dy)$ sera un minimum.*

Le Theoreme precedent nous a déjà fait voir, que si le fil n'étoit
sollicité que par les forces Y, alors cette formule $\int ds \int Y dy$ seroit
un *minimum*: & par la même raison, si le fil étoit sollicité par les
seules forces X, alors cette formule $\int ds \int X dx$ deviendrait un *mi-
nimum*. A présent nous voyons, que si ces deux différentes forces
agissent ensemble, alors aussi la somme de ces deux formules $\int ds (\int X
dx + \int Y dy)$ y deviendra un *minimum*, ce qui sera à présent d'autant
plus aisé de démontrer *a priori*. Nous avons supposé les forces X &

F contraires aux accroissemens des coordonnées x & y ; car dès que le point M obéiroit à ces forces, tant l'abscisse x que l'appliquée y en deviendrait plus petite. D'où il est clair, que si ces forces avoient des directions opposées, alors la formule $- \int ds (\int X dx + \int Y dy)$ deviendrait un *minimum*, & partant celle-cy $+ \int ds (\int X dx + \int Y dy)$ un *maximum*: ce qui sert à faire voir l'étroite liaison entre les *maxima* & *minima*, de sorte qu'on n'a qu'à changer le signe, pour changer le *minimum* dans un *maximum*, & réciproquement.

P R O B L E M E III.

XIX. Si l'épaisseur du fil AM n'est pas la même partout, mais qu'elle varie selon une loi quelconque, & que ce fil soit sollicité en chaque point M suivant la direction MQ par une force exprimée par une fonction quelconque de l'abscisse $CP = x$, trouver la figure que ce fil prendra.

S O L U T I O N.

Soit X la fonction, à laquelle la force, qui tire l'élément Mm suivant MQ , est proportionnelle; & cette force X doit être regardée comme une force accélératrice, qui étant multipliée par la masse de l'élément Mm , donnera la véritable force motrice. Or le fil étant supposé d'une épaisseur inégale, la masse de l'élément Mm , n'e sera plus exprimée par ds , ni par conséquent la force par $X ds$. Soit donc $\int S ds$ la masse du fil entier AM dont la longueur $= s$, & la masse de l'élément Mm fera $= S ds$, où S marque une fonction quelconque de s , d'où dépend l'épaisseur du fil. Donc la force qui tire cet élément Mm , suivant la direction des abscisses MQ , fera $= X S ds$, qui étant mise pour $Q ds$ donnera pour la figure du fil cette équation :

$$C dx = dy \int X S ds.$$

Pofant $dy = p dx$ & $ds = dx \sqrt{1 + pp}$ cette équation se changera en $\frac{C}{p} = \int X S dx \sqrt{1 + pp}$, & par la différentiation en

$$-\frac{C dp}{pp \sqrt{1 + pp}} = X S dx, \text{ ou } \frac{C \sqrt{1 + pp}}{p} = \int X S dx.$$

Il s'en faut encore beaucoup, qu'on puisse connoître de cette équation

la courbe que nous cherchons, mais cette équation suffit pour notre dessein qui est de découvrir une formule, qui étant supposée un *minimum* produise la même équation

$$\frac{C \sqrt{(1+pp)}}{p} = \int X S dx.$$

XX. Il paroît d'abord fort probable, que pour avoir cette formule, nous n'avons qu'à écrire $S ds$, au lieu de ds , dans les formules, qui satisfont aux questions précédentes. Ainsi pour ce cas que nous venons de développer nous aurons cette formule $\int S ds \int X dx$, qui étant supposée un *minimum*, devoit produire l'équation pour la courbure du fil. Cette formule comparée à la générale $= \int Z dx$, à cause de $ds = dx \sqrt{(1+pp)}$ donnera $Z = S \sqrt{(1+pp)}$. $\int X dx$: qui étant une fonction renfermant non seulement les x, y , avec leurs différentiels, mais aussi l'arc s , il faut employer pour ce cas la règle qui suit.

Si Z est une fonction non seulement des variables x, y , & des quantités qui résultent de leurs différentiels, savoir $p = \frac{dy}{dx}$; $q =$

$$\frac{dp}{dx}; r = \frac{dq}{dx} \text{ \&c. mais aussi d'une formule intégrale } \int Z dx = \Pi,$$

de sorte que

$$dZ = L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr \text{ \&c.}$$

$$\text{ \& } dZ = \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr \text{ \&c.}$$

Alors entre toutes les courbes, qui ont $\int Z dx$ de la même grandeur, celle où il y aura $\int Z dx$ un *minimum* sera exprimée par cette équation.

$$0 = N - \mathfrak{N} \int L dx - \frac{1}{dx} d.(P - \mathfrak{P} \int L dx) + \frac{1}{dx^2} d d.(Q - \mathfrak{Q} \int L dx).$$

XXI. Dans le cas présent S étant une fonction de $s = \int dx \sqrt{(1+pp)}$, je ferai $\Pi = s$ & $Z = \sqrt{(1+pp)}$: & il sera $\mathfrak{M} = 0$,

$$\mathfrak{N} = 0, \text{ \& } \mathfrak{P} = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}; \text{ Ensuite supposant } dS = K ds,$$

nous aurons

$$dZ = K ds \sqrt{(1+pp)}. \int X dx + XS dx \sqrt{(1+pp)} + \frac{Sp dp}{V(1+pp)} \int X dx$$

& partant $L = K \sqrt{(1+pp)} \int X dx$; $M = XS \sqrt{(1+pp)}$; $N = 0$

& $P = \frac{Sp \int X dx}{V(1+pp)}$. De là l'équation cherchée sera :

$$0 = -\frac{1}{dx} d. \left(\frac{Sp \int X dx}{V(1+pp)} - \frac{p}{V(1+pp)} \int K dx \sqrt{(1+pp)}. \int X dx \right)$$

Or puisque $K dx \sqrt{(1+pp)} = K ds$, nous aurons $K dx \sqrt{(1+pp)} =$

$$dS \text{ \& notre équation sera } 0 = -\frac{1}{dx} d. \frac{p}{V(1+pp)} (S \int X dx - \int dS \int X dx)$$

& prenant intégrale :

$$C = \frac{p}{V(1+pp)} (S \int X dx - \int dS \int X dx).$$

Mais le différentiel de $S \int X dx - \int dS \int X dx$ étant $= XS dx$, nous

aurons $C = \frac{p}{V(1+pp)} \int XS dx$, ou bien $\frac{C V(1+pp)}{p}$

$= \int XS dx$, qui est la même équation, que la solution du problème nous a fournie, & par conséquent cette solution se trouve, si l'on cherche entre toutes les courbes isoperimètres, ou entre toutes les courbes, que le fil proposé pourroit former, celle, où il y aura cette formule $\int S ds \int X dx$ un *minimum* : & de là nous tirerons ce théorème encore plus général.

