1750

Sur la vibration des cordes

Leonhard Euler

SUR LA VIBRATION
DES CORDES,
PAR M. EULER.

Traduit du Latin.

I.

Quoique tout ce que Mrs. *Taylor*, *Bernoulli*, & quelques autres, ont dit & découvert jusqu'à present au sujet du mouvement vibratoire des cordes, semble avoir épuisé la matiere, il y reste néanmoins une double limitation, qui la restreint tellement, qu'à peine y a-t-il aucun cas, où l'on puisse déterminer le veritable mouvement d'une corde en vibration. Car d'abord, ils ont supposé que les cordes tenduës faisoient seulement des vibrations quasi infiniment petites, en sorte que dans ce mouvement, la corde, soit qu'elle ait une situation droite, ou courbe, peut pourtant être censée conserver toujours la même longueur. L'autre limitation consiste, en ce qu'ils ont supposé toutes les vibrations régulieres, prétendant que dans chaque vibration la corde entiére, & tout à la fois, s'etend directement, & cherchant hors de cette situation sa figure courbe, qu'ils ont trouvé être une trochoïde prolongée à l'infini

II. A' la verité la premiere limitation, par laquelle les vibrations de la corde sont regardées comme infiniment petites, quoique réellement elles conservent toujours une raison finie à la longueur de la

 corde,

corde, cela ne dérange presque en rien les conclusions qu'on en tire, parce qu'en effet ces vibrations sont pour l'ordinaire si petites, qu'elles peuvent être prises pour infiniment petites, sans qu'il en résulte d'erreur sensible. D'ailleurs on n'a pas encore poussé assez loin, ni la Mechanique, ni l'Analyse, pour être en état de déterminer les mouvemens dans les vibrations finies. A l'egard de l'autre limitation, qui suppose toutes les vibrations régulieres, on tâche de la défendre en disant, que bien qu'elles s'ecartent de cette loi au commencement du mouvement, elles ne laissent pas de s'assujettir au bout d'un trés court espace de tems à l'uniformité, de sorte qu'à chaque vibration la corde s'étend tout à la fois, & ensemble en ligne droite, affectant hors de cette situation la figure d'une trochoïde prolongée.

III. Il est effectivement prouvé d'une maniere suffisante, que si une seule vibration est conforme à cette régle, toutes les suivantes doivent l'observer aussi. On voit en même tems par là, comment l'etat des vibrations suivantes dépend des précedentes, & peut être déterminé par elles; comme réciproquement, par l'etat des suivantes, on peut conclure la disposition de celles qui ont precedé. C'est pourquoi, si les vibrations suivantes sont régulieres, il ne sera en aucune maniere possible que les précedentes se soient écartées de la régle; d'où résulte aussi évidemment, que si la premiere vibration a été irréguliere, les suivantes ne peuvent jamais parvenir à une parfaite régularité. Or la premiere vibration dépend de notre bon plaisir, puisqu'on peut, avant que de lacher la corde, lui donner une figure quelconque; ce qui fait que le mouvement vibratoire de la même corde peut varier à l'infini, suivant qu'on donne à la corde telle ou telle figure au commencement du mouvement.

IV. De là naît donc la Question suivante, dans laquelle toute cette recherche est comprise.

Si une corde d'une longueur, & d'une masse donnée, est tenduë par une force, ou un poids donné; qu'au lieu de la situation droite, on lui donne une figure quelconque, qui ne differe cependant de la droite qu'infiniment peu, & qu'ensuite on la lache tout à coup; déterminer le mouvement vibratoire total, dont elle sera agitée,

M. d'A-

M, d'Alembert s'eſt attaché le premier, avec un ſuccés des plus heureux, à l'examen de ce Problême, ſi difficile tant dans la Mecanique que dans l'Analyſe, & il en a communiqué à notre Academie une trés belle ſolution. Mais, comme dans ces diſcusſions ſublimes on tire ſouvent un fruit fort conſiderable de la comparaiſon de pluſieurs ſolutions différentes du même problême, je ne balance point à propoſer celle que j'ai trouvée ſur cette queſtion. Quoiqu'elle ne differe pas beaucoup de celle de M. d'Alembert; cependant la grande étenduë de ce ſujet fait que je me perſuade d'avoir ajouté quelques obſervations aſſez intereſſantes dans l'application des formules générales.

V. Je commencerai donc par propoſer le Problême d'une façon bien nette, afin qu'il paroiſſe quels ſecours on a beſoin de tirer, tant de l'Analyſe que de la Mecanique, pour arriver à la ſolution. Soit donc la corde propoſée A B, fixement attachée à ſes extremités A & B, & tendüe ſuivant la direction A F par une force quelconque, comme cela ſe fait ordinairement dans les Inſtrumens de Muſique. Que cette corde ſoit partout d'une égale épaiſſeur, & qu'on appelle Fig. 1.

