



1750

Sur la diminution de la résistance du frottement

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

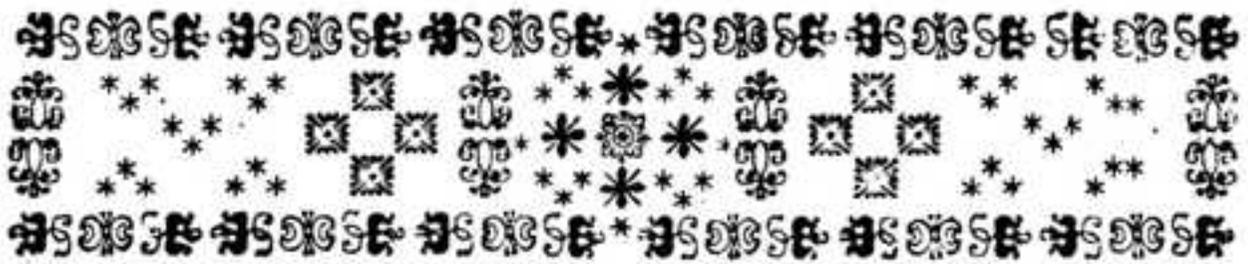
Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Sur la diminution de la résistance du frottement" (1750). *Euler Archive - All Works*. 144.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/144>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



SUR LA DIMINUTION
DE LA RESISTENCE DU FROTTEMENT,
PAR M. EULER.



I.

Experience nous ayant fait voir que la force du frottement est toujours égale à une certaine partie de la pression, dont un corps est pressé contre la surface, sur laquelle il se meut, de sorte que le frottement ne dépend ni de la grandeur de la base, dont le corps touche la surface, ni du degré de vitesse, il n'est pas difficile de déterminer l'effet du frottement dans toutes sortes de Machines par le moyen du calcul: vu que le frottement doit être regardé comme une force constante, qui est toujours directement contraire à la direction du mouvement, & qui agit dans une direction, qui passe par le plan de l'attouchement des corps qui se meuvent l'un sur l'autre. Je me bornerai dans cette piece à rechercher l'effet du frottement dans les Machines, dont le mouvement est rotatoire, ou qui se fait autour d'un ou plusieurs axes, & je ferai voir, combien la résistance du frottement peut être diminuée par la diminution des axes, & leur mouvement sur des roulettes: moyens, dont on s'est servi depuis quelque tems avec bien du succès pour perfectionner les machines de cette espece. Il semblera d'abord étrange, que la résistance du frottement, étant toujours égale à une partie déterminée de la pression, puisse être diminuée sans diminuer la pression, mais on en reconnoitra bientôt la possibilité, lorsqu'on aura égard à la nature du mouvement

toire, par lequel le *momentum* de la force du frottement, duquel dépend la résistance, peut- être diminué autant qu'on voudra.

Fig. 1.

II. Je commencerai par considérer la rouë AIK, par laquelle passe le cylindre BLM, qui lui tient lieu d'axe, lequel est soutenu dans la cavité immobile EBF, de sorte que cette rouë ne fauroit tourner autour de son centre C, sans que l'axe BLM ne se frotte sur la surface EBF. La force de ce frottement sera donc égale à une certaine partie de la pression, dont la machine s'appuye sur la surface EBF, & cette pression sera égale au poids de la rouë avec son axe, parce que tout ce poids est soutenu par l'appuy EFGH, que la figure ne représente que d'un coté; mais quoiqu'il se trouve de l'autre coté un semblable appuy, où le frottement est le même, il sera permis de considérer ensemble ces deux frottements comme joints dans le point B. Soit donc le poids de la rouë avec son axe = P, qui étant égal à la pression totale sur l'appuy en B, si nous supposons le frottement à la pression comme μ à 1, le frottement en B sera = μP , ou la machine ne pourra être mise en mouvement, sans qu'on surmonte une force appliquée en B = μP , & dont la direction sera suivant la tangente BQ contraire au mouvement du point P, qu'on veut produire. Soit AP la force, qui soit = F, appliquée à l'extrémité de la rouë A suivant la tangente AP, que je suppose horizontale, afin que par l'action de cette force la pression de la rouë sur l'appuy EF ne soit, ni augmentée, ni diminuée; & il est clair pour que la machine puisse être mise en mouvement, que le *moment* de la force F. AC doit surpasser le *moment* du frottement $\mu P. BC$ où il faut qu'il soit $F. AC > \mu P. BC$.

BC, ou $F > \mu P. \frac{BC}{AC}$.