T H E O R E M E III.

XXII. *Le fil parfaitement flexible AYM, dont la longueur = s, & la masse = ∫ S ds, étant sollicité en chaque point M par deux forces accélératrices, suivant les directions MQ, MP, dont celle-là soit égale à une fonction X de l'abscisse CP = x, à laquelle la direction MQ est parallèle; or celle-ci, qui agit dans la direction de l'appliquée MP = y, soit égale à une fonction Y de y, de sorte que l'élément du fil Mm = ds, dont la masse = S ds, soit sollicité par la force motrice XS ds selon MQ & par la force motrice YS ds selon MP: la courbe, AYM, que le fil formera, aura cette propriété, que parmi toutes les autres*

autres courbes de la même longueur, il y aura cette formule $\int S ds (\int X dx + \int Y dy)$ UN MINIMUM.

Il n'est pas nécessaire de démontrer ce theoreme dans toute son étendue, car l'ayant démontré pour le cas, où l'élément Mm n'est sollicité que par une force $XS ds$, dans la direction MQ , la même démonstration servira aussi pour l'autre force $YS ds$, si elle agissoit toute seule, desorte que pour le premier cas on aura la formule $\int S ds \int X dx$, & pour l'autre celle-cy $\int S ds \int Y dy$, qui doit être un *minimum*. Or la solution du probleme second nous convaincra, que si les deux forces agissent ensemble, on n'aura qu'à ajouter ensemble les deux formules, qui appartiennent séparément à ces deux cas: cependant on pourra s'assurer tout à fait de cette verité, si l'on veut faire le calcul suivant les régles, dont nous nous sommes servi dans la solution du probleme II.

XXIII. Pour approfondir la nature de ces formules, il faut avoir egard à trois choses: *Imo.* à la quantité des forces acceleratrices, dont chaque élément du fil est sollicité, *II^{do.}* à la direction de ces forces & *III^{io.}* à l'épaisseur, ou à la masse du fil. La quantité de la force acceleratrice se trouve, si l'on divise la force motrice dont chaque élément du fil est sollicité, par la masse de ce même élément: la force acceleratrice sera donc une quantité finie exprimée par une fonction. Jusqu'ici nous avons supposé des fonctions, ou de l'abscisse x , ou de l'appliquée y , pour exprimer ces forces acceleratrices. Pour la direction de ces forces, nous l'avons supposée parallele à celle des coordonnées x ou y , dont la force même étoit une fonction: Ainsi la force exprimée par X , fonction de l'abscisse $CP = x$, agissoit dans la direction MQ parallele aux abscisses, & la force Y , fonction de l'appliquée $PM = y$, agissoit dans cette même direction MP . Dans ces cas pour trouver les formules, qui contiennent un *minimum*, ou ce qui revient au même, pour représenter la quantité d'action, il faut multiplier chaque force X & Y par l'élément de sa direction dx & dy , pour avoir $X dx$ & $Y dy$, & d'en prendre les intégrales $\int X dx$ & $\int Y dy$. A ces formules on donnera le signe $+$ si les forces X & Y sont contraires aux directions des quantités x & y , ou que leur action tend à diminuer ces quantités, comme la figure représente: or si une de ces

ces forces avoit une direction contraire, on donnera le signe — à la formule intégrale $\int X dx$ ou $\int Y dy$. Suivant cette règle par rapport aux signes, on ajoutera ensemble ces intégrales, s'il y en a plusieurs, & on multipliera la somme par la masse de l'élément du fil $S ds$. Alors l'intégrale de ce produit $\int S ds (\pm \int X dx \pm \int Y dy)$; sera la formule cherchée, dont la valeur est un *minimum* pour la courbe du fil.

XXIV. Cette règle, que nous venons de découvrir, demande, que la variable, dont la force est une fonction, & la force, ayent la même direction; & on se tromperoit, si l'on vouloit appliquer cette règle à des cas, où cette identité de directions n'a pas lieu. Pour la preuve de cela, supposons que le fil A Y M soit sollicité au point M suivant la direction de l'appliquée MP par une force, qui soit égale à une fonction de l'abscisse CP = x . Soit cette force = X , & supposant le fil par tout également épais, nous aurons pour sa courbure cette équation $B dy = dx \int X ds$, qui posant $dy = p dx$ se change en

$$B p = \int X dx \sqrt{1 + pp}, \text{ ou } \frac{B \cdot d p}{\sqrt{1 + pp}} = X dx, \text{ d'où l'on}$$

$$\text{tire } \int X dx = B \int \frac{d p}{\sqrt{1 + pp}}.$$

Or on verra bientôt, que cette courbe ne se trouve pas en faisant la formule $\int ds \int X dy$ un *minimum*, où la force acceleratrice X est multipliée par dy , le différentiel de la ligne MP, qui représente la direction de cette force, & l'intégral $\int X dx$ est y multiplié par l'élément du fil ds . Mais la courbe qu'on tire de cette formule $\int ds \int X dy$ suivant la méthode de *maximis & minimis* sera bien différente de celle, que nous venons de trouver savoir

$$\int X dx = B \int \frac{d p}{\sqrt{1 + pp}} = B l (p + \sqrt{1 + pp})$$

XXV. Voyons donc quelle sera pour ce cas la formule, qui étant supposée un *maximum*, ou *minimum*, conduite à cette même équation. Soit $\int Z dx$ cette formule, & $dZ = M dx + N dy + P dp$;

d'où on obtient en général cette équation $0 = N - \frac{d P}{d x}$
Or

Or puisque notre équation $\int X dx = B \int \frac{dp}{V(1+pp)}$ ne contient pas y , on voit que $N = 0$, & que l'équation pour la courbe sera $dP = 0$, ou $P = B$. Soit pour abrégé $\Pi = \int \frac{dp}{V(1+pp)}$, de sorte que Π est une fonction connue de p , & notre équation $\int X dx = B \Pi$, comparée à $P = B$, donnera $P = \frac{\int X dx}{\Pi}$, & partant $dZ = M dx + \frac{dp \int X dx}{\Pi}$; soit l'intégral $\int \frac{dp}{\Pi} = \Phi$, & nous aurons $Z = \Phi \int X dx$, & la formule dont la valeur est un *maximum*, ou *minimum*, dans la courbe du fil sera $\int \Phi dx \int X dx$, où Φ marque une fonction de p , qui renferme une double intégration savoir $\Phi = \int \frac{dp}{\int \frac{dp}{V(1+pp)}} = \int \frac{dp}{l(V(1+pp) \pm p)}$; formule si embarrassée qu'il semble presque impossible, qu'aucune théorie y sauroit jamais conduire à priori.

