1750

# Quantum motus terrae a luna perturbeter accuratius inquiritur

Leonhard Euler

# QVANTVM MOTVS TERRAE A LVNA PERTVRBETVR ACCVRATIVS INQVIRITVR.

AVCTORE
*Leonhardo Eulero.*

## §. 1.

Cum luna perpetuo ad terram vrgeatur, quaecunque huius sollicitationis sit causa, necesse est vt terra simili quadam vi versus lunam nitatur. Si enim sol, a cuius vi motus lunae maxime perturbatur, e medio tolleretur, atque terra cum luna tantum in vniuerso relinqueretur, dubium est nullum, quin terrae et lunae commune centrum grauitatis vel quiesceret, vel vniformiter in directum progressurum esset. Hinc dum luna circa terram reuolueretur, vtrumque corpus simili quodam motu circa centrum grauitatis gyraretur; atque, si vires teneant rationem reciprocam duplicatam distantiarum, tam terra quam luna in sectione conica alterum focum in communi grauitatis centro habente, moueretur. Sin autem tam terra quamluna motu omni priuaretur, recta ad se inuicem accederent, et in communi centro grauitatis conuenirent. Vnde sequitur vires accelerantes, quibus terra et luna sollicitantur, ipsis horum corporum massis reciproce fore proportionales, ita vt vis, qua luna ad terram acceleratur, se habitura sit ad vim, qua terra vicissim ad lunam concitatur vti massa seu quantitas materiae in terra contentae

tentae ad maſſam lunae. Quodſi ergo maſſa terrae ſit $=T$, et maſſa lunae $=L$, atque vis acceleratrix, qua luna ad terram incitatur, ponatur $=V$, erit vis acceleratrix, qua terra ad lunam vrgebitur $=\frac{LV}{T}$. Cum igitur vis $V$ ſit cognita, ex ea quoque vis, qua terra ad lunam ſollicitatur, cognoſcetur; ſi modo ratio inter maſſas terrae et lunae fuerit nota.

§. 2. Vis autem acceleratrix $V$, qua luna ad terram pellitur, facile ad grauitatem naturalem in ſuperficie terrae comparatur. Indicetur enim vis grauitatis naturalis vnitate, ſitque radius terrae $=r$, et diſtantia lunae a terra $=z$, quoniam vires decreſcunt in ratione duplicata diſtantiarum, erit vis, qua luna terram verſus acceleratur, $=\frac{rr}{zz}=V$; hincque ergo vis, qua terra lunam verſus impellitur, erit $=\frac{Lrr}{Tzz}$, ſeu ſe habebit ad grauitatem naturalem vti $\frac{Lrr}{Tzz}$ ad 1. Cum igitur terra continuo tanta vi ad lunam vrgeatur viribus, quibus ad ſolem trahitur, non perfecte obediet, neque idcirco in ellipſi reuoluetur, cuius alter focus ſit in centro ſolis conſtitutus. In ſuperiori quidem diſſertatione, vbi nouas tabulas pro motu ſolis condere ſum conatus, aſſumſi commune centrum grauitatis terrae et lunae in ellipſi circa ſolem in eius foco exiſtentem reuolui, atque ex loco lunae aberrationem centri terrae ab iſta ellipſi ad quoduis tempus aſſignaui. Verum quanquam haec hypotheſis ad veritatem proxime accedit, atque adeo perfecte conueniret, ſi vires diſtantiis directe eſſent proportionales, tamen operae pretium videtur, in hunc ipſum errorem, quo iſta hypotheſis a veritate recedit, diligentius inquirere. Hunc in finem nulla communis centri grauitatis ratione habita, deuiationem terrae de orbita elliptica ex ipsis follicitationibus lunae inueſtigabo, quod negotium ad maxime complicatos calculos deducit, cum illa hyppotheſis rem facillime expediuiſſet.