ſa longueur A B $= a$

ſa maſſe, ou ſon poids $=$ M

& que la force tendante A F ſoit égale à un poids $=$ F. Fig. 1.

Qu'alors on faſſe paſſer cette corde de ſon état naturel A B à un etat de courbure quelconque A L *l* B, qui pourtant ne differera qu'infiniment peu de l'etat naturel droit A B, de maniere que la longueur A L *l* B ne ſurpaſſe pas ſenſiblement la longueur A B; & que cette figure A L *l* B donnée d'abord à la corde, ſoit connüe. On demande, en ſuppoſant que la corde ſoit lachée ſubitement de cet état, quel mouvement elle aquerra, & quelles ſeront les vibrations qu'elle fera?

VI. Auſſi-tot donc que la corde ſera lachée de ſon etat A L *l* B, la force tendante la preſſera d'abord vers la ſituation naturelle A B, que tous ſes points atteindront, ou à la fois, ou en divers momens: par conſéquent, la corde changera continuellement de figure, & tous ſes points participeront au mouvement vibratoire, jusqu'à ce que la

réſiſtan-

résistance ait calmé toute l'agitation. Or pour connoitre parfaitement en quoi consiste ce mouvement, il suffira d'avoir assigné pour chaque tems l'etat de la corde, c'est à dire, sa figure. Car, tandis que d'un coté on définit le changement de figure par la succession instantanée, on détermine en même tems de l'autre la vitesse de chaque point de la corde, & ainsi on parvient à la connoissance de tout le mouvement. Il ne sera donc pas besoin dans cette recherche de faire attention aux vîtesses de chacun des points de la corde; ce qui diminuë considerablement la difficulté de cette solution.

VII. Puisque nous avons supposé, que la longueur de la corde ne souffre aucun changement, tandis qu'elle revêt successivement toutes ces figures, en sorte que $ALlB = AB$, il en résulte qu'en menant les appliquées quelconques PL, pl, normales à l'axe AB, les arcs AL, Al seront égaux aux abscisses AP, Ap; & par conséquent les appliquées PL, pl, seront comme infiniment petites à l'egard des abscisses. Par conséquent, si l'on appelle l'abscisse $AP = x$, l'appliquée PL sera infiniment petite en comparaison de x, & l'arc même AL sera $= x$; d'où l' on aura $Pp = Ll = dx$. Cela fait comprendre, que lorsque la corde reçoit diverses figures successives, chacun de ses points L se meut perpetuellement selon la direction de l'appliquée LP, en sorte que chaque appliquée LP représente le chemin, par lequel le point L de la corde s'approche de l'etat naturel AB: mais alors, à cause du mouvement reçu, suivant la même direction normale à AB, il tendra du coté opposé.

VIII. Aprés avoir fait ces remarques, posons qu'au bout du tems t la corde soit arrivée à la situation $AMmB$, ayant quitté sa situation primitive $ALlB$, de sorte que le point L soit parvenu en M. En supposant donc l'abscisse quelconque $AP = x$, qui exprime en même tems la longueur de l'arc AM, soit l'appliquée dans cette courbe AMB répondante à $PM = y$; & parce que cette courbe AMB dépend du tems écoulé $= t$, y sera une fonction des deux variables x & t; en sorte qu'en posant $t = o$, la valeur de y fournisse l'appliquée de la courbe primitive ALB. Or il est clair que si l'on connoit la nature de cette fonction de x & t, qui exprime la quantité de l'appliquée

y, on

y, on peut par son moyen assigner la figure même de la corde pour un tems quelconque t; & de plus on conclura aisément de sa mutabilité le mouvement de toute la corde.

IX. Ainsi y etant une fonction de x & t, son differentiel aura une forme telle, $dy = pdx + qdt$, laquelle formule comprend non seulement la variabilité de y par la courbe AMB, mais encore eu égard au tems qui s'ecoule. En effet, si le tems t est etabli constant, ou $dt = o$, l'equation $dy = pdx$ exprimera la nature de la courbe AMB; mais si l'abscisse x est supposée constante, ou $dx = o$, l'equation $dy = qdt$ définira le mouvement du point L pour tout le tems que le mouvement de la corde dure, parce que par elle on peut assigner pour un tems quelconque t ecoulé depuis le commencement; le lieu M, auquel le point L sera parvenu. Or p & q seront de nouveau des fonctions de x & t, dont les differentiels, en posant x & t l'une & l'autre variable, soient,

$$dp = rdx + sdt \text{ \& } dq = sdx + udt.$$

Car il est constant par la nature des differentiels, que l'element dt en dp, & l'element dx en dq, doivent avoir un coëfficient commun.