XXVI. Nous voyons donc, qu'il n'est pas permis de donner à la règle, que nous avons tirée des trois théorèmes précédens, une plus grande étendue, que pour les cas où, tant la quantité, que la direction des forces accélératrices sont déterminées par la même quantité variable, & quoique jusqu'ici nous ayons supposé ces variables parallèles entr'elles, pourtant la règle mentionnée aura aussi lieu, si les variables, dont les forces sont des fonctions, sortent d'un point fixe, pourvu que les forces agissent dans la direction de ces mêmes variables. La même règle ne souffrira non plus aucune exception, quand même le fil seroit sollicité en même tems vers plusieurs points fixes, par des forces accélératrices, qui fussent proportionnelles à des fonctions quelconques des distances à ces points. Comme cette circonstance contribuera considérablement à la perfection de la théorie, que nous avons en vue, je joindrai les problèmes suivans, où je considérerai des forces dirigées vers un, ou plusieurs points fixes, pour en tirer les

theoremes, qui contiennent les formules, dont la quantité d'action peut être représentée.

P R O B L E M E IV.

Fig. 2.

XXVII. *Le fil A M étant dans tous ses points M sollicité vers le point fixe C par une force, qui soit exprimée par une fonction quelconque de la distance M C: trouver la courbe C M, à laquelle le fil sera réduit.*

S O L U T I O N.

Que l'axe CP auquel nous rapporterons la courbe, passe par le point C, & y ayant tiré la perpendiculaire MP, soit $CP = x$, $PM = y$, & il fera $CM = \sqrt{xx + yy}$. Or soit $CM = \sqrt{xx + yy} = v$ & V la fonction de v, qui exprime la force acceleratrice, dont l'élément M m est tiré vers C. Décomposons cette force selon les directions MP, MQ paralleles aux coordonnées, & nous aurons la force selon MQ = $\frac{Vx}{v}$ & la force selon MP = $\frac{Vy}{v}$. Donc

dans la solution du problème général nous n'avons qu'à mettre $\frac{Vx}{v}$ au lieu de Q & $\frac{Vy}{v}$ au lieu de P, & l'équation pour la courbe cherchée A M fera

$$dy \int \frac{Vx ds}{v} - dx \int \frac{Vy ds}{v} = 0$$

où ds marque la masse de l'élément du fil Mm, que je supposerai ici de la même épaisseur par tout, de sorte que $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Mettons comme auparavant $dy = p dx$, pour avoir $p \int \frac{Vx dx \sqrt{1+pp}}{v} = \int \frac{Vy dx \sqrt{1+pp}}{v}$ dont le différentiel est:

$$dp \int \frac{Vx dx \sqrt{1+pp}}{v} + \frac{Vx p dx \sqrt{1+pp}}{v} = \frac{Vy dx \sqrt{1+pp}}{v}$$

Soit

Soit de plus $dp = q dx$, & pour $\frac{V}{v}$ écrivons U , pour avoir :

$$\int U x dx V(1 + pp) = \frac{U(y - px) V(1 + pp)}{q}$$

dont le différentiel est :

$$U x dx V(1 + pp) = \frac{dU(y - px) V(1 + pp)}{q} - U x dx V(1 + pp) + \frac{U(y - px) p dx}{V(1 + pp)} - \frac{U(y - px) dq V(1 + pp)}{q q}$$

qui se change en celle - cy

$$\frac{2 x q dx}{y - px} = \frac{dU}{U} + \frac{p q dx}{1 + pp} - \frac{dq}{q}$$

ou bien à cause de $q dx = dp$ en celle - cy

$$\frac{2 x dp}{y - px} = \frac{dU}{U} + \frac{p dp}{1 + pp} - \frac{dq}{q}$$

dont chaque membre est un différentiel logarithmique ; car $d(y - px)$

$$= -x dp, \text{ \& partant } \frac{2 x dp}{y - px} = \frac{-2 d(y - px)}{y - px}$$

Par conséquent l'intégrale de notre équation fera $lC - 2l(y - px) = lU + lV(1 + pp) - lq$, & remontant aux nombres :

$$\frac{C}{(y - px)^2} = \frac{U V(1 + pp)}{q} = \frac{U dx V(1 + pp)}{dp}$$

Donc $\frac{C dp}{(y - px)^2 V(1 + pp)} = U dx$. Or puisque U est fon-

ction de $v = \sqrt{xx + yy}$, & partant $v dv = x dx + y dy = dx(x + py)$ multiplions notre équation par $x + py$, pour avoir

$$\frac{C dp (x + py)}{(y - px)^2 V(1 + pp)} = U dx (x + py) = U v dv = V dv$$

à cause de $V = Uv$; où le membre $V dv$ est intégrable : or je ré-

marque que l'autre membre $\frac{C dp (x + py)}{(y - px)^2 V(1 + pp)}$ est également

integrable, ayant pour integrale $\frac{C V (1+pp)}{y-px}$. Car puisque d

$(y-px) = -x dp$ à cause de $dy = p dx$, il sera

$$d. \frac{C V (1+pp)}{y-px} = \frac{C p dx}{(y-px) V(1+pp)} + \frac{C x dp V(1+pp)}{(y-px)^2} = \frac{C dx (x+py)}{(y-px)^2 V(1+pp)}$$

Par conséquent nous aurons pour l'équation de la courbe cherchée:

$$\frac{C V (1+pp)}{y-px} = \int V dv.$$

XXVIII. Il y a encore un autre chemin de trouver l'integrale de l'équation différentielle, à laquelle nous sommes parvenus :

$$0 = \frac{dU(y-px)\sqrt{(1+pp)}}{q} - 2Ux dx \sqrt{(1+pp)} + \frac{U(y-px)p dx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{U(y-px)dq \sqrt{(1+pp)}}{q q}$$

Nous n'avons qu'à la multiplier par $\sqrt{(1+pp)}$, pour avoir

$$0 = \frac{dU(y-px)(1+pp)}{q} - 2Ux dx (1+pp) + U(y-px)p dx - \frac{U(y-px)dq(1+pp)}{q q}$$

de laquelle supposons que l'integrale soit :

$$C = Z + \frac{U(y-px)(1+pp)}{q}, \text{ qui étant différentiée donne}$$

$$0 = dZ + \frac{dU(y-px)(1+pp)}{q} - Ux dx (1+pp) + 2U(y-px)p dx - \frac{U(y-px)dq(1+pp)}{q q}$$

qui étant comparée à notre équation donnera :

$$dZ = -Ux dx (1+pp) - U(y-px)p dx = -U dx (x+py)$$

Il y aura donc $dZ = -U(x dx + y dy) = -U v dv$

& parceque $U v = V$, qui est fonction de v nous aurons $dZ = -V dv$ & $Z = -\int V dv$. Par conséquent notre équation intégrée pour la première fois sera