§. 3. Quo autem vim, qua terra a luna ſollicitatur, cognoſcamus, neceſſe eſt, vt ratio, quam maſſa lunae ad maſſam terrae tenet, inueſtigetur. Si quidem aſſumamus corpus lunae ex ſimili materia eſſe conflatum atque terram, ratio illa erit triplicata rationis diametrorum. Quare cum ſit diameter terrae ad diametrum lunae vti 365 ad 100, foret maſſa terrae ad maſſam lunae vti 4863 ad 100 ſeu vt 48 ad 1 proxime. Neutonus quidem ex phaenomenis aeſtus maris terram tricies nouies tantum grauiorem luna conſtituit, verum Celeb. Daniel Bernoulli in ſua eximia de aeſtu maris diſſertatione oſtendit vim lunae multo eſſe minorem, quam Neutonus ſtatuiſſet, ita vt ratio 48 ad 1 propius ad veritatem accedat, quam ratio 39 ad 1. In hac autem comparatione ad vim ſolis ſimul ſpectatur, quae a diſtantia ſolis a terra pendet. Oſtendi autem in diſſertatione de diminutione motus planetarum, ſi parallaxis ſoli horizontalis aſſumatur 13″, vim ſolis in diſtantia 320, 708 $r$ ipſi grauitati fore aequalem; quare ſi haec diſtantia 320, 708 $r$ ponatur $= f$, et maſſa ſolis $= S$ erit $\frac{S}{ff} = \frac{T}{rr}$, ideoque $S = 102854\,T = \frac{ffT}{rr}$. Quod ſi autem diſtantia ſolis a terra ponatur $= c$, et diſtantia lunae a terra $= b$, ad mare commouendum eſt vis ſolis ad vim lunae vt $\frac{S}{c^3}$ ad $\frac{L}{b^3}$ hoc eſt vt $\frac{Tff}{c^3 rr}$ ad $\frac{L}{b^3}$. Quare ſi vis lunae fuerit

ad

ad vim ſolis vt $n$ ad 1, erit $\frac{L}{b^3}$ ad $\frac{Tff}{c^3rr}$ vt $n$ ad 1, hincque $L:T = nff\,b^3 : c^3rr$ vnde ſi ſit $n = 4$ Neutonus deduxit $L : T = 1 : 39$ manet enim ratio $ff$ ad $c^3$ quaecunque parallaxis aſſumatur, perpetuo eadem, ſin autem eſſet, vt Cel. Bernoulli ſtatuit $n = 3$, vel tantum $2\frac{1}{2}$ foret $L : T = 1 : 52$ ſeu $1 : 62$; inter quas rationes illa, quam ex mole lunae deduximus, medium quoddam a veritate fortaſſe non multum remotum tenet.

§. 4. Cognita ergo vi lunae motum terrae perturbante ſiue potius ea, quaſi eſſet cognita, aſſumta, ipſum motum terrae inueſtigemus. Quieſcat ergo ſol in S, cuius maſſa ſit $= S$, circa quem reuoluatur terra in orbita ATB, cuius media a ſole diſtantia ſit $= c$: maſſa autem terrae ſit $= T$; ſtatuatur in A terrae aphelium et in B perihelium, quatenus quidem eius motus a luna non perturbaretur. Elapſo iam tempore $= t$, poſtquam terra ex aphelio A eſt egreſſa, peruenerit in locum T, voceturque diſtantia $ST = z$, et angulus $AST = \Phi$. Luna autem nunc verſetur in L, ita vt a coniunctione ſolis diſtet angulo $STL = \theta$, quem angulum cum tempore $t$ vniformiter creſcere aſſumamus, quoniam variationes a motus lunae inaequalitate oriundae ſenſibiles eſſe nequeunt, ob eandemque rationem diſtantiam lunae a terra LT tanquam conſtantem conſiderabimus ſitque $LT = e$; et ipſa lunae maſſa $= L$. Poſito iam radio terrae $= r$, et vi grauitatis $= 1$, terra primum ad ſolem vrgebitur vi $= \frac{Srr}{Tzz}$; tum vero ad lunam vi $= \frac{Lrr}{Tee}$. Ex T ad AB ducatur normalis TP, et TV ipſi AB parallela, viresque ſollicitantes ſecundum has directiones Tab. XVI. Fig. 3.

re-

resoluantur. A vi ergo solis terra in directione TP sollicitabitur vi acceleratrice $= \frac{Srr \sin. \Phi}{Tzz}$, et in directione TV vi $= \frac{Srr \cos. \Phi}{Tzz}$. Deinde ob angulum $LTV = \theta + \Phi$, a vi lunae terra in directione TP vrgebitur vi $= \frac{Lrr \sin. (\theta + \Phi)}{Tee}$, et in directione TV vi $= \frac{Lrr \cos. (\theta + \Phi)}{Tee}$. Omnino ergo terra incitabitur secundum directionem TP vi $= \frac{Srr \sin. \Phi}{Tzz} + \frac{Lrr \sin. (\theta + \Phi)}{Tee}$, et secundum directionem TV vi $= \frac{Srr \cos. \Phi}{Tzz} + \frac{Lrr \cos. (\theta + \Phi)}{Tee}$.