X. Comme il s'agit présentement de déterminer le mouvement de la corde par les forces sollicitantes, soit la force acceleratrice, par laquelle le point M de la corde est acceléré vers l'axe AB $=$ P, & il est clair que toutes ces forces, par lesquelles chacun des élemens de la corde est pressé vers l'axe AB. prises ensemble doivent être équivalentes à la force, par laquelle la corde est actuellement tenduë, & que nous avons posée AF $=$ F; ou bien, si nous concevons des forces contraires & égales à P, appliquées suivant ML dans chacun des points M de la corde, alors elles devront se trouver en équilibre avec la force qui tend la corde AF $=$ F, & par cette proprieté on pourra déterminer la veritable force acceleratrice P, par laquelle chaque élément Mm de la corde est actuellement sollicité.

XI. La masse, ou le poids de toute la corde etant $=$ M, & se distribuant également par toute la longueur AB, le poids de la portion AP, ou AM, sera $= \frac{Mx}{a}$, & par conséquent le petit poids de

 l'elél'elément $Mm = dx$ sera $= \frac{M\,dx}{a}$; lequel etant sollicité suivant ML par la force accelératrice $= P$, la force motrice de cet élément sera $= \frac{M\,dx}{a} P$, & la somme de toutes les forces motrices par l'arc AM sera $= \frac{M}{a} \int P\,dx$. Mais parce que le point A est supposé fixe, il est permis de concevoir une certaine force $AG = G$, qui lui soit appliquée dans la direction AG normale à AB, & assez grande, pour que le point A soit conservé en repos. Ces choses etant posées, la theorie de l'equilibre des forces appliquées à un fil parfaitement fléxible, fournira l'equation suivante:

$$Fy - Gx + \frac{M}{a} \int dx \int P\,dx = o$$

ou Fy & Gx sont les momens des forces F & G à l'egard du point M, & $\frac{M}{a} \int dx \int P\,dx$ est la somme de tous les momens des forces élémentaires à l'egard du même point M.

XII. Que l'on considere à présent la courbe AMB, que la corde forme dans ce moment, dont la nature sera exprimée par les formules données ci-dessus, si le tems t est pris constant, ou $dt = o$, & par consequent on aura $dy = p\,dx$, & $dp = r\,dx$. Par là l'equation que l'etat d'équilibre a fait trouver, étant differentiée, & en posant $p\,dx$, au lieu de dy, donnera divisée par dx

$$Fp - G + \frac{M}{a} \int P\,dx = o.$$

Qu'on differentie de nouveau cette équation, en posant $r\,dx$ pour dp, & en divisant par dx, on obtiendra $Fr + \frac{M}{a} P = o$; d'où l'on tire la force accelératrice P du point M suivant la direction MP, MP, ſavoir $P = -\frac{Far}{M}$. C'eſt pourquoi ſi la courbe AMB étoit connuë, on pourroit déterminer par ſa nature la force accélératrice de chacun des élémens.

XIII. Conſiderons à préſent le mouvement du ſeul point M, par lequel il s'approche de P, étant ſollicité par la force accélératrice P, & l'abſciſſe $AP = x$ doit être cenſee invariable. Or comme à cauſe de $dx = o$, il y a l'increment momentané de l'appliquée PM, $dy = q dt$ & $dq = u dt$, dans le petit tems dt le point M s'approche de P par le petit eſpace $= -q dt$, dont le differentiel en poſant l'element du tems dt, conſtant, ſera $= -dq dt = -u dt^2 = -ddy$. Mais, de l'accélération qui naît de la force P par les principes mecaniques on déduit cette équation $P = -\frac{2ddy}{dt^2} = -2u$, ſi l'on expoſe, comme c'eſt la coutume l'elément du tems dt par l'elément de l'eſpace appliqué à la viteſſe, & que la viteſſe elle même ſoit répreſentée par la racine quarrée de la hauteur duë à cette viteſſe. Ainſi, puisque nous avons trouvé $P = -\frac{Far}{M}$ auſſi bien que $P = -2u$, il en réſultera $2u = \frac{Far}{M}$ ou $u = \frac{Far}{2M}$.