III. De là il est clair, que tant que la force AP = F sera plus petite que $\mu P. \frac{BC}{AC}$, elle ne sera pas capable de remuër la machine,

& s'il y a $F = \mu P. \frac{BC}{AC}$, la force du frottement sera tout à fait contrebalancée par la force F, de sorte que pour peu qu'on l'augmente, la ma-

la machine soit mise en mouvement. Donc, pour vaincre le frottement dans ce cas proposé, il faut une force $F = \mu P \cdot \frac{BC}{AC}$, qui soit appliquée à la rouë AIK dans une direction horizontale AP, & en même tems perpendiculaire au rayon CA. Si la valeur du coefficient μ est $= \frac{1}{4}$, comme on peut supposer probablement, on trouvera cette force requise pour vaincre le frottement par cette analogie; Comme le rayon AC de la rouë est au rayon de l'axe CB, ainsi sera la quatrième partie du poids de la rouë, à la force cherchée. Donc quoique le frottement soit toujours égal à une partie déterminée de la pression, il est pourtant possible, qu'il puisse être vaincu par une force aussi petite qu'on voudra: car on voit que plus on diminue l'épaisseur de l'axe, ou son rayon BC, plus petite deviendra aussi la force requise pour vaincre le frottement. Par là on comprendra aisément combien il est important dans toutes fortes de machines de rendre les axes, autour desquels se fait le mouvement, aussi minces qu'il sera possible. Car dès qu'on pourroit réduire l'épaisseur des axes à la moitié, on gagneroit déjà la moitié de force, dont on avoit besoin auparavant pour vaincre le frottement. Il est bien vrai que cette diminution n'est pas dans notre pouvoir, & qu'il faut régler l'épaisseur des axes sur la charge, qu'ils doivent porter; mais il semble pourtant qu'on pourroit encore considérablement gagner de ce côté-cy, dans la plupart des machines, où le frottement se réduit dans le mouvement des axes.

IV. Mais il faut bien remarquer, que la force AP, quoique je l'aye supposée horizontale, altère néanmoins la quantité du frottement, en changeant la pression de l'axe sur le soutien ou l'appuy EBF. Car par l'action de la force AP le point d'appuy sera transporté de B vers E & la pression deviendra égale à la force qui résulte de la composition du poids de la rouë & de la force AP, quoique ce changement ne soit pas pour la plupart considérable. Cependant pour mieux développer la manière, dont la force mouvante entre à changer le frottement, je considérerai le cas où la force MP = F agit sous une obliqui-

obliquité quelconque. Pour cet effet soit ACB la ligne verticale, qui passe par le centre C de la rouë & de son axe, qui est soutenu par l'appuy immobile EF qui reçoit parfaitement une portion de l'axe. Soit CM le rayon auquel est appliquée la force $MP = F$ à angle droit CMP ; & que P exprime le poids de la rouë avec l'axe. Pour trouver la force, qui résulte de la composition de ces deux forces F , & P ensemble, je les considère d'une & l'autre appliquées en C comme au centre du mouvement, & ayant tiré CK perpendiculaire à CM soit $CB : CK = P : F$; & la diagonale CL du parallélogramme $CBLK$ exprimera la force, dont la rouë sera sollicitée & apprimée contre le soutien au point N . Qu'on nomme l'angle $ACM = \phi$, & on trouvera la force $CL = \sqrt{PP + FF + 2PF \sin \phi}$; & pour l'obliquité de cette force ou l'angle BCN , on fera: comme CL est au sinus de l'angle CBL ou au cosinus de ϕ , ainsi BL ou CK au sinus

$$\begin{aligned} \text{de l'angle } BCN, \text{ d'où l'on tirera } \sin BCN &= \frac{BL \cos \phi}{CL} \\ &= \frac{F \cos \phi}{\sqrt{PP + FF + 2PF \sin \phi}}, \text{ \& ensuite la tangente de} \\ \text{l'angle } BCN \text{ sera } &= \frac{F \cos \phi}{P + F \sin \phi}. \end{aligned}$$

V. Ces formules donneront lieu à plusieurs réflexions: je commencerai par la recherche, de quelle grandeur doit être la force $MP = F$, afin qu'elle puisse contrebalancer le frottement. Puisque le *moment* de cette force est $= F \cdot CM = F \cdot CA$ & celui du frottement $= \mu \cdot CB \cdot \sqrt{PP + FF + 2PF \sin \phi}$, parce que le frottement même au point N est à la pression qui vient d'être trouvée $= \sqrt{PP + FF + 2PF \sin \phi}$, comme μ à 1, la machine ne sauroit être mise en mouvement, à moins qu'il ne soit $F \cdot CA > \mu \cdot CB \cdot \sqrt{PP + FF + 2PF \sin \phi}$. Donc le frottement sera contrebalancé, si ces deux *moments* seront égaux entr'eux. Soit $CA = a$, & $CB = b$, & prenant les carrés nous aurons $aa FF = \mu\mu bb PP + \mu\mu bb FF + 2\mu\mu bb PF \sin \phi$, d'où nous tirerons :

$$F =$$



$$F = \frac{\mu b P (\mu b \sin \Phi \pm \sqrt{aa - \mu \mu b b \cdot \cos^2 \Phi})}{aa - \mu \mu b b}$$