$$C = -\int V dv + \frac{U(y-px)(1+pp)}{q}$$

$$\text{ou bien } \frac{U}{\int V dv} = \frac{q}{(y-px)(1+pp)}.$$

Multiplions de part & d'autre par $v dv = dx(x+py)$ & nous aurons

$$U v dv$$

$$\frac{U v d v}{\int V d v} = \frac{q d x (x + p y)}{(y - p x)(1 + p p)}$$

Or puisque $U v = V$ & $q d x = d p$,

$$\frac{V d v}{\int V d v} = \frac{d p (x + p y)}{(y - p x)(1 + p p)} = \frac{x d p}{y - p x} + \frac{p d p}{1 + p p}$$

dont chaque membre est un différentiel logarithmique à cause de $x d p = -d(y - p x)$, & delà nous tirerons cette équation intégrale

$$l \int V d v = -l(y - p x) + l V(1 + p p) + l C$$

d'où remontant aux nombres nous obtiendrons

$$\int V d v = \frac{C V (1 + p p)}{y - p x}$$

qui est la même équation, que nous avons trouvée par la première méthode, après avoir fait deux intégrations. Mais qu'on remarque en particulier l'équation qui s'est trouvée ici par la première intégration

$$\int V d v = \frac{U(y - p x)(1 + p p)}{q} \text{ ou } \frac{q \int V d v}{1 + p p} = \frac{V(y - p x)}{v}$$

à laquelle conduira la méthode de *maximis & minimis*.

THEOREME IV.

XXIX. Le fil $A M$ étant dans tous ses points M sollicité vers le point fixe C par une force accélératrice V , qui soit une fonction quelconque de la distance $C M = v$, la courbure du fil se trouvera, si l'on cherche entre toutes les courbes possibles, celle où la valeur de cette expression $\int d s \int V d v$ est un minimum, ($d s$ marquant la masse de l'élément du fil $M m$.)

Fig. 2.

DEMONSTRATION.

Ayant fait $d y = p d x$, $d p = q d x$, la formule proposée $\int d s \int V d v$ se change en $\int d x \sqrt{1 + p p} \int V d v$, supposant le fil par tout de la même grosseur, où $\int V d v$ fera une fonction de v , & partant son

$$\text{différentiel} = V d v = \frac{V x d x + V y d y}{v} \text{ à cause de } v d v = x d x + y d y.$$

+ y dy. Donc si nous comparons cette formule avec les expressions générales $\int Z dx$ & $dZ = M dx + N dy + P dp$, nous aurons $Z = \int \sqrt{1+pp} \int V dv$

$$\& dZ = \frac{V x dx}{v} \sqrt{1+pp} + \frac{V y dy}{v} \sqrt{1+pp} + \frac{p dp \int V dv}{V(1+pp)}$$

$$\& \text{partant } M = \frac{V x}{v} \sqrt{1+pp}; N = \frac{V y}{v} \sqrt{1+pp} \& P = \frac{p \int V dv}{V(1+pp)}$$

Or la courbe, où $\int Z dx$ est un *minimum*, étant exprimée par cette équation $0 = N - \frac{dP}{dx}$ ou $N dx = dP$, nous aurons pour notre

cas :

$$\frac{V y dx \sqrt{1+pp}}{v} = \frac{V p dv}{V(1+pp)} + \frac{dp \int V dv}{(1+pp) V(1+pp)}$$

& multipliant par $v(1+pp)$

$$\frac{V y dx (1+pp) - V p v dv}{v} = \frac{dp \int V dv}{1+pp} = \frac{q dx \int V dv}{1+pp}$$

équation, qui à cause de $v dv = x dx + y dy = dx(x + py)$ se réduit à celle-cy

$$\frac{V dx (y - px)}{v} = \frac{q dx \int V dv}{1+pp} \text{ ou } \frac{V (y - px)}{v} = \frac{q \int V dv}{1+pp}$$

ce-qui est la même équation, que la solution du problème précédent nous a fournie,

PROBLEME V.

XXX. *Le fil parfaitement flexible A M étant dans tous ses points M sollicité en même tems vers plusieurs points fixes C, C', C'' &c. par des forces acceleratrices, qui soient exprimées par des fonctions quelconques des distances MC, MC', MC'', &c. trouver la courbe, à laquelle ce fil sera réduit.*

SOLUTION.

Ayant choisi deux directions fixes MQ, MP & perpendiculaires entr'elles, suivant lesquelles nous décomposerons chaque force, soient

Fig. 3.

soient les coordonnées pour chaque point avec les distances du point M à ces points C, C', C'' &c. nommées comme il suit :

C P = x ; P M = y ; C M = v , la force M C = V

C' P' = x' ; P' M = y' ; C' M = v' , la force M C' = V'

C'' P'' = x'' ; P'' M = y'' ; C'' M = v'' , la force M C'' = V''

& on aura :

$vv = xx + yy$; $v'v' = x'x' + y'y'$; $v''v'' = x''x'' + y''y''$

Or puisque les abscisses x, x', x'' &c. & les appliquées y, y', y'' &c. ne diffèrent entr'elles que de quantités constantes, leurs différentiels seront égaux, ou il sera $dx = dx' = dx''$ &c. & $dy = dy' = dy'' = \&c.$

Donc posant $dy = p dx$, & $dp = q dx$, les quantités p, q, seront les mêmes pour tous les différens points C, C', C'' &c. & l'élément du fil M m sera = $dx \sqrt{1 + pp}$.

Decomposons maintenant chaque force V, V', V'' &c. selon les directions MQ & MP, &

la force V	donnera	pour la direction MQ	la force = $\frac{V x}{v}$	pour la direction MB	la force = $\frac{V y}{v}$
la force V'	- -		la force = $\frac{V' x'}{v'}$		la force = $\frac{V' y'}{v'}$
la force V''	- -		la force = $\frac{V'' x''}{v''}$		la force = $\frac{V'' y''}{v''}$

Soit pour abreger $\frac{V}{v} = U$; $\frac{V'}{v'} = U'$, $\frac{V''}{v''} = U''$ &c.