XIV. Ces deux conditions, que nous avons rappellées au calcul, renferment toute la Queſtion propoſée; & par conſéquent, ſi un tems quelconque t étant ecoulé, on poſe pour un point quelconque M de la corde l'abſciſſe $AP = x$, & l'appliquée $PM = y$, celle-ci s'exprimera par une fonction de x & t, telle qu'en poſant $dy = p dx + q dt$, le caractere des fonctions p & q ſe tirera de ces formules

$$dp = r dx + s dt, \ \& \ dq = s dx + \frac{Fa}{2M} r dt.$$

La queſtion mecanique propoſée ſe réduit donc à ce problême analytique, de chercher des fonctions r & s de x & t, telles que

ces

ces formules differentielles $r\,dx + s\,dt$, & $s\,dx + \frac{2\,M}{F\,a}\,r\,dt$, deviennent intégrables. Car de semblables fonctions étant trouvées pour r & s, on pourra assigner les valeurs $p = \int (r\,dx + s\,dt)$ & $q = \int (s\,dx + \frac{F\,a}{2\,M}\,r\,dt,)$ d'où l'on inferera ensuite la valeur de l'appliquée même $y = \int (p\,dx + q\,dt.)$

XV. Ce Problême analytique consideré en soi est extrémement indéterminé; ainsi, pour l'accommoder à quelque cas qui se présenteroit, il faut faire les remarques suivantes. Premierement dans les intégrations, il faut régler les constantes de maniere qu'en posant $x = o$, quelle que soit la valeur qu'on attribuë à t, on ait toujours $y = o$. Ensuite, on doit en faire autant dans le cas de $x = a$. Troisiémement, ces précautions étant prises, d'entre les fonctions infinies r & s, qui satisfont aux conditions ci-dessus exprimées; on doit pour chaque cas proposé choisir celles, qui en posant $t = o$, font que la valeur de l'appliquée y qui en résulte, fournit cette courbure arbitraire, que l'on avoit donnée à la corde au commencement du mouvement. Cela étant executé, il ne restera plus dans la solution aucune constante indéterminée, & le vrai mouvement de la corde pourra être répresenté d'une maniere absoluë.

XVI. Afin donc que la figure initiale de la corde puisse être réglée arbitrairement, la solution doit avoir la plus grande étenduë. C'est pourquoi, la recherche devant commencer par ces formules $dp = r\,dx + s\,dt$, & $dq = s\,dx + \frac{F\,a}{2\,M}\,r\,dt$, on doit découvrir en général toutes les valeurs possibles pour r & s, qui rendent ces formules intégrables ensemble. Multiplions pour cet effet ces formules à part par les constantes m & n, & ajoutons les produits, de maniere que soit

$$m\,dp + n\,dq = dx\,(mr + ns) + dt\,(ms + \frac{F\,a}{2\,M}\,nr)$$

cette

cette formule doit être encore intégrable, quelles que soient les valeurs constantes attribuées aux lettres m & n. Qu'on fasse donc $m:n = \frac{F a}{2 M} n : m$, ou $m m = \frac{F a}{2 M} n n$, d'où vient $m = 1$ & $n = \pm \sqrt{\frac{2 M}{F a}}$, & l'on aura $dp \pm dq \sqrt{\frac{2 M}{F a}} = (dx \pm dt \sqrt{\frac{F a}{2M}})$ $(r \pm s \sqrt{\frac{2 M}{F a}})$.

XVII. Pour abréger, soit $\frac{F a}{2M} = b$, & l'on aura

$dp \pm dq \sqrt{\frac{1}{b}} = (dx \pm dt \sqrt{b})\ (r \pm s \sqrt{\frac{1}{b}})$ ou
$dp \sqrt{b} \pm dq = (dx \pm dt \sqrt{b})\ (r \sqrt{b} \pm s)$ ou aussi
$dq \pm dp \sqrt{b} = (dx \pm dt \sqrt{b})\ (s \pm r \sqrt{b}.)$
Comme donc cette formule $(dx \pm dt \sqrt{b})\ (s \pm r \sqrt{b})$ doit être intégrable, il est nécessaire que $s \pm r \sqrt{b}$ soit une fonction de $x \pm t \sqrt{b}$. Posons, pour tenir compte de l'un & de l'autre signe

$$\begin{array}{lcl} x + t \sqrt{b} = v & & x = \frac{v + u}{2} \\ & \text{\& il sera} & \\ x - t \sqrt{b} = u & & t\sqrt{b} = \frac{v - u}{2} \end{array}$$

& nous aurons ces équations:
$dq + dp\sqrt{b} = dv\ (s + r\sqrt{b})$ & $dq - dp\sqrt{b} = du\ (s - r\sqrt{b})$
où il faut que $s + r \sqrt{b}$ soit une fonction de v, & $s - r\sqrt{b}$ une fonction de u; car autrement l'intégration ne reüssiroit pas.

XVIII. Cette double intégration étant donc faite, $q + p \sqrt{b}$ deviendra = à une fonction de v, & $q - p \sqrt{b}$ = à une fonction de u. Soit donc, pour donner une pleine etenduë à la solution, V fonction quelconque de $v = x + t\sqrt{b}$.