§. 5. Ponatur $SP = x$ et $PT = y$, vt sit $x = z \cos. \Phi$, et $y = z \sin. \Phi$, atque motus terrae resoluatur secundum directiones $Tp$ et $Tt$, quae sint coordinatis SP et PT parallelae, eritque ob elementum temporis $= dt$, celeritas terrae secundum directionem $Tp = \frac{dx}{dt}$ seu TV $= -\frac{dx}{dt}$, quia abscissa SP progrediente luna diminuitur: et celeritas terrae secundum directionem $Tt = \frac{dy}{dt}$. Hinc ille motus requirit vim acceleratricem in directione $Tp = \frac{2ddx}{dt^2}$ seu in directione $TV = -\frac{2ddx}{dt^2}$: iste autem motus requirit vim acceleratricem in directione $Tt = \frac{2ddy}{dt^2}$ seu in directione $TP = -\frac{2ddy}{dt^2}$, sumto elemento temporis $dt$ constante. His igitur viribus aequales statuantur illae vires, quibus terra secundum has directiones reuera sollicitari inuenta est, sicque prodibunt duae sequentes aequationes

$$-\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{Srr \cos. \Phi}{Tzz} + \frac{Lrr \cos. (\theta + \Phi)}{Tee}$$

$$-\frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Srr \sin. \Phi}{Tzz} + \frac{Lrr \sin. (\theta + \Phi)}{Tee}$$

At

At cum ſit $x = z\cos.\phi$ et $y = z\sin.\phi$ erit:

$$dx = dz\cos.\phi - zd\phi\sin.\phi;\ dy = dz\sin.\phi + zd\phi\cos.\phi$$

$$ddx = ddz\cos.\phi - 2dzd\phi\sin.\phi - zdd\phi\sin.\phi - zd\phi^2\cos.\phi$$

$$ddy = ddz\sin.\phi + 2dzd\phi\cos.\phi + zdd\phi\cos.\phi - zd\phi^2\sin.\phi$$

qui valores in aequationibus illis ſubſtituti dabunt:

$$ddz\cos.\phi - 2dzd\phi\sin.\phi - zdd\phi\sin.\phi - zd\phi^2\cos.\phi = -\frac{rrdt^2}{2T}\left(\frac{S\cos.\phi}{zz} + \frac{L\cos.(\theta+\phi)}{ee}\right)$$

$$ddz\sin.\phi + 2dzd\phi\cos.\phi + zdd\phi\cos\phi - zd\phi^2\sin\phi = -\frac{rrdt^2}{2T}\left(\frac{S\sin\phi}{zz} + \frac{L\sin.(\theta+\phi)}{ee}\right)$$

Ex his ergo duabus aequationibus definiri debet relatio inter tres quantitates variabiles $z$, $\phi$ et $t$ quoniam $\theta$ a $t$ pendens aſſumimus.

§. 6. Harum aequationum inuentarum prior multiplicetur per $\sin.\phi$, poſterior vero per $\cos.\phi$, haecque ab illa ſubtrahatur quo facto prodibit:

$$-2dzd\phi - zdd\phi = \frac{Lrrdt^2}{2T}\frac{\sin.\theta}{ee}.$$

eſt enim $\sin.(\theta+\phi)\cos.\phi - \cos.(\theta+\phi)\sin.\phi = \sin.\theta$. Deinde quia eſt $\cos.\theta+\phi)\cos\phi + \sin(\theta+\phi)\sin.\phi = \cos.\theta$, ſi aequatio prior per $\cos.\phi$ poſterior vero per $\sin.\phi$ multiplicetur ambaeque inuicem addantur, reperitur.

$$ddz - zd\phi^2 = -\frac{rrdt^2}{2T}\left(\frac{S}{zz} + \frac{L\cos.\theta}{ee}\right)$$

Ponatur nunc breuitatis gratia $\frac{Srr}{Tcc} = m$; denotante $c$ diſtantiam mediam terrae a ſole ſeu potius ſemilatus rectum, quod ob excentricitatem valde paruam a diſtantia media non multum diſcrepabit, erit ob $S = \frac{Tff}{rr}$, $m = \frac{ff}{cc} = 0,000408587$. Deinde ſit $\frac{Lrr}{Tee} = n$, et, ſi $\frac{L}{T} = \frac{1}{48}$ atque $e = 60r$ reperietur $n = 0,00000579$, ita vt ſit,

$n = \frac{m}{70}$ circiter. Secundum mentem Neutoni foret $n = \frac{m}{57}$ et ſecundum Bernoullium $n = \frac{m}{88}$. Erit ergo $n$ prae $m$ quantitas ſatis parua, vt quantitates multo minores quam $n$ facile reiici queant. Introductis autem his duabus litteris $m$ et $n$ aequationes ante inuentae tranſibunt in ſequentes.

$$2\,dz\,d\Phi + z\,dd\Phi = -\tfrac{1}{2}n\,dt^2 \text{ ſin. } \theta \text{ et}$$

$$ddz - z\,d\Phi^2 = -\tfrac{1}{2}\,dt\left(\frac{mcc}{zz} + n \text{ coſ. } \theta\right)$$

in quibus aequationibus differentialibus ſecundi gradus differentiale $dt$ aſſumtum eſt conſtans; quod in integratione probe eſt obſeruandum.

