1750

Examen artificii navis a principio motus interno propellendi

Leonhard Euler

EXAMEN ARTIFICII NAVIS A PRINCIPIO MOTVS INTERNO PROPELLENDI QVOD QVONDAM AB ACVTISSIMO VIRO IACOBO BERNOVLLI EST PROPOSITVM

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

In operibus *Iacobi Bernoullii*, quae praeterito Anno Geneuae sunt edita, pag. 1109 reperitur insertum schediasma, cui hic titulus est praefixus: *Artificium impellendi nauem a principio motus intra ipsam nauem concluso*; in quo Vir Celeberrimus ostendere conatur, etiamsi vulgo naues non nisi a viribus extrinsecus petitis propelli posse putentur, tamen fieri posse, vt nauis a sola vi interna ad motum incitetur. Quod artificium vt maxime paradoxon videtur, ita si quidem optatum effectum praestaret, plerisque aliis modis, quibus naues promoueri solent, merito longe esset praeferendum. Cum igitur non constet, vtrum periculum vnquam sit factum atque experimentum ex voto successerit, operae pretium fore videtur, hunc mechanismum diligentius expendere atque ad leges motus examinare.

§. 2. Cum nauta stans in littore firmo nauem possit conto propellere, in ipsa autem naui constitutus idem praestare nequeat, propterea quod quantum nauem prorsum impellat, tantumdem eam pedibus carinae innixus retrorsum vrgeat; recte quidem concludi videtur, naui non

non poſſe motum induci a vi, quae tota intra nauem exiſtat. Quantumuis ſcilicet homines aliaeue machinae in naui conſtitutae eandem propellere annituntur, tamen quia reactio actioni perpetuo eſt aequalis, et vtraque a naui aeque ſuſtinetur, nullum inde motum adipiſcitur. Hinc omnes eorum, qui in naui verſantur, conatus ad nauem promouendam ſunt irriti, niſi ſeſe littori aliiue corpori extra nauem ſito applicare queant.

§. 3. Hanc veritatem Bernoullius minime ignorauit, eam vero non ad omnis generis vires patere exiſtimauit, ſed putauit eam ad illas tantum vires, quae vulgo mortuae vocari ſolent, reſtringi oportere, quae ſolis preſſionibus contineantur; alterum autem virium genus quae viuae appellentur atque a percuſſione oriantur, ab hac lege eſſe excipiendum. Hinc non dubitat, quin in naui eiusmodi ictus et percuſſiones effici queant, a quarum impetu naui motus inducatur. Quae opinio, ſi ad mentem plerorumque recentiorum philoſophorum, qui inter vires viuas et mortuas ſummum diſcrimen ſtatuunt, explicetur, firmiſſimo fundamento inniti videatur; cum autem oſtendiſſem hoc diſcrimen omni fundamento carere, nihilque per vires viuas effici poſſe, quod non idem viribus mortuis praeſtari queat, maxime erit verendum, ne omnis motus, quem Bernoullius ope percuſſionum nauibus imprimere conatur, euaneſcat.

§. 4. Machina autem, quam Iac. Bernoulli in hunc finem propoſuit, ita ſe habet: in naui DEFG conſtitui iubet tabulatum firmum AF in ſitu ad horizontem perpendiculari, quod ſit perfecte elaſticum puta chalybeum aut reticulatum, eo ſaltem in loco C vbi ictus Tab IV. fig. 1.

 recipit.

recipit. Huic tabulato in A appenſum ſit pendulum AB cum annexo pondere B itidem perfecte elaſtico, quod, dum per quadrantem BC deſcendit impellet tabulatum, et ſimul totum nauigium proram G verſus promouebit. Poſt ictum autem ob elaſticitatem reſiliet, iterumque deſcendendo ſimiles ictus continuo repetet; ſicque naui motum perennem inducet. Ne autem iſte penduli motus ob reſiſtentiam aeris ſenſim langueſcat, ſed pendulum conſtanter ad quadrantis initium B aſcendendo pertingat, hoc ope automati, quemadmodum in horologiis pendulis fieri ſolet, obtineri poſſe indicat.