U fonction quelconque de $u = x - t\sqrt{b}$,

& l'on satisfera aux conditions rapportées, en posant

$$q + p\sqrt{b} = V \qquad \text{d'où se fait} \qquad q = \frac{V + U}{2}$$

$$q - p\sqrt{b} = U \qquad\qquad p = \frac{V - U}{2\sqrt{b}}.$$

Comme donc $dy = p\,dx + q\,dt$, on aura en substituant à p & q, de même qu'à dx & dt les valeurs trouvées

$$dy = \frac{(dv + du)(V - U)}{4\sqrt{b}} + \frac{(dv - du)(V + U)}{4\sqrt{b}},$$

qui aprés l'evolution fournit

$$dy = \frac{V\,dv - U\,du}{2\sqrt{b}} \text{ \& } y = \frac{1}{2\sqrt{b}}\left(\int V\,dv - \int U\,du\right).$$

XIX. Or $\int V.dv$ sera fonction de $v = x + t\sqrt{b}$, & $\int U\,du$ fonction de $u = x - t\sqrt{b}$, b etant $= \frac{Fa}{2M}$; d'où, si l'on employe les caracteres f & φ pour indiquer des fonctions quelconques des quantités, devant lesquelles on les met, nous aurons l'expression générale suivante pour l'appliquée y, qui représente sa quantité pour un tems quelconque t, ecoulé depuis le commencement, & pour une abscisse quelconque x

$$y = f:(x + t\sqrt{b}) + \varphi:(x - t\sqrt{b}).$$

Car pour retourner sur nos pas, & faire un essai sur la formule $dy = p\,dx + q\,dt$ on aura les valeurs suivantes p & q:

$$p = f':(x + t\sqrt{b}) + \varphi':(x - t\sqrt{b})$$

$$q = \sqrt{b}\,(f':(x + t\sqrt{b}) - \varphi':(x - t\sqrt{b}))$$

& au lieu des formules $dp = r\,dx + s\,dt$ & $dq = s\,dx + br\,dt$, on aura, comme la nature de la chose le demande,

$$r = f''.(x + t\sqrt{b}) + \varphi''.(x - t\sqrt{b})$$

$$s = \sqrt{b}.(f''.(x + t\sqrt{b}) - \varphi''.(x - t\sqrt{b}))$$

pourvu

pourvu que nous marquions le differentiel de la fonction $f: z$ par $dzf': z$, & le differentiel de la fonction $f': z$ par $dzf'': z$.

XX. Jusqu'à present les caracteres f & φ, dans l'equation

$$y = f: (x + t\sqrt{b}) + \varphi: (x - t\sqrt{b})$$

signifient des fonctions quelconques, qui different en raison de la composition, & leur relation se determine davantage par les autres conditions. Car comme en posant $x = o$, on doit toujours avoir $y = o$, il doit etre $f: (+t\sqrt{b}) + \varphi\ (-t\sqrt{b}) = o$, & par consequent $\varphi\ (-t\sqrt{b}) = -f: (t\sqrt{b})$. Or alors, parce qu'en posant $x = a$, la valeur de y doit pareillement evanoüir, on aura aussi $f: (a + t\sqrt{b}) + \varphi: (a - t\sqrt{b}) = o$; & ainsi la nature des fonctions f & φ doit etre definie de maniere qu'elle satisfasse à ces conditions.

$$\varphi: -t\sqrt{b} = -f: t\sqrt{b}$$

$$\varphi: (a - t\sqrt{b}) = -f: (a + t\sqrt{b})$$

XXI. Comme $f: z$ peut être representé en général par l'appliquée d'une certaine courbe, dont l'abscisse est z, soit A M B la courbe dont les appliquées P M fournissent les fonctions des abscisses A P qui sont designées par le caractere f: en sorte que P M soit $= f: t\sqrt{b}$; auquel $\varphi: -t\sqrt{b}$ devant être negativement égal, qu'on prenne A p = A P, de sorte que A p $= t\sqrt{b}$; & en posant la courbe Amb au dessous de l'axe de la courbe semblable A M B, on aura pm $= -f: t\sqrt{b} = \varphi: -t\sqrt{b}$. Donc la courbe Amb semblable à la courbe AMB exposera la nature de l'autre fonction φ. Alors la courbe AMB existant d'une maniere semblable au delà de B, soit AB $= a$ continué au dessous de l'axe, afin que la portion BN a soit semblable & égale à la courbe BnA, & en prenant BQ = Bq, on aura AQ $= a + t\sqrt{b}$, QN $= f: (a + t\sqrt{b})$, & pareillement à cause de Aq $= a - t\sqrt{b}$, il sera qn $= f: (a - t\sqrt{b})$ d'où il paroit qu'une courbe de cette forme AMB, qui est continuée de part & d'autre à l'infini par des parties semblables & égales à elle même Am b, BNa, & qui soient situées alternativement en haut & en bas, est propre à representer la nature de l'une & l'autre fonction f & φ. Fig. 1.