§. 7. Si luna prorſus abeſſet, aequatio prior fieret:

$$2\,dz\,d\Phi + z\,dd\Phi = 0.$$

quae per $z$ multiplicata et integrata praebet:

$$zz\,d\Phi = A\,dt$$

denotante A quantitatem quampiam conſtantem. Altera autem aequatio hoc caſu quo $n = 0$ abit in hanc

$$ddz - z\,d\Phi^2 = -\frac{mcc\,dt^2}{2zz}.$$

At ex priori eſt $d\Phi^2 = \frac{A^2dt^2}{z^4}$, quo valore ſubſtituto fit

$$ddz = \frac{A^2dt^2}{z^3} - \frac{mcc\,dt^2}{2zz}$$

quae multiplicata per $dz$ et integrata dabit ob $dt$ conſtans:

$$\tfrac{1}{2}dz^2 = \frac{mcc\,dt^2}{2z} - \frac{A^2dt^2}{2zz} - \frac{B\,dt^2}{2}$$

ſeu $dt = \frac{z\,dz}{\sqrt{(mccz - AA - Bzz)}}$

et $d\Phi = \frac{A\,dz}{z\sqrt{(mccz - AA - Bzz)}}$

Ponatur $z = \frac{cc}{u}$ erit $d\Phi = \frac{-A\,du}{\sqrt{(mc^4u - AAuu - Bc^2)}}$

Si iam conſtantes A et B ita determinentur, vt ſit $AA = \frac{mc^3}{2}$ ſeu $A = c\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$ et $B = \frac{m(cc-kk)}{2c}$ inuenietur $u = c - k \text{ coſ. } \Phi$. Poſito ergo $\Phi = 0$, erit $u = c - k$ et diſtantia

ſtantia aphelii a ſole $AS = \frac{cc}{c-k}$. Verum poſito $\Phi = 180°$, fiet diſtantia perihelii a ſole $BS = \frac{cc}{c+k}$, vnde axis transuerſus $AB = \frac{2c^3}{cc-kk}$, et diſtantia focorum $= \frac{2cck}{cc-kk}$ porroque axis coniugatus $= \frac{2cc}{\sqrt{(cc-kk)}}$ et parameter $= 2c$ vti aſſumſimus.

§. 8. Accedente autem vi lunae, cum ex priori aequatione ſit:

$$2dzd\Phi + zdd\Phi = -\tfrac{1}{2}ndt^2 \,\text{ſin.}\, \theta.$$

erit ob $n$ numerum valde paruum proxime ſaltem

$$zzd\Phi = Adt = cdt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}.$$

et quia orbita terrae fere eſt circularis, ſi pro $z$ ponatur $c$, erit $d\Phi = \frac{dt\sqrt{m}}{\sqrt{2c}}$, cuius aberratio a veritate tam eſt parua, vt in termino per ſe minimo $\frac{1}{2}ndt^2 \,\text{ſin.}\, \theta$ diſcrimen ſenſibile non producat. Simili modo in hoc termino ratio $d\theta$ ad $d\Phi$ cenſeri poteſt conſtans, ſcilicet ratione motus medii lunae a ſole ad motum medium ſolis quae ratio cum ſit 12, 368314 : 1, ponatur compendii cauſa $i = 12,368314$ eritque $d\theta = id\Phi$ proxime. Multiplicetur nunc aequatio per $z$ erit

$$2zdzd\Phi + zzdd\Phi = -\tfrac{1}{2}nzdt^2 \,\text{ſin.}\, \theta.$$

Hic autem in termino per ſe minimo $\frac{1}{2}nzdt^2 \,\text{ſin.}\, \theta$ ponatur $z = c$, et loco $dt$ ſcribatur $\frac{d\Phi\sqrt{2c}}{\sqrt{m}} = \frac{d\theta\sqrt{2c}}{i\sqrt{m}}$ eritque

$$2zdzd\Phi + zzdd\Phi = -\frac{ncdt\,d\theta\,\text{ſin.}\,\theta}{2i\sqrt{m}}\sqrt{2c}$$

cuius integrale ob $dt$ conſtans eſt:

$$zzd\Phi = cdt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc} + \frac{ncdt\,\text{coſ.}\,\theta}{2i}\sqrt{\frac{2c}{m}}$$

ſeu
$$zzd\Phi = cdt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc} + \frac{ncdt\,\text{coſ.}\,\theta}{im}\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$$

Eſt autem area $AST = \frac{1}{2}\int zz\,d\Phi$, vnde ob $dt = \frac{d\theta\sqrt{2c}}{i\sqrt{m}}$ erit:

$$\text{Area } AST = \tfrac{1}{2}ct\sqrt{\tfrac{1}{2}mc} + \frac{ncc\,\text{ſin.}\,\theta}{2iim}$$

ſeu $\frac{1}{2}ct\sqrt{\frac{1}{2}mc} = \text{Ar:}\,AST - \frac{ncc\,\text{ſin.}\,\theta}{2iim}$.