§. 5. Si ad hos ictus ſucceſſiuos, quibus tabulatum A F continuo percutitur, ſolum reſpiciamus, dubium prorſus eſt nullum, quin iis nauis ad motum incitetur, moleſque penduli facile eousque augeri poſſet, vt nauis ſuperata aquae reſiſtentia, quantumuis magnam conſequatur celeritatem. Verum hic quoque animaduertendum eſt pendulum, dum alternatim aſcendit et deſcendit vim contrariam in nauem exerere, qua ea puppim D verſus ſollicitetur. Quoniam enim pendulum in quouis ſitu AM tam a pondere, quam a vi centrifuga tenditur, hanc vim punctum ſuſpenſionis A ſuſtinet, ab eaque ſecundum directionem AM trahitur, quae vis cum perpetuo retrorſum dirigatur, nauis ab ea retrorſum impelletur. Hinc impulſio nauis proram G verſus efficietur tantum exceſſu, quo vires percuſſionis ſuperant has continuas ſollicitationes retro directas, ſiquidem huiusmodi exceſſus detur.

§. 6.

§. 6. Hic quidem maxima philosophorum pars, qui Leinbizii ideas de viribus fortasse male expositas sequuntur, viresque viuas mortuis quasi infinities maiores putant, asseuerare non dubitabunt, quin nauis hoc modo notabilem motum sit impetratura, neque admodum necessarium putabunt, vt virium illarum nauem retro pellentium ratio habeatur, cum vis percussionis nauem propellens ipsis incomparabiliter maior videatur. Interim tamen Vir sagacissimus Iacobus Bernoullius longe aliter existimauit; atque effectum ab istis viribus mortuis oriundum studiose inuestigauit, eumque ab effectu, quem quilibet ictus producit, subduxit, vt veram nauis propulsionem adipisceretur. Inuenit autem calculo subducto, vires percussionum aliquantum praeualere viribus pendulum continuo tendentibus, hincque demum conclusit, nauem ope huiusmodi penduli propelli debere.

§. 7. Quamquam autem vim, qua nauis a penduli percussionibus propellitur, non multo maiorem deprehendit altera vi a tensionibus orta, tamen naui ab ea non mediocrem motum imprimi existimat, vt etiam aquae resistentiae ratione habita, nauis non contemnendam celeritatem acquirere posset. Euoluto enim casu, quo penduli pondus centesimae totius nauis parti aequale assumitur, collegit nauem singulis minutis primis per spatium $82\frac{1}{2}$ pedum propelli debere, vbi quidem diminutionis resistentiae ab idonea prorae figura oriundae nullam habuit rationem. Accommodato autem hoc casu ad nauem rostratam, cuius resistentiam decuplo minorem assumit, celeritatem ipsi impressam vltra 260 pedes

des ſingulis minutis primis, 15649 pedes vna hora confecturam eſſe contendit, quae celeritas certe tanta eſt, vt conſueta remigatione vix maior obtineri poſſit.

§. 8. Quod ſi ergo iſte naues propellendi modus tantum valeret, dubium certe eſſet nullum, quin is non ſolum remigationi longe eſſet anteferendus, ſed etiam ſaepe maximo cum fructu loco venti adhiberi poſſet. Cum enim pro ratione molis nauis ſatis magna vis ad remos vibrandos requiratur, ita in praeſente mechaniſmo nulla fere vi eſt opus. Poſtquam enim pendulum ſemel ad ſitum ſummum eſt eleuatum, poſt primum ictum ſponte ad eandem fere altitudinem aſcendit, ob maximam cum ipſius corporis tum tabulati elaſticitatem; et, quantum aſcenſus in quaque vibratione tam a reſiſtentia aeris, quam a defectu perfectae elaſticitatis imminuitur, id ab exigua vi facile reparatur, ita vt continuus penduli motus vel a puero conſeruari poſſet. Quin etiam loco vnius penduli, ne nimia eius maſſa impedimento eſſet, plura minora adhiberi poſſent, quae parem vel maiorem effectum praeſtarent; neque difficile foret modum excogitare, quo huiusmodi mechaniſmus ſine vllo nauigationis incommodo ad vſum accommodaretur.