& l'élément M m = ds = dx $\sqrt{1 + pp}$ sera en tout sollicité suivant MQ par la force = $Ux + U'x' + U''x''$

suivant MP par la force = $Uy + U'y' + U''y''$

Par conséquent mettant ces expressions pour Q & P, nous aurons pour la courbe du fil AM cette équation

$dy \int ds (Ux + U'x' + U''x'') = dx \int ds (Uy + U'y' + U''y'')$

qui posant $dy = p dx$, donnera par la différentiation :

$dp \int ds (Ux + U'x' + U''x'') + p ds (Ux + U'x' + U''x'') = ds (Uy + U'y' + U''y'')$

Ou

Ou mettant $dp = q dx$, & pour ds la valeur $dx \sqrt{(1 + pp)}$

$$\int dx (Ux + U' x' + U'' x'') \sqrt{(1 + pp)} = \frac{U (y - px) \sqrt{(1 + pp)}}{q} + \frac{U' (y' - px') \sqrt{(1 + pp)}}{q} + \frac{U'' (y'' - px'') \sqrt{(1 + pp)}}{q}$$

laquelle étant différentiée, comme dans la solution du probleme précédent, donnera :

$$0 = \frac{dU (y - px) \sqrt{(1 + pp)}}{q} - 2Ux dx \sqrt{(1 + pp)} + \frac{U (y - px) p dx}{\sqrt{(1 + pp)}} - \frac{U (y - px) dq \sqrt{(1 + pp)}}{qq}$$

$$+ \frac{dU' (y' - px') \sqrt{(1 + pp)}}{q} - 2U' x' dx \sqrt{(1 + pp)} + \frac{U' (y' - px') p dx}{\sqrt{(1 + pp)}} - \frac{U' (y' - px') dq \sqrt{(1 + pp)}}{qq}$$

$$+ \frac{dU'' (y'' - px'') \sqrt{(1 + pp)}}{q} - 2U'' x'' dx \sqrt{(1 + pp)} + \frac{U'' (y'' - px'') p dx}{\sqrt{(1 + pp)}} - \frac{U'' (y'' - px'') dq \sqrt{(1 + pp)}}{qq}$$

qui étant multipliée par $\sqrt{(1 + pp)}$, & intégrée comme dans le §. XXVIII. donnera :

$$C = - \int V dv + U (y - px) (1 + pp) : q$$

$$- \int V' dv' + U' (y' - px') (1 + pp) : q$$

$$- \int V'' dv'' + U'' (y'' - px'') (1 + pp) : q$$

Ou si nous tirons des centres de forces C, C', C'' des perpendiculaires sur la tangente de la courbe, & que nous nommions ces perpendiculaires u, u', u'' &c, nous aurons.

$$C = + \frac{V u dv}{du} - \int V dv$$

$$+ \frac{V' u' dv'}{du'} - \int V' dv'$$

$$+ \frac{V'' u'' dv''}{du''} - \int V'' dv''$$

Si nous multiplions par $\frac{q}{1 + pp}$ nous obtiendrons cette équation :



$$\frac{1}{1+pp} (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'') = \begin{cases} +U (y - px) \\ +U' (y' - px') \\ +U'' (y'' - px'') \end{cases} = \begin{cases} +V (y - px) : v \\ +V' (y' - px') : v' \\ +V'' (y'' - px'') : v'' \end{cases}$$

qui exprime la nature de la courbure du fil.

THEOREME V.

XXXI. *Le fil parfaitement flexible AM étant dans tous ses points M sollicité vers plusieurs points fixes C, C', C'' &c. par des forces accélératrices V, V', V'' &c. qui soient des fonctions quelconques des distances MC = v, MC' = v', MC'' = v'' &c. (c. à d. chacune de la distance qui lui répond), la courbe, que le fil formera aura cette propriété, que la valeur de cette formule $\int ds (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$ y sera un minimum, où ds marque la masse de l'élément du fil Mm.*

DEMONSTRATION.

Soit le fil partout de la même grosseur, desorte que ds, qui devoit marquer la masse de l'élément du fil Mm, signifie simplement sa longueur $dx \sqrt{1+pp}$, supposant $dy = p dx$. Car on reconnoitra aisément, que la démonstration sera la même, si au lieu de ds on mettoit dans la formule Sds, où S marqueroit une fonction quelconque de s. Cela remarqué, si nous y appliquons les formules générales $\int Z dx$ & $dZ = M dx + N dy + P dp$, nous aurons :

$$Z = (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'') \sqrt{1+pp}$$

& puisque :

$$dv = \frac{x dx + y dy}{v}; \quad dv' = \frac{x' dx + y' dy}{v'}; \quad dv'' = \frac{x'' dx + y'' dy}{v''}$$

nous aurons les valeurs suivantes :

$$M = \left(\frac{Vx}{v} + \frac{V'x'}{v'} + \frac{V''x''}{v''} \right) \sqrt{1+pp}$$

$$N = \left(\frac{V y}{v} + \frac{V' y'}{v'} + \frac{V'' y''}{v''} \right) V(1 + pp)$$

$$P = \frac{p}{V(1+pp)} (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$$

Or ces valeurs étant trouvées, nous savons que la courbe, où $\int Z dx$ est un *minimum*, sera exprimée par cette équation : $N dx = dP$: qui sera :

$$\left(\frac{V y}{v} + \frac{V' v'}{v'} + \frac{V'' y''}{v''} \right) dx V(1 + pp) =$$

$$\frac{p}{V(1+pp)} (Vdv + V'dv' + V''dv'') + \frac{dp}{(1+pp)V(1+pp)} (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$$

& multipliant par $V(1 + pp)$, nous obtiendrons en faisant $dp = q dx$; & en remettant pour dv, dv', dv'' leurs valeurs ; cette équation :

$$\frac{V(y - p x)}{v} + \frac{V'(y' - p x')}{v'} + \frac{V''(y'' - p x'')}{v''} =$$

$$\frac{1 + pp}{q} (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$$

laquelle étant la même, que la solution du problème précédent nous a fournie; la vérité du theoreme est manifeste. Si l'on vouloit entreprendre le calcul, on s'assureroit par une opération semblable, de la vérité du theoreme pour les cas où l'épaisseur du fil seroit supposée variable. Car alors on n'aura qu'à mettre $S ds$ pour ds , & pour S prendre une fonction quelconque de s , tout comme nous avons fait dans la solution du Probl. III.

XXXII. Nous voilà donc tout à fait éclaircis sur la maniere de déterminer la quantité d'action, lorsque les forces agissent, ou en des directions données, ou lorsqu'elles sont dirigées vers des points fixes, pourvuque que la quantité de chaque force soit exprimée par une fonction de la distance à son point fixe. Car le cas où les directions d'une force sont paralleles entr'elles, est compris dans l'autre, où la force est dirigée vers un point fixe, quand ce point s'éloigne
à l'in-

à l'infini. Or quoique dans ce cas, où la distance au point fixe devient infinie, il semble que la force ne puisse pas être exprimée par une fonction de cette distance, la règle donnée y trouve pourtant lieu, & ne demande aucune exception. Car soit z la distance infinie du lieu, où la force agit, au point fixe qu'on suppose éloigné à l'infini; on en pourra retrancher une ligne constante a pareillement infinie, desorte que $z - a$ devienne une ligne finie; & alors la quantité de la force doit être exprimée par une fonction de cette ligne finie $z - a$, pourqu'on puisse appliquer la règle trouvée: car il est clair, que la force étant une fonction de $z - a$, pourra être regardée comme une fonction de la distance même z , bien qu'elle soit infinie. Or dans ce cas $z - a$ marquera la distance du lieu, où la force agit, à une ligne droite, qui est perpendiculaire aux directions de la force, qui seront paralleles entr'elles. C'est donc la raison, pourquoi notre règle a pu être appliquée avec succes dans les cas, où la force, qui agissoit selon la direction de l'abscisse ou de l'appliquée, a été exprimée par une fonction de l'abscisse, ou de l'appliquée.