Ici l'ambiguïté du signe radical ne peut avoir lieu, qu'entant que la valeur de F devient affirmative: car, puisque nous avons supposé que le mouvement se fait dans le sens NB , & que la direction de la force du frottement est NQ , cette supposition ne peut avoir lieu, que lorsque la valeur de F est affirmative. Au reste on voit bien, que cette ambiguïté résulte du signe radical dans l'équation primitive, $aF = \mu b \sqrt{PP + FF + 2PF \sin \Phi}$, qui malgré sa nature ne reçoit dans notre cas, que le signe $+$. Car le mouvement de la machine, dès qu'elle en aura, sera accéléré par le moment $aF - \mu b \sqrt{PP + FF + PF \sin \Phi}$, où l'on comprend aisément, que le dernier membre ne peut jamais devenir affirmatif, puisque le frottement ne sauroit jamais augmenter l'effet de la force sollicitante, mais il lui est plutôt toujours contraire. Par conséquent, toutes les fois qu'on aura quelque doute sur l'ambiguïté de la valeur de F , on n'aura qu'à l'introduire dans la formule $aF - \mu b \sqrt{PP + FF + 2PF \sin \Phi}$ pour voir si elle devient égale à zéro.

VI. Pour rendre cette formule plus simple soit $\frac{a}{\mu b} = \frac{AC}{\mu BC} = n$, de sorte que dans l'hypothèse $\mu = \frac{1}{4}$ on ait $n = \frac{4AC}{BC}$, & alors la force $MP = F$ requise pour vaincre le frottement sera $F = \frac{\sin \Phi \pm \sqrt{nn - \cos^2 \Phi}}{nn - 1} P$, valeur qui résulte de l'équation: $nF - \sqrt{P^2 + F^2 + 2PF \sin \Phi} = 0$, d'où nous aurons pour le point d'appuy N , $\sin BCN = \frac{\cos \Phi}{n}$. Le cas le plus ordinaire est quand le rayon de la rouë AC est plus grand que le rayon de l'axe PC , & dans ce cas la valeur de la lettre n , étant plus grande que 4. & à plus forte raison celle de nn plus grande que 16, il y aura à peu près $\sqrt{nn - \cos^2 \Phi}$

$\cos \varphi^2) = n - \frac{\cos \varphi^2}{2n}$, d'où l'on voit que dans ce cas ce n'est que le signe + qui puisse avoir lieu: donc nous aurons $F = \frac{n + \sin \varphi - \frac{1}{2n} \cos \varphi^2}{nn - 1} P$. De là il suit que si l'angle $ACM = \varphi$

devient 0° ou 180° , on aura la force requise pour vaincre la résistance du frottement $F = \frac{n - \frac{1}{2n}}{nn - 1} P$ ou $F = (\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^3}) P$, & pour le

point d'appuy N, $\sin BCN = \pm \frac{1}{n}$ de sorte que cet angle sera très petit. 2^o Si l'angle $ACM = \varphi = 90^\circ$, nous aurons la force $F = \frac{n + 1}{nn - 1} P = \frac{1}{n - 1} P = (\frac{1}{n} + \frac{1}{nn} + \frac{1}{n^3}) P$, & dans ce cas la force requise à vaincre le frottement sera la plus grande, puisque toute la force est employée à augmenter la pression, & dans ce cas le point d'appuy sera au point B. 3^o Si l'angle $ACM = \varphi = -90^\circ$, ou que la force tire de l'autre côté en haut, on aura $F = \frac{n - 1}{nn - 1} P = \frac{1}{n + 1} P$

$P = (\frac{1}{n} - \frac{1}{nn} + \frac{1}{n^3}) P$, & dans ce cas la force requise à vaincre le frottement sera la plus petite. De là on voit qu'on gagnera toujours, si l'on applique les forces pour tourner les roues, en sorte qu'elles soient dirigées en haut comme mp , & cet avantage sera d'autant plus grand, plus l'axe de la roue sera épais.