§. 9. Verum haec vtilitas in re nautica nimis eſt magna, quam ut eam tamdiu latere potuiſſe veriſimile ſit, praeſertim cum non admodum abſcondito mechanismo contineatur, atque adeo ob ipſam commodorum magnitudinem merito in ſuſpicionem incurrit. Neque etiam mediocriter haec ſuſpicio augetur, quod deſcriptio huius artificii tantum in opuſculis poſthumis Iacobi Bernoulli

repe-

reperiatur, eoque viuente nunquam fit diuulgata. Minime autem probabile videtur, Virum beate defunctum tantum inuentum quod certe omnibus reliquis ipsius inventis, etiamsi sint maxima, palmam longe praeriperet, celaturum fuisse, nisi de felici successu ipse dubitauisset. Quamobrem si demonstrauero huiusmodi penduli ictibus naui nullum prorsus motum imprimi, nihil quicquam de laude ac meritis summi huius Viri detrahetur, cum ipse quoad vixerit, probe cauerit, ne meditatio nondum satis polita in publicum protruderetur.

§. 10. Si igitur effectum huiusmodi penduli ictuum inuestigare velimus, primum dum pendulum per quadrantem BMC descendit, quantum nauis ab eo retro vrgeatur, definire debebimus, deinde ipse ictus erit considerandus, quo nauis propellitur motumque qui naui proram versus inde imprimitur exacte determinari oportebit. Denique cum hic motus a sequente post reflexionem ascensu iterum retardetur, videndum erit, vtrum nauis, postquam pendulum ad B vsque est reuersum motum habeat reliquum antrorsum directum, nec ne, et quantus is sit futurus. Quodsi enim nauis, cum initio descensus quieuisset, post finitum ascensum iterum in statum quietis redigatur; sicque initio secundi descensus denuo in quiete versetur, dubium erit nullum, quin nauis perpetuo in eodem fere loco sit permansura, ita vt totus penduli effectus in alternis progressionibus et regressionibus, quae se mutuo exacte destruant, consumatur. Determinatio autem huius motus reciproci, si resistentiae aquae rationem habere voluerimus, maxime fieret difficilis, neque sine calculo molestissimo expediri posset.

§. 11.

§. 11. Hancobrem aliam viam faciliorem inire ſtudebo qua effectus a ſucceſſiuis huius modi penduli percuſſionibus oriundus non minus diſtincte cognoſci et diiudicari queat. Nauim ſcilicet in loco ſuo penitus fixam contemplabor, atque ſollicitationum momentanearum, quibus nauis durante quouis penduli deſcenſu et aſcenſu retro pellitur, ſummam inueſtigabo, deinde ſimili ratione vim ictus, qua nauis propelleretur, ſeorſim exprimam, vt hoc modo tam tota vis, qua nauis a qualibet penduli actione retro impellitur, quam vis propellens innoteſcat. Abſoluitur autem quaelibet penduli actio primum deſcenſu, ſecundo ictu, ac tertio aſcenſu. Quodſi ergo ſumma virium pellentium ex deſcenſu et ſubſequenti aſcenſu natarum aequalis fuerit vi ictus ad nauem propellendam directae, tuto concludere poterimus, naui, etiamſi eſſet libera, nullum motum progreſſiuum induci, ſin autem vel vis percuſſionis vel ſumma virium retrahentium praeualeat, naui liberae quoque vel motus antrorſum vel retrorſum imprimetur.