XXXIII. Cela remarqué, nous pourrons établir, que la règle, que nous venons de découvrir pour déterminer la *quantité d'action*, aura lieu toutes les fois, que les forces, dont le fil est sollicité, seront dirigées vers des points fixes, & que la quantité de chaque force sera exprimée par une fonction quelconque de la distance à ce point fixe, auquel cette force est dirigée. Or dans les cas où cette condition a lieu, quelque grand que soit le nombre des forces, qui agissent sur le fil parfaitement flexible, on trouvera la figure du fil, en cherchant celle, où la quantité d'action devient *un minimum*. Pour cet effet, il faut considerer chaque force separement: Soit dS l'élément de la masse du fil, sur lequel les forces agissent, & V une de ces forces acceleratrices dirigée vers un point fixe, dont la distance à l'élément du fil soit $= v$, desorte que V soit une fonction quelconque de cette distance v ; & alors qu'on prenne l'intégral $\int V dv$, auquel on donnera le signe $+$, si l'action de la force tend à diminuer la distance v , mais s'il arrive le contraire, le signe $-$. Ayant tiré selon cette règle pour chaque force la formule $\int V dv$, on recueillira tou-

tes ces formules avec leurs signes dans une somme, que je nommerai ΣW ; & alors la quantité d'action sera exprimée par cette formule $\int W dS$, qui étant supposée un *minimum*, donnera la figure du fil. En examinant cette expression de la quantité d'action, on la trouvera parfaitement d'accord avec celle que Monsieur de *Maupertuis* a publiée dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris pour l'An. 1740. & qu'il a tirée de principes, qui tiennent plutôt à la Métaphysique qu'à la Mécanique.

XXXIV. Quoique je n'aye appliqué cette règle, qu'aux fils parfaitement flexibles, on reconnoîtra aisément que cette manière de déterminer la quantité d'action doit être beaucoup plus générale, & qu'elle aura lieu dans tous les autres objets, sur lesquels les mêmes forces peuvent agir: car en effet, le cas, auquel Mr. de *Maupertuis* a appliqué cette règle est bien différent de celui cy, que j'ai considéré dans les problèmes précédens. Il n'y a donc aucun doute qu'on ne doive exprimer de la même manière la quantité d'action des forces semblables, qui agissent sur un fil roide, ou élastique: or dans ce cas, comme la courbure d'un tel fil ne dépend pas uniquement de ces forces, qui agissent sur chacun de ses élémens, mais outre cela aussi de sa roideur, ou de son élasticité; il faut ajouter à la quantité d'action qui résulte des forces, encore la quantité d'action qui convient à la roideur, ou élasticité même du fil, pour obtenir l'expression totale, qui sera un *minimum*. Mais il ne paroît pas si facile de déterminer suivant la même règle, que je viens de donner pour les forces, la quantité d'action, qui convient à l'élasticité; puisque l'action de l'élasticité semble tout à fait différente de celle des forces, que j'ai considérées jusqu'ici, tant par rapport à la direction qu'à la quantité de l'élasticité. Je tâcherai donc de découvrir à *posteriori* cette quantité d'action de l'élasticité, en cherchant l'expression, qui étant supposée un *minimum*, fournisse la même courbe, que les principes de la Mécanique donnent pour un fil élastique sollicité par des forces quelconques.

Fig. 1.

XXXV. Si le fil élastique AYM n'est sollicité qu'au bout A par deux forces constantes $AB = A$ & $AC = C$, la courbe à laquelle

quelle il sera réduit, sera exprimée par cette équation $\frac{S}{r} = By - Cx$, où r marque le rayon de la courbure au point M , & S signifie l'épaisseur du fil au point M ou l'élasticité absolue. De sorte que si le fil est partout également élastique, cette quantité S deviendra constante; soit donc $S = A$, & l'équation $\frac{A}{r} = By - Cx$ exprimera la nature de la courbe élastique ordinaire. Dans ce cas Mr. *Daniel Bernoulli* a remarqué que cette courbe se trouve, si l'on rend cette formule $\int \frac{ds}{rr}$ un *minimum*, où ds marque l'élément de la courbe Mm . De là il faut donc conclure que la quantité d'action de l'élasticité est proportionnelle à la formule $\int \frac{ds}{rr}$; mais il n'est pas encore clair, si elle se peut combiner avec les formules, qui représentent les quantités d'action des forces sollicitantes, ou en cas que cela soit permis, par quelle constante on doit multiplier cette formule $\int \frac{ds}{rr}$ pour qu'elle puisse être mite en parallèle avec les quantités d'action des forces, qui agiront sur le même fil. Pour nous assurer sur cet article, je m'en vais chercher par les principes de Mécanique la courbure d'un fil élastique, qui est en chaque point M sollicité selon la direction MQ parallèle aux abscisses $CP = x$, par des forces X qui soient des fonctions quelconques des abscisses. Et ensuite je tâcherai de découvrir la formule, dont la valeur soit la plus petite dans la courbe du fil que j'aurai trouvée.

P R O B L E M E VI.

XXXVI. *Le fil élastique AYM, dont l'épaisseur aussi bien que l'élasticité soit partout la même, étant dans tous ses points M sollicité suivant la direction MQ parallèle aux abscisses CP, par des forces ac-*

Z 3

cele-

Fig. 3.

celeratrices qui soient exprimées par une fonction quelconque de ces mêmes abscisses : trouver la courbe AYM, que ce fil prendra.

S O L U T I O N.