VII. Le cas que nous venons de considérer aura lieu, quand même le rayon de l'axe BC deviendra égal à l'axe de la roue AC, ou qu'il

le surpasse, pourvûque la valeur de $n = \frac{4 AC}{BC}$, ou plutôt de son carré

quarré, soit encore considérablement plus grande que l'unité. Mais si nous supposons que le rayon de l'axe BC surpasse tant l'axe de la rouë CA, que la valeur de $n = \frac{4 AC}{BC}$ n'excede l'unité que fort peu,

les phénomènes qui en résultent, doivent être développés séparément. Car quoique ce cas ne trouve presque jamais lieu dans les machines, il merite pourtant toute l'attention, à cause des propriétés assez étranges, qui serviroient à mieux connoître les effets du frottement. Soit donc le rayon de l'axe CB, qui doit tourner dans la cavité de l'appuy EF, presque 4 fois plus grand que le rayon de la rouë CM, auquel est appliquée la force $MP = F$, de sorte que la valeur de $nn - 1$ soit très petite; ou supposant $n = 1 + \alpha$, que α soit une fraction très petite, & nous aurons pour vaincre le frottement $F = \frac{\sin \phi + \sqrt{(\sin \phi^2 + 2\alpha + \alpha\alpha)}}{2\alpha + \alpha\alpha} P$, où il n'y a encore que le

signe + qui puisse avoir lieu, & pour le point d'appui N, nous aurons $\sin BCN = \frac{\cos \phi}{1 + \alpha}$.

1^{mo} Soit l'angle $ACM = \phi = 0$ ou 180° , & nous aurons $F = \frac{P}{\sqrt{2\alpha + \alpha\alpha}}$, & partant la force requise pour vaincre la résistance du frottement, doit être extrêmement grande, & l'angle BCN deviendra presque droit, de sorte que dans ce cas la cavité du soutien EF doit embrasser presque la moitié de l'axe.

2^{de} Si l'angle $ACM = \phi = 90^\circ$, nous aurons $F = \frac{2 + \alpha}{2\alpha + \alpha\alpha} P = \frac{P}{\alpha}$ & partant dans ce cas la force requise à vaincre le frottement, doit être encore plus grande.

3^o Si l'angle $ACM = \phi = -90^\circ$, il y aura $F = \frac{\alpha}{2\alpha + \alpha\alpha} P =$

$P = \frac{P}{2 + \alpha}$, & dans ce cas il ne faudra pour vaincre le frottement qu'une force qui vaudra environ la moitié du poids de la machine P , & dans ces deux derniers cas le point d'appuy sera au point B.

VIII. De là il est clair, que si $\alpha = 0$, ou que le rayon de la rouë CA soit exactement au rayon de l'axe CB , comme la force du frottement est à la pression, ou que dans l'hypothèse $\mu = \frac{1}{4}$ il soit $CB = 4 CA$: la force requise pour vaincre la résistance du frottement deviendra infiniment grande, toutes les fois que la force MP est horizontale, ou dirigée en bas, comme la figure représente. Et partant dans ces cas il ne sera pas même possible de remuer la machine, quelque force qu'on y emploie. Mais si l'on applique la force mp de l'autre coté, de sorte qu'elle soit dirigée en haut, puisqu'elle diminuera la pression de l'axe contre l'appuy, une force finie deviendra suffisante à surmonter la résistance du frottement. Pour cet effet nommant l'angle négatif $\angle C m = \phi$, nous aurons la force $mp = F = \frac{V (\sin \phi^2 + 2 \alpha + \alpha \alpha) - \sin \phi}{2 \alpha + \alpha \alpha} P$, dont la valeur supposant $\alpha =$

0 , sera $F = \frac{P}{2 \sin \phi}$: ou la force requise $mp = F$ sera à la moitié du poids de la machine ($\frac{1}{2} P$), comme le sinus total est au sinus de l'angle $\angle C m$. Par conséquent la plus petite force capable de vaincre la résistance du frottement dans ce cas, sera égale à la moitié du poids de la machine, & cette force doit être tellement appliquée à la rouë, qu'elle tire directement en haut. En voicy donc un cas qui nous fait voir l'important avantage, qu'on peut tirer de l'application de la même force à la rouë, quoiqu'elle agisse toujours perpendiculairement au rayon de la rouë: circonstance qui ne seroit d'aucune conséquence, s'il n'y avoit point de frottement. Il est encore bien remarquable que dans ce cas il peut arriver, que même une force infinie n'est pas capable de vaincre la résistance du frottement.