XXII. Ayant

XXII. Ayant donc décrit une ſemblable courbe anguiforme, ſoit réguliere, contenüe dans une certaine équation, ſoit irreguliere, ou méchanique, ſon appliquée quelconque P M fournira les fonctions, dont nous avons beſoin pour la ſolution du Problême. En effet ſi l'on poſe une abſciſse quelconque $AP = z$, on aura l'appliquée $PM = f: z$. De là donc, en attribuant à l'abſciſſe z, les valeurs $x + t \sqrt{b}$ & $x - t \sqrt{b}$, on aura $y = f: (x + t \sqrt{b}) + f: (x - t \sqrt{b})$; en conſéquence de quoi on pourra aſsigner pour un tems quelconque dans la corde vibrante l'appliquée y, qui convient pour une absciſſe quelconque. Or poſons $t = o$, pour obtenir la courbe initiale de la corde, & l'on aura $AP = x$, & l'appliquée dans la corde vibrante $y = f: x = 2\,PM$; ou, parce qu'il eſt permis de prendre les moitiés des fonctions ſuperieures, en ſorte que

$$y = \tfrac{1}{2} f: (x + t \sqrt{b}) + \tfrac{1}{2} f: (x - t \sqrt{b})$$

la courbe même AMB repréſentera la figure donnée à la corde au commencement du mouvement.

XXIII. Réciproquement donc, s'il y a une courbe donnée, ou figure, que la corde ait reçüe au commencement, on pourra en tirer la détermination de la figure de la corde pour un tems quelconque écoulé depuis le commencement. Car, en décrivant au deſſus de l'axe $AB = a$, qui ſoit égal à la longueur de la corde, la figure initiale de la corde AMB, qu'on la repete de part & d'autre en ſituation inverſe, en ſorte que Amb = AMB & BNa = BnA, & que l'on conçoive la répetition continuelle de cette courbe de part & d'autre à l'infini ſuivant la même loi. Alors, ſi cette courbe eſt employeé pour exprimer les fonctions trouvées, aprés un tems écoulé $= t$ l'appliqueé qui répondra à l'absciſſe x, dans la corde en vibration ſera :

$$y = \tfrac{1}{2} f: (x + t \sqrt{b}) + \tfrac{1}{2} f: (x - t \sqrt{b})$$

d'où l'on pourra recueillir aiſément la conſtruction de la courbe, que la corde forme dans un tems quelconque.

XXIV. Mais afin que cette formule ne paroiſſe pas renfermer des quantités heterogenes, il faut remarquer que $t \sqrt{b}$ eſt répreſenté par une ligne droite, & eſt par conſéquent homogene à x. Car, ſoit z la hauteur

hauteur de laquelle un corps pesant tombe dans le tems t, en donnant l'expression du tems de la maniere indiquée ci-dessus, on aura $t = 2\sqrt{z}$; & ainsi au lieu de t, on pourra écrire $2\sqrt{z}$, & réciproquement par la hauteur z on connoitra le tems t écoulé depuis le commencement du mouvement. Donc $t\sqrt{b}$ sera $= 2\sqrt{bz} = 2\sqrt{\frac{Faz}{2M}} = \sqrt{\frac{2Faz}{M}}$, & par conséquent sera exprimé par une ligne droite. Or posons, pour abréger, $\sqrt{\frac{2Faz}{M}} = v$, en sorte que la valeur de v puisse être assigneé pour un tems quelconque, & aprés le tems écoulé, pendant lequel un corps pesant tombe par la hauteur $= z$, on aura

$$y = \tfrac{1}{2}f:(x+v) + \tfrac{1}{2}f:(x-v)$$

XXV. Si l'on a donc donné au commencement la figure AMB à la corde $AB = a$, & que sa répétition ait ensuite formé la ligne courbe anguiforme $n'\,b\,AMB\,a\,N$, la figure que la corde doit avoir au bout du tems t, pendant lequel un corps pesant tombe par la hauteur $= z$, sera ainsi définie. De cette hauteur z connüe qu'on cherche la valeur $v = \sqrt{\frac{2Faz}{M}}$, & qu'en proposant l'abscisse quelconque $AP = x$; on prenne de part & d'autre $PQ = Pq = v$, en menant aux points Q & q les appliquées QN & qn, on aura à cause de $QN = f:(x+v)$ & de $qn = f:(x-v)$, l'appliquée qui répond à l'abscisse $AP = x$ de la corde, $y = \frac{1}{2}QN + \frac{1}{2}qn$; ou bien, qu'on prenne $Pm = \frac{QN + qn}{2}$, m étant le lieu du point M, & si l'on employe cette construction pour tous les points de l'axe A B, les points m donneront la figure présente de la corde Am B. De cette maniere la figure, que la corde prend dans les vibrations, sera facilement décrite pour un tems quelconque.