§. 9. Vi lunae ergo primum efficitur, vt tempora non amplius ſint areis proportionalia. Scilicet tempus quo terra ab aphelio A ad T peruenit non proportionale eſt areae AST, ſed huic areae minutae ſpatiolo quopiam, quod ſit vt ſinus anguli STL. Hinc quamuis orbita terrae nullam haberet excentricitatem, tamen eius motus non foret vniformis, ſed modo citius modo tardius incederet. Ponamus tempus vnius anni eſſe $= \odot = 365{,}242305$ dierum, tum niſi luna motum perturbaret, tempore $t$ angulum deſcripſiſſet $AST = \frac{t}{\odot}\, 360°$. Ob lunam autem hic angulus AST aliquanto erit maior, qui exceſſus vt pateat, pro area AST ponatur valor $\frac{1}{2}cc\Phi$ et cum, ſi luna abeſſet, foret $\frac{1}{2}cc\Phi = \frac{1}{2}ct\sqrt{\frac{1}{2}mc}$, ſeu $\Phi = t\sqrt{\frac{m}{2c}} = \frac{t}{\odot}\cdot 360°$, nunc luna ſimul vrgente erit $\frac{1}{2}cc\Phi = \frac{1}{2}ct\sqrt{\frac{1}{2}mc} + \frac{ncc\,\text{ſin.}\,\theta}{2iim}$, ideoque

$$\text{ang. } AST = \Phi = \frac{t}{\odot}\cdot 360° + \frac{n\,\text{ſin.}\,\theta}{iim}.$$

Ad angulum ergo $\frac{t}{\odot}\cdot 360°$, quem motus medius praebet inſuper addi debet angulus $\frac{n\,\text{ſin.}\,\theta}{iim}$; hic ſcilicet angulus ab coniunctione vſque ad oppoſitionem ad locum terrae medium addi, dum autem luna ab oppoſitione ad coniunctionem reuertitur, ſubtrahi debebit. Haec ergo correctio maxima erit in quadraturis, vbi erit $= \frac{n}{iim}$; quae quanta ſit videamus. Cum ſit $i = 12{,}368314$, et $\frac{m}{n} = 70$: fiet $\frac{n}{iim} = 0{,}000093385$, quae eſt menſura anguli

anguli: $19''$, $15'''$. Sin autem Neutoni valore $\frac{m}{n} = 57$ essemus vsi, hic angulus prodiisset $= 23''$, $40'''$, cum tamen consideratio centri grauitatis tantum $15''$ pro hac aequatione praebuisset. At si cum Bernoullio sumamus $\frac{m}{n} = 88$ fiet iste angulus $= 15''$, $19'''$, ita vt, si haec hypothesis esset veritati consentanea, tabulae nostrae solares manerent saluae, sin autem Neutoni sententia esset vera, correctiones nostrarum tabularum forent nimis paruae plus quam semisse, etiamsi eae Neutoni hypothesi sint superstructae. Vnde patet considerationem centri grauitatis effectum lunae nimis paruum exhibere.

§. 10. Cum igitur inuenerimus hanc aequationem

$$zz\,d\Phi = c\,dt\left(1 + \frac{n\,\text{cos}.\,\theta}{i\,m}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}\,m\,c}$$

atque posito $z = \frac{cc}{u}$ pro altera aequatione

$$ddz - z\,d\Phi^2 = -\tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{mcc}{zz} + n\,\text{cos}.\,\theta\right)$$

proxime satisfaciat $u = c - k\,\text{cos}.\,\Phi$, ponamus reuera esse $u = c - k\,\text{cos}.\,\Phi + P$. Primum ergo pro $z$ substituatur $\frac{cc}{u}$, ac prior aequatio transibit in hanc:

$$c^3\,d\Phi = uu\,dt\left(1 + \frac{n\,\text{cos}.\,\theta}{i\,m}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$$

posterior vero in hanc:

$$\frac{-ccddu}{uu} + \frac{2ccdu^2}{u^3} - \frac{ccd\Phi^2}{u} + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{muu}{cc} + n\,\text{cof}.\,\theta\right) = 0$$

seu multiplicando per $u^4$ erit

$$-cc\,uu\,ddu + 2\,cc\,u\,du^2 - cc\,u^3\,d\Phi^2 + \tfrac{1}{2}u^4\,dt^2\left(\frac{muu}{cc} + n\,\text{cof}.\,\theta\right) = 0$$