IX. A plus forte raison on comprendra aisément, que si le rayon de l'axe CB sera encore plus grand par rapport au rayon de la rouë CA ,

CA, cette machine ne pourra être mise en mouvement par aucune force, dont la direction est, ou horizontale, ou qui tend en bas. Ce cas aura lieu si $n < 1$. soit donc $n = 1 - \alpha$, & α une fraction plus petite que 1; & que ϕ marque l'angle ACM pris de l'autre côté de la roüe, de sorte que la force $mp = F$ soit dirigée en haut. Alors pour vaincre la résistance du frottement il faudra une force

$$F = \frac{V(\sin^2 \phi - 2\alpha + \alpha\alpha) - \sin \phi}{-2\alpha + \alpha\alpha} P = \frac{\sin \phi \pm V(\sin^2 \phi - 2\alpha + \alpha\alpha)}{2\alpha - \alpha\alpha} P.$$

Donc afin que cette force ne devienne pas imaginaire, il faut qu'il soit $\sin \phi > \sqrt{2\alpha - \alpha\alpha}$, ou $\sin \phi > (1 - nn)$, car tant que $\sin \phi$ sera moindre que $\sqrt{2\alpha - \alpha\alpha}$, il ne sera pas possible de vaincre la résistance. Soit donc pour développer ce cas $\sin \phi = \sqrt{2\alpha - \alpha\alpha}$ &

$$F = \frac{P}{V(2\alpha - \alpha\alpha)} \text{ \& l'acceleration étant proportionelle à } (1 - \alpha)$$

$$F - \sqrt{PP + FF - 2PF \sin \phi} \text{ deviendra } = \frac{(1 - \alpha)P - PV(1 - 2\alpha + \alpha\alpha)}{V(2\alpha - \alpha\alpha)}$$

= 0; ce sera donc le premier cas qu'il sera possible de vaincre la résistance. Mais il faut bien remarquer, que dans ce cas le mouvement de la machine n'est pas encore possible, car quoiqu'on augmente la

force F au delà de $\frac{P}{V(2\alpha - \alpha\alpha)}$, la valeur de la formule $nF - \sqrt{PP + FF - 2PF \sin \phi}$ redevient negative, La raison en est, que dans ce cas la valeur de cette formule devient un *maximum*, & ce *maximum* même est = 0, d'où l'on voit que dans tous les autres cas,

où F est ou plus grande, ou plus petite que $\frac{P}{V(2\alpha - \alpha\alpha)} = \frac{P}{V(1 - nn)}$, sa valeur qui exprime l'acceleration, doit être moindre que 0, & par-tant négative. Cela arrive si $\sin \phi = \sqrt{1 - nn}$, & $\cos \phi = n$: or si l'angle ϕ est plus petit, la valeur de $nF - \sqrt{PP + FF - 2PF \sin \phi}$ demeure toujours négative, quelque grande que soit la force F.

X. Or si $\sin \phi > \sqrt{1 - nn}$, la plus grande valeur de la formule $nF - \sqrt{PP + FF - 2PF \sin \phi}$ sera affirmative, ce qui est

une marque, que dans ces cas la machine peut être mise en mouvement, si la force F est prise d'une grandeur convenable: car si cette force est trop petite, ou trop grande, le mouvement deviendra également impossible. Il y aura donc des limites, entre lesquels la force F doit être comprise, afin qu'elle soit capable de mouvoir la machine, & ces limites sont représentés par la double valeur de F , que nous venons de trouver, savoir remettant $1 - nn$ au lieu de $2\alpha - \alpha\alpha$

$$F = \frac{\sin \phi \pm \sqrt{(\sin \phi)^2 - 1 + nn}}{1 - nn} P.$$

& entre ces deux limites se trouve la valeur de la force F , qui produit la plus grande acceleration. Pour trouver cette valeur, supposons

$\frac{F}{P} = z$, & l'acceleration sera représentée par cette formule $nz - \sqrt{(1 + zz - 2z \sin \phi)}$, & posant son différentiel $= 0$, nous aurons, $n = \frac{z - \sin \phi}{\sqrt{(1 + zz - 2z \sin \phi)}}$, & partant $\sqrt{(1 + zz - 2z \sin \phi)} = \frac{z - \sin \phi}{n}$: donc l'acceleration la plus grande sera $= \frac{(nn - 1) z \sin \phi}{n}$.

Or l'équation precedente nous fournira $z = \sin \phi \pm \frac{n \cos \phi}{\sqrt{(1 - nn)}}$ où par rapport à l'ambiguité du signe \pm il faut remarquer, que puisque $\sqrt{(1 + zz - 2z \sin \phi)} = \frac{z - \sin \phi}{n}$, la valeur de $z - \sin \phi$ doit toujours être affirmative, parce que le frottement qui est exprimé par la formule irrationnelle $\sqrt{(1 + zz - 2z \sin \phi)}$ ne sauroit jamais devenir négatif. Donc il est clair que dans l'expression $z = \sin \phi \pm \frac{n \cos \phi}{\sqrt{(1 - nn)}}$ le seul signe $+$ peut avoir lieu, & que le terme $\frac{n \cos \phi}{\sqrt{(1 - nn)}}$ doit toujours être pris affirmatif, quoique même le $\cos \phi$ devienne négatif: ou l'angle ACm plus grand qu'un droit.