XXVI. Cherchons la figure de la corde, aprés qu'il ſera écoulé un tems tel que v ſoit $= a$, ou $z = \frac{M a}{2 F}$, & cela donnera

$$y = \tfrac{1}{2} f: (x + a) + \tfrac{1}{2} f: (x - a)$$

Or par la nature de la courbe décrite $f: (x - a)$ ſera $= - f: (a - x)$ & $f: (a + x) = - f: (a - x)$ d'où réſultera

$$y = - f: (a - x)$$

ce qui fait voir que la corde ſera plieé toute entiere au deſſous de l'axe, & prendra la figure AM′B égale à la figure donnée AMB, mais poſée en ſituation inverſe; de ſorte qu'en prenant l'absciſſe BP′ = AP, l'appliquée ſera P′M′ = PM. Et de là réciproquement, s'il s'ecoule de nouveau un tems égal t, d'où réſulte $v = a$, toute la corde retournera à la ſituation AMB, qui lui avoit été donnée au commencement; ce qui ſe déduit auſsi de ce que s'etant écoulé depuis le commencement un tems, d'où ſe fait $v = 2 a$, il en réſulte,

$$y = \tfrac{1}{2} f: (x + 2 a) + \tfrac{1}{2} f: (x - 2 a)$$

Mais en prenant PQ′ = Pq' = $2 a$, par la nature de la courbe Q′N′ ſera = PM = $q' n'$, & par conséquent y = PM, comme au commencement du mouvement.

XXVII. Quelle que ſoit donc la figure donnée d'abord à la corde, elle la reprend à chacune des vibrations, autant que le permet la diminution causée par la réſiſtance; ce qui fait voir bien clairement qu'il n'y a aucune vérité dans l'opinion rapportée ci-deſſus, ſavoir que les vibrations de la corde, quelque irreguliéres qu'elles ayent été d'abord, rentrent auſsi-tot aprés dans l'uniformité, de maniere que la figure dégénere en une trochöide prolongée. Cependant il n'eſt pas moins clair, que quelle que ſoit la figure de la corde en vibration, les vibrations ne laiſſeront pas d'etre aſſez régulieres; car comme, en poſant $v = 2 a$, la corde retourne à ſon premier etat, elle doit etre censée avoir fait pendant ce tems là deux vibrations; & par conſéquent on définira de la valeur $v = a$ le tems d'une vibration, qui ſera égal au tems pendant lequel un corps peſant tombe par

la

la hauteur $\frac{Ma}{2F}$; ou, si l'on exprime la longueur de la corde AB $= a$ en milliemes de pieds de Rhin, le tems d'une vibration exprimé en secondes sera $= \frac{1}{125} \sqrt{\frac{Ma}{2F}}$, où la corde fera autant de vibrations à chaque seconde, que cette expression $125 \sqrt{\frac{2F}{Ma}}$ contiendra d'unités, tout comme si la corde achevoit ses vibrations suivant la loi d'uniformité décrite par *Taylor*.

XXVIII. Comme la figure AMB donnée au commencement à la corde, fournit sa premiere & plus grande excursion, de même une vibration étant achevée, la corde se trouvera dans l'autre excursion la plus grande AM'B, que nous avons fait voir être égale à la premiere inverse. Voyons donc à present, si dans le milieu du tems qu'emportent ces deux vibrations, la corde se tend d'une maniere parfaitement droite, & reprend la situation naturelle, ou non? Puisque du tems d'une vibration naît $v = a$, posons pour le moment du milieu $v = \frac{1}{2} a$, & l'on aura de la formule generale

$$y = \tfrac{1}{2} f: (x + \tfrac{1}{2} a) + \tfrac{1}{2} f: (x - \tfrac{1}{2} a)$$

dont la valeur evanouïra, si $f: (\frac{1}{2} a - x)$ est $= f: (\frac{1}{2} a + x)$ c'est à dire, si la figure ADB donnée au commencement à la corde est telle qu'aux abscisses $\frac{1}{2} a + x$ & $\frac{1}{2} a - x$ répondent des appliquées égales; ce qui arrive si l'appliquée CD dressée au point du milieu C de la longueur AB est un diametre de la courbe ADB, & que la partie DB soit semblable & égale à la partie DA. Toutes les fois donc que la courbe initiale a cette propriété, tout autant de fois la corde s'etend en ligne droite au milieu de chaque vibration; & comme cela peut arriver en nombre innombrable de manieres, il est manifeste que cette condition elle-même ne requiert pas, que la corde prenne perpetuellement dans ses vibrations la figure d'une trochoïde prolongée. Fig. 1.