Soit l'abscisse $CP = x$, l'appliquée $PM = y$, l'élément du fil $Mm = ds$, la force accélératrice $MQ = X$, & partant la force motrice $= X ds$, puisque ds marquera en même tems la masse de l'élément du fil Mm . Soit ensuite le rayon de la courbure en $M = r$, qui supposant $dy = p dx$; $dp = q dx$, sera exprimé en sorte $r = \frac{(1 + pp) \sqrt{(1 + pp)}}{q}$; & $ds = dx \sqrt{(1 + pp)}$. Pour

l'effet de l'élasticité, nous avons vu cy-dessus, que son moment pour tourner le fil autour du point M , est $= \frac{A}{r}$, A marquant une quantité constante proportionnelle à la quantité absolue de l'élasticité. Cela posé, puisque dans l'équation générale donnée §. IX. il y aura $S = A$, $Q = X$, & $P = 0$, par conséquent $\int P ds$ constant $= C$, nous aurons pour la courbe du fil AYM cette équation $\frac{A}{r} = \int dy$

$\int X ds - Cx$: & prenant les différentiels: $A d. \frac{1}{r} = dy \int X ds$

$- C dx$ ou $\frac{A}{p} d. \frac{1}{r} = dx \int X ds - \frac{C dx}{p}$. Prenons en encore les différentiels en supposant dx constant, & nous aurons

$$A d. \left(\frac{1}{p} d. \frac{1}{r} \right) = X dx^2 \sqrt{(1 + pp)} + \frac{C dx dp}{pp}$$

puisque $ds = dx \sqrt{(1 + pp)}$ d'où nous; obtiendrons:

$$\frac{A}{\sqrt{(1 + pp)}} d. \left(\frac{1}{p} d. \frac{1}{r} \right) = X dx^2 + \frac{C dx dp}{pp \sqrt{(1 + pp)}}$$

Pour intégrer cette équation supposons $\frac{1}{p} d. \frac{1}{r} = R dx$ & à cause

cause de $d\left(\frac{1}{p} d. \frac{1}{r}\right) = dR dx$ nous aurons

$$\frac{A d R}{V(1+pp)} = X dx + \frac{C dp}{pp V(1+pp)}$$

dont l'intégral sera :

$$\frac{AR}{V(1+pp)} + A \int \frac{Rp dp}{(1+pp)V(1+pp)} = \int X dx - \frac{CV(1+pp)}{p}$$

Or puisque $dp = q dx$ & $R dx = \frac{1}{p} d. \frac{1}{r}$ il fera

$$\int \frac{Rp dp}{(1+pp)V(1+pp)} = \int \frac{q}{(1+pp)V(1+pp)} d. \frac{1}{r} = \int \frac{1}{r} d. \frac{1}{r} = \frac{1}{2rr}$$

parce que $\frac{(1+pp)V(1+pp)}{q} = r$. Par conséquent nous aurons :

$$\frac{A d(1:r)}{p dx V(1+pp)} + \frac{A}{2rr} = \int X dx - \frac{CV(1+pp)}{p}$$

Mais il y aura $\frac{A}{2rr} = \frac{Aqq}{2(1+pp)^3}$ & $d\frac{1}{r} =$

$$\frac{dp}{(1+pp)V(1+pp)} - \frac{3qp dp}{(1+pp)^2 V(1+pp)} = \frac{dq}{(1+pp)V(1+pp)} - \frac{3pqq dx}{(1+pp)^2 V(1+pp)}$$

de sorte que notre équation intégrée fera :

$$\frac{A dq}{p(1+pp)^2 dx} - \frac{3Aqq}{(1+pp)^3} + \frac{Aqq}{2(1+pp)^3} = \int X dx - \frac{CV(1+pp)}{p}$$

ou bien $\int X dx = \frac{CV(1+pp)}{p} + \frac{A dq}{p dx (1+pp)^2} - \frac{5Aqq}{2(1+pp)^3}$

Il n'est pas besoin, qu'on cherche à intégrer cette équation encore une fois ; car elle suffit pour rechercher la formule, qui par la méthode des plus grands & plus petits donne la même équation.



XXXVII. Pour découvrir la formule $\int Z dx$, qui étant supposée un *minimum* produise la même courbe, que nous venons de trouver, je commencerai par considérer séparément, tant les forces, dont le fil est sollicité, que son élasticité. Et d'abord si l'élasticité du fil évanouissoit, la formule qui représente la quantité d'action, seroit, comme nous avons vu, $\int ds \int X dx$: or si la force X évanouissoit, & que la courbe devint l'élastique commune, alors la formule qui représente la quantité d'action seroit $\int \frac{ds}{r}$. De là on pourra conclure, que joignant les forces X & l'élasticité ensemble, la formule, qui représentera la quantité d'action, aura une telle forme $\int ds \int X dx + E \int \frac{ds}{r}$ où $\int ds (\int X dx + \frac{E}{r})$, de sorte que la quantité

E évanouisse, si l'élasticité $\frac{A}{r}$ ou sa valeur absolue A devient ∞ , mais nous ne savons pas encore, si la quantité E est égale à A ou à quelque fonction de A. Je ferai donc la recherche de la courbe, où la valeur de cette expression générale $\int ds (\int X dx + \frac{E}{r})$ devient un *minimum*. Soit pour cet effet $dy = p dx$, $dp = q dx$, & il y aura $ds = dx \sqrt{1+pp}$, & $r = \frac{q}{(1+pp) \sqrt{1+pp}}$: d'où notre formule sera $\int dx (\int X dx + \frac{E q q}{(1+pp)^3}) \sqrt{1+pp}$.

XXXVIII. Celle-cy étant comparée à la formule générale $\int Z dx$, donnera $Z = (1+pp)^{\frac{1}{2}} \int X dx + \frac{E q q}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$ d'où l'on voit que Z sera une fonction des quantités x, p & q: & partant posant $dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq$, nous aurons:

$$M = X \sqrt{1+pp}; \quad N = 0; \quad P = \frac{p \int X dx}{\sqrt{1+pp}} - \frac{5 E p q q}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}} \quad \& Q$$

& $Q = \frac{2 E q}{(1+pp)^{\frac{1}{2}}}$. Or l'équation pour la courbe, où la valeur

de la formule $\int Z dx$ est un *minimum*, sera $0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$,

ou puisque $N=0$, celle-cy: $0 = -dP + \frac{ddQ}{dx}$, & prenant les in-

tégrales $D = P - \frac{dQ}{dx}$ ou $P dx - dQ = D dx$: ou bien $dQ - P dx$

+ $D dx = 0$, substituons pour P & Q leurs valeurs trouvées, & puis-

que $dQ = \frac{2 E dq}{(1+pp)^{\frac{1}{2}}} - \frac{10 E p q dp}{(1+pp)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2 E dq}{(1+pp)^{\frac{1}{2}}} -$

$\frac{10 E p q q dx}{(1+pp)^{\frac{1}{2}}}$ à cause de $dp = q dx$, nous trouverons:

$\frac{2 E dq}{(1+pp)^{\frac{1}{2}}} - \frac{10 E p q q dx}{(1+pp)^{\frac{1}{2}}} - \frac{p dx \int X dx}{V(1+pp)} + \frac{5 E p q q dx}{(1+pp)^{\frac{1}{2}}} + D dx = 0$

d'où nous tirons:

$\int X dx = \frac{D V(1+pp)}{p} + \frac{2 E dq}{p dx (1+pp)^2} - \frac{5 E q q}{(1+pp)^2}$