XI. Ayant

XI. Ayant donc trouvé pour le cas de la plus grande accélération
 $a = \sin \phi + \frac{n \cos \phi}{\sqrt{1 - nn}} = \frac{F}{P}$, la plus grande accélération
 même sera comme $n \sin \phi - \cos \phi \cdot \sqrt{1 - nn}$; d'où l'on voit que
 cette plus grande valeur est négative, tant que $\sin \phi < \sqrt{1 - nn}$,
 & elle évanouit précisément, si $\sin \phi = \sqrt{1 - nn}$: mais si $\sin \phi >$
 $\sqrt{1 - nn}$, alors la plus grande valeur de l'accélération sera affirma-
 tive; & elle deviendra encore la plus grande, si l'angle $ACm = \phi$ sera
 droit; car alors le mouvement de la machine sera le plus vite, si l'on
 prend $F = P$, auquel cas la pression même, & partant le frottement,
 évanouit. Or dans ce cas où $\phi = 90^\circ$, il y aura deux forces, qui
 contrebalanceront le frottement qui seront

$$F = \frac{1 + n}{1 - n} P = \frac{P}{1 - n} \quad \& \quad F = \frac{1 - n}{1 + n} P = \frac{P}{1 + n}$$

d'où il est évident, que si la force F est, ou plus petite que
 $\frac{P}{1 + n}$, ou plus grande que $\frac{P}{1 - n}$, la machine ne recevra au-
 cun mouvement; & il ne sera possible d'imprimer aucun mouve-
 ment à la machine, à moins que la force F ne soit comprise entre
 ces limites $\frac{P}{1 + n}$ & $\frac{P}{1 - n}$. On sera peut être d'abord surpris,
 comme il puisse arriver qu'une plus grande force ne soit pas capable de
 remuer la machine, pendant qu'une force plus petite, quoiqu'égale-
 ment appliquée, y est capable. Mais comme dans le cas $F = P$ la
 pression à l'appuy est tout à fait détruite, il est clair que lorsque $F >$
 P la pression devenant négative, sera transportée en haut, & pour cet
 effet il faut que l'axe de la machine entre dans un anneau, auquel l'axe
 sera apprimé dans le sommet b , car sans cet anneau, qui sert à rete-
 nir la machine, elle feroit enlevée en haut par la force $F > P$.

XII. Ces cas, que je viens de développer, sont voir très évî-
 demment, combien les forces, qui agissent sur la machine, contri-
 buent à augmenter, ou à diminuer la résistance du frottement: & par-
 tant

Fig 4.

tant, pour déterminer le frottement de chaque machine, il ne suffit pas d'avoir égard à la machine même, mais il faut aussi bien considérer toutes les forces qui y sont appliquées. Jusqu'ici je n'ai considéré qu'une seule force dont la machine étoit sollicitée: mais s'il y en a plusieurs qui agissent ensemble, parmi lesquelles on doit comprendre la charge qui doit être levée, ou mise en mouvement, la détermination du frottement n'en devient pas plus difficile. Soient appliquées à la machine qui tourne autour du centre C, sur le soutien EF, des forces quelconques PR, QS sous quelque obliquité aux rayons CP & CQ que ce soit: & pour en déterminer l'effet sur le frottement, on n'a qu'à considérer ces forces, comme si elles étoient appliquées immédiatement au centre C, afin de connoître la pression sur le soutien EF au point d'appuy. Qu'on décompose donc chaque force en deux, dont l'une soit horizontale, l'autre verticale, & la force PR se résoudra en Pp, Pr & la force QS en Qq, Qs: aux verticales on joigne le poids de la machine, & que CK représente la somme de toutes les forces verticales, & CI celle des forces horizontales. Ensuite la diagonale CI du parallélogramme rectangle CLLK, représentera la force totale, dont la machine sera pressée contre le soutien EF; & on trouvera le point d'appuy N, où cette force est appliquée. Donc si l'on nomme la somme de toutes les forces verticales avec le poids de la machine $CK = P$, la somme des forces horizontales $CI = Q$, la pression contre le soutien au point N sera $= \sqrt{PP + QQ}$ & partant le frottement $= \mu \sqrt{PP + QQ}$. De plus, pour connoître le point d'appuy N, la tangente de l'angle BCN sera $= \frac{Q}{P}$.