XXIX. Or, bien qu'à considerer la chose en général, les tems des vibrations ne dépendent pas de la figure que prend la corde vibrante,

L 2 mais

Fig. 3. mais qu'ils se déterminent par les seules quantités a, M & F, dont la premiere a dénote la longueur de la corde, M le poids de la corde, & F le poids égal à la force qui tend ; cependant il y a des cas singuliers, dans lesquels les tems des vibrations peuvent être réduits à la moitié, au tiers, au quart, ou même à une partie aliquote quelconque de toute la longueur. Car, si toute la longueur de la corde étoit $Aa = a$, & qu'elle se courbât au commencement, de maniere qu'elle fit deux parties AMB & Ba, qui fussent parfaitement semblables & égales entr'elles, elle fera alors ses vibrations, comme si elle n'avoit que la demie longueur AB, & par conséquent ces vibrations seront deux fois plus rapides. De même, si la figure initiale de la corde avoit trois parties semblables & égales bABa, comme elles sont répresentées dans la figure, la corde alors fera ses vibrations, comme si sa longueur étoit trois fois moindre, & chaque vibration deviendra trois fois plus courte; par où l'on comprend assez, comment ces mêmes vibrations peuvent devenir quatre fois, cinq fois &c. plus courtes.

XXX. Ayant ainsi donné la solution générale, comprenons y encore quelques cas, auxquels la courbe anguiforme Fig. 3. est une courbe continuë, dont les parties soient liées en vertu de la loi de de continuité, de maniere que sa nature puisse être comprise par une équation. Et d'abord il est constant, que ces courbes, puisqu'elles sont coupées par l'axe en une infinité de points, seront transcendentes. En posant la longueur de la corde AB $= a$, & une abscisse quelconque AB $= u$, soit $1 : \pi$, comme le diametre du cercle à la circonference, & il est manifeste que l'equation suivante, exprimée par les sinus, fournit une courbe requise;

$$PM = \alpha \sin \frac{\pi u}{a} + \beta \sin \frac{2\pi u}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi u}{a} + \delta \sin \frac{4\pi u}{a} + \&c.$$

Car si, au lieu de u, on pose ou a, ou $2a$, ou $3a$, ou $4a$ &c. l'appliquée PM evanoüit, & en posant u negatif, l'appliquée elle même se change en son négatif. Si donc la courbe AMB étoit la figure primitive de la corde, au bout du tems t, pendant lequel le corps pesant

sant descend par la hauteur $= z$, en posant $v = V \frac{2 F a z}{M}$, à l'abscisse x dans la figure de la corde répondra l'appliquée y, de sorte qu'on aura :

$$y = + \tfrac{1}{2} \alpha \sin \frac{\pi}{a}(x+v) + \tfrac{1}{2} b \sin \frac{2\pi}{a}(x+v) + \tfrac{1}{2}\gamma \sin \frac{3\pi}{a}(x+v) \&c.$$

$$+ \tfrac{1}{2} \alpha \sin \frac{\pi}{a}(x-v) + \tfrac{1}{2} \beta \sin \frac{2\pi}{a}(x-v) + \tfrac{1}{2}\gamma \sin \frac{3\pi}{a}(x-v) \&c.$$

XXXI. Or comme $\sin(a+b) + \sin(a-b)$ est $= 2 \sin a \cos b$, cette équation se transformera en cette forme :

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} \operatorname{cos} \frac{\pi v}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} \operatorname{cos} \frac{2\pi v}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} \operatorname{cos} \frac{3\pi v}{a} \&c.$$

& la figure primitive de la corde sera exprimée par cette équation,

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \&c.$$

laquelle revient la même, toutes les fois que v devient ou $2a$, ou $4a$, ou $6a$ &c. Mais si v est ou a, ou $3a$, ou $5a$ &c. la figure de la corde sera

$$y = -\alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} - \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \&c.$$

où il faut remarquer que si β est $= o$, $\gamma = o$, $\delta = o$, &c. il en résulte le cas qu'on croit communément être le seul qui ait lieu dans la vibration des cordes, savoir $y = \alpha \operatorname{si} \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi v}{a}$, dans lequel la courbure de la corde est perpetuellement la ligne des sinus, ou une trochoïde prolongée à l'infini. Mais si le seul terme β, ou γ, ou δ, &c. s'y trouve, cela forme des cas où le tems de la vibration est moindre, ou du double, ou du triple, ou du quadruple &c.