At ex illa aequatione est:

$$c^6\,d\Phi^2 = \tfrac{1}{2}m\,c\,u^4\,dt^2\left(1 + \frac{n\,\text{cof}.\,\theta}{im}\right)^2 \text{ ideoque}$$

$$\tfrac{1}{2}u^4\,dt^2 = \frac{c^5 d\Phi^2}{m} : \left(1 + \frac{n\,\text{cof}.\,\theta}{im}\right)^2 = \frac{c^5 d\Phi^2}{m} - \frac{2\,nc^5\,d\Phi^2\,\text{cof}.\,\theta}{imm}$$

reiectis sequentibus terminis vtpote nimis paruis; vnde

 fit

fit $-ccuuddu + 2ccudu^2 - ccu^3 d\Phi^2 + c^3 uud\Phi^2 + \frac{nc^3 d\Phi^2 \operatorname{cof.}\theta}{m}(cc - \frac{2uu}{i}) = 0$. Cum autem fit $u = c - k \operatorname{cof} \Phi + P$ erit $du = kd\Phi \operatorname{fin.} \Phi + dP$ et $ddu = kdd\Phi \operatorname{fin.} \Phi + kd\Phi^2 \operatorname{cof.} \Phi + ddP$. His autem valoribus loco $du$ et $ddu$ fubftitutis et per $cc$ divifis, erit, poftquam in terminis per fe minimis vbique loco $u$ fcriptum fuerit $c$ ob $k$ valde paruum:

$$ddP + Pd\Phi^2 = \frac{ncd\Phi^2 \operatorname{cof.}\theta}{m}(1 - \frac{z}{i})$$

in qua aequatione ob pofitum $z = c$, et $n$ valde paruum elementum $d\Phi$ tanquam conftans fpectari poteft. Indeque ergo reperitur $P = \frac{-nc(i-2)\operatorname{cof.}\theta}{mi(ii-1)}$

§. 11. Cum igitur inuento valore ipfius P fit:

$$u = c - k \operatorname{cof.} \Phi - \frac{nc(i-2)\operatorname{cof.}\theta}{mi(ii-1)} \text{ erit}$$

$$z = \frac{cc}{c - k\operatorname{cof.}\Phi} + \frac{nc(i-2)\operatorname{cof}\theta}{mi(ii-1)}.$$

Ex tabulis ergo pro ellipfi computatis quaeratur more confueto diftantia terrae a fole, tum vero ad eam addatur particula $\frac{nc(i-2)\operatorname{cof.}\theta}{mi(ii-1)}$, ficque vera prodibit diftantia folis a terra. A coniunctione ergo vfque ad primam quadraturam diftantia ex tabulis inuenta augeri debet, tum vero a prima quadratura vfque ad alteram minui, atque a quadratura altera ad coniunctionem vfque denuo augeri. Conueniunt haec apprime cum titulis in tabulis folaribus inuentis, vbi etiam correctiones diftantiae cofinui diftantiae lunae a fole repertae funt proportionales; tantum ergo fupereft, vt videamus, quantum vera quantitas harum correctionum ab illis differat. Hunc in finem indagemus aequationem maximam, quae erit $= \frac{nc(i-2)}{mi(1+ii)}$. Pofito ergo $c = 100000$ ob $i = 12,368314$, erit

$i-2$

$i-2=10,368314$, et $ii-1=151,9752$, atque adeo $\frac{c(i-2)}{i(ii-1)}=551,6005$ in hypotheſi $\frac{m}{n}=70$ haec correctio eſt $=7,8800$ et in hypotheſi Neut. $\frac{m}{n}=57$ ea eſt $=9,6772$ et in hypotheſi Bernoulliana $\frac{m}{n}=88$ ea fit $=6,2682$. Atque ſecundum hanc vltimam hypotheſin correctio maxima pro logarithmo diſtantiae ſolis a terra, qui ad ſex figuras decimales exhiberi ſolet, futura eſſet 27, cum in tabulis noſtris ſit 31. ex Neutoniana vero hypotheſi haec correctio prodiret $=42$; ita vt tabulae noſtrae non multum a veritate abludant, ſi quidem aſſumamus veritatem intra hypotheſes Neutoni, et Bernoulli, quod quidem eſt veriſimillimum conſiſtere.