§. 12. Cum igitur nauis quouis deſcenſus penduli momento puppim verſus ſollicitetur, quaeratur huius vis magnitudo pro quouis penduli ſitu AM, eaque per elementum temporis multiplicetur. Haec expreſſio differentialis deinceps integretur, quae ad totum deſcenſum adaptata praebebit ſummam omnium virium retrahentium, ſimilique modo haec virium ſumma pro aſcenſu colligatur. Conſtat autem ſi nauis actioni harum virium libere obſequi poſſet, tum ab iis ipſi motum inductum iri, cuius quantitas, ſeu productum ex maſſa in celeritatem geni-

genitam illi ipſi integrali exacte futurum ſit aequale. Deinde quaeratur quantitas motus quae naui, ſi libera eſſet, ab ictu penduli imprimeretur, haecque cum illa comparetur, vt pateat vtrum altera ſit maior, an vtraque aequalis. Hocque modo tutiſſime concludere poterimus, vtrum nauis ab his viribus vllum conſecutura ſit motum, nec ne?

§. 13. Cum igitur in hac inueſtigatione multum interſit, vtrum pendulum ſit ſimplex an compoſitum; ponamus primo pendulum eſſe ſimplex, ita vt tota eius maſſa in ipſius centro grauitatis M collecta concipi queat. Deſcribat itaque hoc pendulum in quolibet aſcenſu et deſcenſu integrum quadrantem BMC. Sit longitudo Fig. 2. penduli $AM = AC = a$, eius pondus $= M$: atque deſcendendo ex B elapſo tempore t iam peruenerit in ſitum AM, in quo a recta verticali AC etiamnum diſtet angulo $CAM = \Phi$: erit celeritas eius in M debita altitudini $LM = a \operatorname{coſ.} \Phi$: hincque ipſa celeritas $= \sqrt{a \operatorname{coſ.} \Phi}$, qua cum tempuſculo dt abſoluat arculum $= -a d\Phi$ erit $dt = -\frac{a d\Phi}{\sqrt{a \operatorname{coſ.} \Phi}}$. Hanc enim legem conſtanter obſeruabo, vt celeritates per radices quadratas ex altitudinibus ipſis debitis, et temporis elementa per ſpatiola interea percurſa ad celeritates applicata exprimam.

§. 14. Inuenta altitudine celeritati penduli in M debita $= a \operatorname{coſ.} \Phi$, erit vis centrifuga $= \frac{2 M a \operatorname{coſ.} \Phi}{a} = 2 M \operatorname{coſ.} \Phi$, qua filum AM tendetur. Deinde cum pendulum a grauitate $= M$ deorſum vrgeatur ſecundum directionem verticalem MP, haec vis ſecundum directiones MQ ad AM normalem, et MR reſoluta dabit pro directione MQ vim $= M \operatorname{ſin.} \Phi$, et pro directione MR vim $M \operatorname{coſ.} \Phi$;

Φ; quarum illa ita tota ad penduli motum accelerandum impenditur, vt filum AM prorſus non tendat. Contra vero altera vis $MR = M \operatorname{cof.} \Phi$ tota in filo AM tendendo inſumetur. Hinc ergo et a vi centrifuga coniunctim filum AM tendetur vi $= 3 M \operatorname{cof.} \Phi$, a qua punctum ſuſpenſionis A in directione AM ſollicitabitur. Quare ex huius reſolutione naſcetur vis nauem retro vrgens $= 3 M \operatorname{cof.} \Phi \operatorname{fin.} \Phi$.