XIII. Après avoir déterminé en sorte le frottement, qui résulte, tant du poids de la machine, que des forces qui y agissent, on recherchera de la manière suivante, si ces forces sont capables de mettre la machine en mouvement. On accélérera les momens de toutes les forces, qui agissent sur la machine, en multipliant chacune par sa distance à l'axe C, autour duquel le mouvement se fait, & ayant égard si toutes ces forces agissent dans le même sens ou non, on réduira

dans

tous ces momens dans une somme, en ajoutant ceux qui agissent dans le même sens, & en ôtant ceux qui sont contraires. Soit S ce moment total, qui tend à tourner la machine dans le sens BN , & puisque le frottement, que nous venons de trouver $= \mu \sqrt{PP + QQ}$ est toujours contraire à la force mouvante, comme il est appliqué au point d'appuy N , son moment sera $= \mu \cdot CN \cdot \sqrt{PP + QQ}$. Par conséquent on n'aura qu'à regarder le moment S , qui résulte des forces, & ce moment $\mu \cdot CN \cdot \sqrt{PP + QQ}$ du frottement: car tandis que S sera plus petit que $\mu \cdot CN \cdot \sqrt{PP + QQ}$, ou même égal, la machine demeurera en repos; & le moment S ne sera capable de produire aucun mouvement, à moins qu'il ne soit S plus grand que $\mu \cdot CN \cdot \sqrt{PP + QQ}$. Dans ce cas l'accélération de la machine sera produite par l'excès du moment S sur le moment du frottement $\mu \cdot CN \cdot \sqrt{PP + QQ}$, & cet excès $S - \mu \cdot CN \cdot \sqrt{PP + QQ}$ étant divisé par le moment de l'inertie de toute la machine, donnera l'accélération du mouvement rotatoire. Cela s'entend, lorsque la machine commence à être mise en mouvement: car aussitôt que la machine, & par conséquent aussi les forces, qui agissent sur elle, sont déjà en mouvement; puisque alors la pression sur le soutien en est changée, le frottement ne sera plus le même, & dans ce cas la recherche du mouvement actuel demandera des règles particulières, qui feront le sujet d'une dissertation particulière sur cette matière.

XIV. Je me borne donc ici uniquement à rechercher la force, dont on aura besoin pour vaincre le frottement; puisque cette connoissance sera déjà suffisante pour juger de l'effet de la plupart des machines, dont on se sert ordinairement. Et pour faire voir combien la résistance du frottement peut être diminuée, si l'axe de la machine est soutenu de deux poulies, je m'en vais examiner le cas, où l'axe BCb d'une machine quelconque repose entre deux poulies BD , & bd , en sorte que l'axe de la machine ne sauroit tourner, sans que ces poulies ne tournassent également, & qu'il n'arrivât aucun frottement dans les endroits B & b , où les poulies sont touchées de l'axe. Or je suppose que chacune de ces poulies ait son pignon DEF & def , soutenu chacun par son appuy immobile GH & gb , sur lequel cha-

Fig. 5.

que poulie tourne, & que tout le frottement soit transporté par ce moyen aux endroits, où les pignons des poulies s'appuyent sur leurs foyers. Pour déterminer ce frottement soit premièrement, le poids de chaque poulie & P le poids de la machine même, qui doit être tournée autour de son axe CB*b*: & que AI représente la force = F appliquée perpendiculairement au rayon AC, qui soit capable de vaincre le frottement; laquelle devroit aussi entrer dans la détermination du frottement. Or puisqu'il est facile de prévoir, que cette force sera très petite, à cause de la grande diminution du frottement, il sera permis de négliger cette force dans la recherche de la quantité du frottement. Soit donc CP la ligne verticale, qui représente le poids de la machine P, & supposant que les lignes CD & C*d* soient également inclinées sur l'horizon, je nommerai les angles BCP = *b* CP = φ, & la force CP = P étant décomposée selon les directions CB & C*b*, donnera pour chacune de

ces forces selon CB & C*b* la force = $\frac{P}{2 \cos \phi}$. Par conséquent chaque poulie sera pressée de ce poids P de la machine contre son appuy dans la direction DE ou *de* par une force = $\frac{P}{2 \cos \phi}$, qui à ce qu'on voit sera d'autant plus grande, plus grand sera l'angle BC*b*.