Or l'équation, que nous a fournie la solution du probleme étant

$\int X dx = \frac{C V(1+pp)}{p} + \frac{A dq}{p dx (1+pp)^2} - \frac{5 A q q}{2(1+pp)^3}$

nous voyons premièrement que la constante D , que l'integration a introduite est celle, qui dans la solution du probleme a été nommée $= C$: Ensuite il est evident que $2 E = A$, & partant $E = \frac{1}{2} A$, de sorte que nous connoissons à présent le coefficient de la formule

$\int \frac{d^2 s}{v^2}$ afin qu'elle puisse être ajoutée aux expressions, qui contien-

nent les quantités d'action résultantes des forces sollicitantes. Par conséquent pour le cas du probleme précédent la courbe, qui formera le fil elastique, se trouvera, si l'on cherche parmi toutes les

courbes possibles celle, où la valeur de cette expression $\int ds \int X dx + \frac{1}{2} A \int \frac{ds}{r}$ fera la plus petite : d'où nous tirons le theoreme suivant.

T H E O R E M E VI.

XXXIX. *Le fil elastique AYM, dont l'epaisseur aussi bien que l'elasticité soit partout la même, de sorte que la force de l'elasticité au point M, laquelle contrebalance la somme des momens de toutes les forces, qui agissent sur le fil, soit $= \frac{A}{r}$, où r marque le rayon de la courbure au point M; le fil étant sollicité dans tous ses points M suivant la direction MQ parallele aux abscisses CP = x, par des forces acceleratrices X, qui soient des fonctions quelconques de l'abscisse x, la courbe, que ce fil formera, sera trouvée si l'on cherche parmi toutes les courbes possibles celle où cette expression $\int ds (\int X dx + \frac{A}{2rr})$ sera un minimum, où ds marque la masse de l'élément du fil M m.*

Fig. 3.

On voit bien, si au lieu des forces X, dont les directions sont paralleles aux abscisses x, nous eussions supposé, que les élémens du fil M m fussent sollicités vers plusieurs points fixes C, C', C'' &c. par des forces acceleratrices V, V', V'' &c. qui soient des fonctions quelconques des distances CM = v, C' M = v', C'' M = v'' &c. pendant que l'élasticité $\frac{A}{r}$ demeurât la même, dans ce cas plus général, dis-je la courbure du fil se trouvera en faisant un *minimum* cette formule :

$$\int ds (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c. + \frac{A}{2rr})$$

Et même si le fil n'étoit pas de la même grosseur par tout, mais que la masse de l'élément M m fut = S ds on n'auroit qu'à écrire S ds au lieu de ds, dans cette formule ; pourvû que nonobstant cette variabilité de l'épaisseur du fil, l'élasticité absolue A ne changeât point : car d'ailleurs la quantité A deviendroit variable.

XL. Delà

XL. De là il semble que la quantité d'action de l'élasticité se détermine d'une façon tout à fait différente, de celle, qui sert pour les vraies forces sollicitantes, vu qu'il n'y a pas de ressemblance entre les formules $\int V dv$ & $\frac{A}{2 r r}$. Cependant le coefficient $\frac{1}{2}$ me fait conjecturer, que cette quantité $\frac{A}{2 r r}$ pourroit être originairement une formule intégrale, comme $\int \frac{A}{r} d \frac{1}{r}$, forme qui approche déjà fort de celle $\int V dv$. De plus on voit très clairement que $\frac{A}{r}$ répond à V , car comme V signifie la quantité de la force dont l'élément Mm est sollicité dans la direction MC , ainsi $\frac{A}{r}$ marque la quantité de la force de l'élasticité au point M . Mais il n'est pas encore clair, comme le différentiel de $\frac{1}{r}$ puisse répondre à dv : neantmoins l'analogie paroitra, dès qu'on fera ces réflexions. Le différentiel dv pris négativement marque l'espace par lequel le point M seroit transporté, s'il obéissoit tant soit peu à la sollicitation de la force V : voyons donc si le différentiel $d \frac{1}{r}$ pourra signifier le même effet par rapport à l'élasticité.

La force de l'élasticité $\frac{A}{r}$ tend à remettre le fil selon une ligne droite, ou à en diminuer la courbure. Soit donc O le centre de la courbure de l'élément $Mm = ds$, qui de la situation droite $m\mu$ diffère de l'angle $Mm\mu = MOm$; soit cet angle $MOm = d\phi$, & puisque $MO = mO = r$, il sera $d\phi = \frac{ds}{r}$; Or la courbure de l'élément $Mm = ds$ se mesure par l'angle $MOm = d\phi$, & absolument sans avoir égard à la quantité de l'élément $Mm = ds$ cette mesure sera $\frac{1}{r}$.

Fig. 4.



$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{1}{r}$. Donc pour peu que l'élasticité produise un effet, cette quantité $\frac{1}{r}$ en sera diminuée ; & partant il est clair, que le dif-

ferentiel de cette quantité $\frac{1}{r}$ pris négativement, représente le chemin, que la force de l'élasticité fait décrire à l'élément Mm , dès qu'elle produit quelque effet : d'où l'on voit clairement, que ce que le différentiel dv marque par rapport à la force V , revient au même, que le différentiel de $\frac{1}{r}$ ou $d \cdot \frac{1}{r}$ signifie par rapport à la force de l'élasticité $\frac{A}{r}$: & comme V est une fonction de v , de même la force de l'élasticité $\frac{A}{r}$ est une fonction de la quantité $\frac{1}{r}$, dont le différentiel représente l'action instantanée. De là on pourra tirer cette règle pour trouver la quantité d'action de la force de l'élasticité : Soit T la force de l'élasticité, que nous avons supposée $= \frac{A}{r}$, & que T soit une fonction

quelconque de r ou de $\frac{1}{r}$: qu'on multiplie cette force T par le dif-

férentiel de $\frac{1}{r}$ ou par $d \cdot \frac{1}{r}$, supposant $t = \frac{1}{r}$ pour trouver l'intégrale $\int T dt$, qui étant multipliée par la masse de l'élément Mm , qui soit ds ou $S \cdot ds$, l'intégrale du produit $\int ds \int T dt$ donnera la quantité d'action de la force de l'élasticité. Où il est évident, que cette règle est précisément la même, que celle que nous avons trouvée pour les autres forces, dont le fil puisse être sollicité. Par conséquent la règle, que Mons. de Maupertuis a donnée dans les Mem. de l'Acad. de Paris est beaucoup plus générale, qu'on pourroit penser, puisqu'elle s'étend non seulement à toutes sortes de forces, qui sont dirigées vers des centres fixes, mais aussi aux forces d'élasticité ; & il n'y a aucun doute, qu'elle ne soit encore plus générale.

REFLE-