§. 12. Facilius valor litterae P, qua correctio diſtantiae terrae a ſole continetur, inueniri poteſt, ſi excentricitas orbitae negligatur. Cum enim excentricitas ſit valde parua, ea in valore ipſius P nullam mutationem inferet. Quamobrem cum excentricitas pendeat a littera $k$ ſumamus $k=0$, eritque ſi luna non adeſſet $z=c$, accedente autem luna ſit $z=c+P$, eritque P quantitas minima nullam ſenſibilem mutationem patiens, etiamſi excentricitas coniungatur. Poſito autem $z=c+P$ ob $zz=cc+2cP$ reiecto termino PP ob paruitatem, prima aequatio abibit in hanc formam:

$$c\,d\Phi+2P\,d\Phi=dt\left(1+\frac{n\operatorname{cof.}\theta}{im}\right)V\tfrac{1}{2}mc$$

poſterior vero in hanc:

$$ddP-c\,d\Phi^2-P\,d\Phi^2=-\tfrac{1}{2}dt^2\left(m-\frac{2mP}{c}+n\operatorname{cof.}\theta\right)$$

Verum ſi luna abeſſet, foret $c\,d\Phi=dt\,V\tfrac{1}{2}mc$, et $\tfrac{1}{2}m\,dt^2=c\,d\Phi^2$, qui valor in terminis per ſe minimis adhiberi

poteſt

potest, pro maioribus vero erit

$$\tfrac{1}{2} mc\,dt^2 \left(1 + \frac{2n\cos.\theta}{im}\right) = cc\,d\Phi^2 + 4cP\,d\Phi^2$$

seu $\frac{1}{2} m\,dt^2 = d\Phi^2 \left(c + 4P - \frac{2nc\cos.\theta}{im}\right)$, quo valore in altera aequatione substituto habebitur.

$$ddP - P\,d\Phi^2 = -4P\,d\Phi^2 + \frac{2ncd\Phi^2\cos.\theta}{im} + 2P\,d\Phi^2 - \frac{ncd\Phi^2\cos.\theta}{m}$$

seu $ddP + P\,d\Phi^2 = \frac{2ncd\Phi^2\cos.\theta}{im} - \frac{ncd\Phi^2\cos.\theta}{m}$

ad cuius integrale inueniendum, quia $d\theta = i\,d\Phi$, et $d\Phi$ constans assumi potest, ponatur $P = \alpha c \cos.\theta$, erit $dP = -\alpha icd\Phi \sin.\theta$ et $ddP = -\alpha iicd\Phi^2 \cos.\theta$, quibus valoribus substitutis aequatio per $cd\Phi^2 \cos.\theta$ diuisa erit:

$$-\alpha ii + \alpha = \frac{2n}{im} - \frac{n}{m} = \frac{-n(i-2)}{im}$$

ideoque $\alpha = \frac{n(i-2)}{mi(ii-1)}$ et $P = \frac{nc(i-2)\cos.\theta}{mi(ii-1)}$

vti ante inuenimus.

§. 13. Cum igitur excentricitas in valorem ipsius P non ingrediatur, atque sublata luna inuentum sit $z = \frac{cc}{c-k\cos.\Phi}$ erit, si vis lunae motum terrae afficiat:

$$z = \frac{cc}{c-k\cos.\Phi} + \frac{nc(i-2)}{mi(ii-1)}\cos.\theta$$

qui valor in aequatione prius inuenta substitutus praebebit

$$\frac{c^3 d\Phi}{(c-k\cos.\Phi)^2} + \frac{2nccd\Phi(i-2)\cos.\theta}{mi(ii-1)(c-k\cos.\Phi)} = dt\left(1 + \frac{n\cos.\theta}{mi}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$$

Quae aequatio reiectis terminis minimis transibit in hanc

$$dt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc} = \frac{c^3 d\Phi}{(c-k\cos.\Phi)^2} - \frac{ncd\Phi\cos.\theta}{mi} + \frac{2ncd\Phi(i-2)\cos.\theta}{mi(ii-1)}$$

Ex qua ad datum tempus $t$ verus angulus AST definietur. Ponamus si luna euanesceret, tempori $t$ respondere anomaliam veram $v$, eritque $dt\sqrt{\frac{1}{2}mc} = \frac{c^3 dv}{(c-k\cos.v)^2}$ nunc autem accedente luna sit angulus AST $= \Phi = v + \omega$, erit $\frac{c^3 d\Phi}{(c-k\cos.\Phi)^2} = \frac{c^3 dv}{(c-k\cos.v)^2} + c\,d\omega$ proxime, quia tam $k$ quam

quam $\omega$ ſunt quantitates minimae, his ergo valoribus ſubſtitutis fiet:

$$0 = d\omega - \frac{n d\Phi \cos\theta}{mi}\left(1 - \frac{2(i-2)}{ii-1}\right)$$

et integrando ob $d\Phi = \frac{d\theta}{i}$ habebitur:

$$\omega = \frac{n \sin.\theta}{mii}\left(1 - \frac{2(i-2)}{ii-1}\right) = \frac{n \sin.\theta}{m} \cdot 0,00564505.$$