XV. Or chaque poulie étant outre cela sollicitée par son propre poids *p*, dans la direction DF & *df*; puisque les angles EDF & *edf* sont = φ, la force totale, dont chaque poulie est pressée contre son

appuy, sera = $\sqrt{p^2 + \frac{PP}{4 \cos^2 \phi} + Pp}$, & partant le frottement, qu'il faut vaincre pour mettre chaque poulie en mouvement, sera =

$\mu \sqrt{p^2 + Pp + \frac{PP}{4 \cos^2 \phi}}$, la lettre μ marquant la partie de la pression, à laquelle le frottement est égal, & dont la valeur est à peu près = $\frac{1}{4}$. Maintenant il est clair que pour vaincre le frottement de

la poulie DEF, il faut appliquer au point B une force = $\frac{\mu D F}{B D}$
 $\sqrt{p^2}$

$V (pp + Pp + \frac{PP}{4 \cos \phi^2})$, & une pareille force sera requise au point *b* pour vaincre le frottement de l'autre poulie *def*, puisque je suppose ces deux poulies parfaitement égales entr'elles. Donc si la force $AI = F$ est capable de vaincre ces frottemens, il faut que son moment par rapport au centre de mouvement *C* soit égal aux moments de ces deux forces, que nous venons de trouver, & partant nous aurons $F \cdot CA = \frac{2 \mu DF \cdot BC}{BD} V (pp + Pp + \frac{PP}{4 \cos \phi^2})$

ou $F = \mu \frac{BC}{AC} \cdot \frac{DF}{BD} V (4pp + 4Pp + \frac{PP}{\cos \phi^2})$. De là il est donc clair que, pour vaincre la résistance du frottement d'une telle machine, la force requise *F* sera d'autant plus petite, premièrement plus le rayon de l'axe de la machine *CB* sera petit ; & ensuite plus l'axe des poulies sera petit par rapport à leur diamètre ; & enfin plus l'angle *BCb* sera petit. Donc, puisqu'il est dans notre pouvoir d'augmenter le rapport du rayon des poulies *BD* au rayon de leur axe *DE* très considérablement, on comprendra aisément, qu'on sera en état de rendre par ce moyen la résistance du frottement presque insensible. Pour cet effet on gagnera aussi considérablement, si l'on approche ces deux poulies ensemble autant qu'il sera possible.

XVI. Si l'on pouvoit faire les axes qui soutiennent la machines, aussi minces qu'on voudroit, la diminution du frottement n'auroit aucune difficulté : mais puisque la grosseur des axes doit être proportionnée à la charge qu'ils portent, les axes des poulies *DF* & *df* seront déterminés par le poids de la machine. Car si nous supposons que le principal axe de la machine *CB* est déjà aussi mince, que la charge le permet, puisque les forces des axes de différente épaisseur sont à peu près comme les quarrés de leurs rayons, cette règle nous fournira cette proportion $CB^2 : DF^2 = P : V (pp + Pp + \frac{PP}{4 \cos \phi^2})$.

Or nous pourrons sans une erreur considérable négliger le poids des poulies *p* par rapport au poids de la machine même *P*, puisqu'une

très petite épaisseur peut suffire pour les poulies : & partant nous aurons $CB : DF = \sqrt{2} \cos \varphi : 1$. & négligeant aussi dans la formule trouvée p à l'égard de P , pour vaincre la résistance du frottement, nous

$$\text{aurons : } F. CA = \frac{\mu P}{\cos \varphi} \cdot \frac{DF \cdot BC}{BD} = \frac{\mu P \cdot BC^2}{BD \cdot \cos \varphi \sqrt{2} \cos \varphi}$$

d'où il est clair que, plus on augmente la grandeur des poulies BD , plus aussi sera diminuée la résistance du frottement. Or les poulies ne peuvent être élargies que jusqu'à ce qu'elles viennent se toucher; ou bien le rayon BD ne peut être plus grand que $CD \sin \varphi$: soit

$$\text{donc } BD = CD \sin \varphi; \text{ ce qui donne } BD = \frac{BC \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}; \text{ \& nous aurons:}$$

$$F. CA = \frac{\mu P \cdot BC \cdot (1 - \sin \varphi)}{\sin \varphi \cos \varphi \sqrt{2} \cos \varphi} = \frac{\mu P \cdot BC \sqrt{(1 - \sin \varphi)}}{\sin \varphi \sqrt{2} \cos \varphi (1 + \sin \varphi)}$$

$$\text{or } \frac{\sqrt{(1 - \sin \varphi)}}{\sqrt{2} \cos \varphi} = \frac{\sqrt{(1 - \sin \varphi)}}{\sqrt{2(1 - \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{4(1 + \sin \varphi)}} \text{ par consé-}$$

$$\text{quent } F. CA = \frac{\mu P \cdot BC \sqrt{(1 - \sin \varphi)}}{\sin \varphi \sqrt{4(1 + \sin \varphi)^3}}, \text{ d'où l'on voit que plus on}$$

augmente l'angle BCb , & que les poulies touchent la ligne verticale CP , plus aussi la résistance du frottement sera diminuée, sans que les axes, tant de la machine que des poulies, deviennent trop foibles.