Tantus ergo angulus ad anomaliam veram ex tabulis ellipticis inuentam $v$ addi debet, qui aliquanto minor eſt eo, quem ſupra §. 9. nulla ipſius orbitae variationis habita ratione elicuimus. Correctio ergo haec fit maxima dum luna in quadraturis verſatur eritque tum, vbi ſin. $\theta = 1$, aequalis angulo, cuius menſura eſt $= \frac{n}{m} \cdot 0,00564505$. Quare pro variis hypotheſibus fractionis $\frac{m}{n}$ haec correctio maxima ſequenti modo ſe habebit

ſi $\frac{m}{n} = 57$ erit $\omega = 20'', 25'''$

ſi $\frac{m}{n} = 70$ erit $\omega = 16'', 38'''$

ſi $\frac{m}{n} = 88$ erit $\omega = 13'', 14'''$

§. 14. Propter lunam ergo locus ſolis ex tabulis ellipticis inuentus duplici modo corrigi debet, quorum alter ſpectat longitudinem ſolis in ecliptica, alter diſtantiam ſolis a terra. Primo ſcilicet correctio longitudinis ſolis ita ſe habet, vt dum luna a coniunctione ſolis ad oppoſitionem progreditur addi contra vero a plenilunio vſque ad nouilunium a loco ſolis ſubtrahi debeat; haecque correctio eſt ſinui diſtantiae lunae a ſyzygiis proportionalis, vnde innoteſcit ſi modo correctio maxima, quae quadraturis reſpondet, fuerit cognita. Vidimus autem hanc correctionem pro variis hypotheſibus ſequenti modo ſe habere;

| Hypothesis | | | Maxima correctio loci solis in ecliptica |
|---|---|---|---|
| Neutoniana $\frac{m}{n}$ | = | 57 | 20″, 25‴ |
| ex Volumine $\frac{m}{n}$ | = | 70 | 16″, 38‴ |
| Bernoulliana $\frac{m}{n}$ | = | 88 | 13″, 14‴ |

Deinde distantia solis a terra inuenta ex tabulis ita debet corrigi, vt ea ab vltimo quadrante vsque ad priorem, quo tempore minor lunae pars quam semissis est illuminata, augeri, a prima autem quadratura ad alteram, quo tempore maior lunae portio quam semissis illuminata spectatur, minui debeat. Est vero haec correctio cosinui anguli, quo luna a syzygiis distat, proportionalis: maxima ergo est in ipsis syzygiis, vbi logarithmus distantiae solis a terra, qui ad 6 notas post characteristicam sequentes exhiberi solet, sequentibus numeris vel augeri vel diminui debet.

| Hypothesis | | | Maxima Correctio Log. distantiae solis a terra |
|---|---|---|---|
| Neutoniana $\frac{m}{n}$ | = | 57 | 42 |
| ex Volumine $\frac{m}{n}$ | = | 70 | 34 |
| Bernoulliana $\frac{m}{n}$ | = | 88 | 27. |

§. 15. In tabulis autem meis solaribus, vbi has correctiones ex consideratione communis centri grauitatis terrae et lunae elicui, quanquam hypothesi Neutoniana sum vsus, tamen eas notabiliter minores obtinui, quam hic prodierunt. Namque maxima correctio loci solis in ecliptica ibi erat 15″, cum hic ex eadem hypothesi 20″, 25‴ sit inuenta; atque maxima correctio logarithrithmi distantiae solis a terra ibi erat 31, hic vero 42 quarum vtraque hic fere triente maior est quam ibi. Ex quo intelligitur commune centrum grauitatis terrae et lunae non secundum regulas Keplerianas in ellipsi incedere, vti tum assumseram. Quanquam autem iam ibi innueram, hoc principium examen geometricum non sustinere, tamen eius aberratio non tanta videbatur, quanta nunc est reperta. Hancobrem tabulae illae solares, si hypothesis Neutoniana veritati esset consentanea, vtique emendatione indigerent: at cum Neutonus lunae vim nimis magnam facere videatur, emendatio ista tabulas magis a veritate abduceret. Si enim has tabulas ad mentem Celeb. Bernoullii, qui vim lunae in ratione 8 ad 5 fere minuit, sequi vellem, correctiones ibi adhibitas aliquantillum imminuere deberem. Quare si veritas intra hos duos quasi limites contineatur, atque valor $\frac{m}{n}$ aliquantillum maior sit quam 70, puta 75 tum eae ipsae correctiones proditurae essent, quae in tabulis sunt vsurpatae. Talis autem hypothesis propius ad mentem Cel. Bernoullii accederet, atque corpus lunae paulisper tantum rarius esset terra; quae ambae rationes tantum ponderis habere videntur, vt tabulae ante traditae adhuc nulla emendatione indigeant; hancque ob causam eas immutatas relinquo.