§. 15. Multiplicetur ergo haec vis $3 M \operatorname{cof.} \Phi \operatorname{fin.} \Phi$, qua nauis puppim verſus impellitur, per elementum temporis $dt = \frac{-a d\Phi}{\sqrt{a \operatorname{cof.} \Phi}} = \frac{-d\Phi \sqrt{a \operatorname{cof.} \Phi}}{\operatorname{cof.} \Phi}$; ac prodibit ſollicitatio momentanea $= -3 M d\Phi \operatorname{fin.} \Phi \sqrt{a \operatorname{cof.} \Phi}$, cui elementum motus geniti eſt aequale. Quoniam ergo eſt $-d\Phi \operatorname{fin.} \Phi = d . \operatorname{cof.} \Phi$, ſi ponatur $\operatorname{cof.} \Phi = z$ erit ſollicitatio momentanea $= 3 M dz \sqrt{az}$ cuius integrale eſt $2 M z \sqrt{az} = 2 M \operatorname{cof.} \Phi \sqrt{a \operatorname{cof.} \Phi}$. Haecque expreſſio praebet ſummam omnium ſollicitationum, quibus nauis retro vrgetur, dum pendulum per arcum BM deſcendit. Fiat ergo $\Phi = 0$, et prodibit ſumma ſollicitationum momentanearum ex deſcenſu penduli integro ortarum $= 2 M \sqrt{a}$, cui cum aequalis ſit ſumma ſimilium ſollicitationum ex ſubſequente aſcenſu reſultans, in qualibet penduli actione nauis retro impelletur a viribus, quarum ſumma eſt $= 4 M \sqrt{a}$; ab hisque naui, ſi libera eſſet motus imprimeretur, cuius quantitas futura eſſet $= 4 M \sqrt{a}$.

§. 16. Quaeramus nunc etiam quantam vim pendulum exerat in nauem, dum in tabulatum elaſticum A
Fig. 3. F impingit; vbi quidem tabulatum tanquam immobile ſpectabimus. Incurrit autem in hoc tabulatum corpus penduli, cuius maſſa ſeu pondus eſt $= M$, cum celeri-

tate

tate debita altitudini a, quippe ex qua in descensu est delapsum. Quo autem effectum collisionis distinctius intueri queamus, tabulato in C annexum statuamus elastrum CD, in quod corpus incurrat, cuius quidem longitudinem quantumuis exiguam concipere licet. Tempore iam $= t$, postquam collisionis initium in D erat factum, pertigerit corpus in M, et elastrum in statum MC compresserit. Ponatur spatium DM$= x$, celeritas corporis in M residua debita altitudini $= v$, et vis elastri CM, qua se expandere conatur $=$P.

§. 17. His positis, dum pendulum vlterius per spatiolum $= dx$ penetrabit, erit per leges sollicitationum $M\,dv = -P\,dx$. Sed quoniam tabulatum AF indeque ipsa nauis in hoc statu antrorsum impellitur vi $=$P, valorem $\int P\,dt$, quamdiu conflictus durat, scrutari debemus. Cum autem sit $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$; superior aequatio abibit in hanc $\frac{M\,dv}{\sqrt{v}} = -P\,dt$, vnde fit $\int P\,dt = -\int \frac{M\,dv}{\sqrt{v}} = C - 2M\sqrt{v}$: quae quantitas cum initio conflictus euanescere debeat, erit $C = 2M\sqrt{a}$ ideoque $\int P\,dt = 2M\sqrt{a} - 2M\sqrt{v}$. Cum iam ambo corpora ponantur perfecte elastica, finito conflictu corpus habebit celeritatem aequalem illi, qua incurrerat, et quae erat $= \sqrt{a}$, sed contrarie directam fietque propterea $\sqrt{v} = -\sqrt{a}$. Quo valore substituto prodibit summa virium momentanearum ex conflictu ortarum nauemque propellentium $= 4M\sqrt{a}$.

§. 18. Motus ergo, quem percussio penduli naui imprimere conatur proram versus praecise aequalis est illi, quem vires pendulum tendentes, quamdiu descensus et ascensus vnus absoluitur, in contrariam directionem generare valent. Ex quo manifestum est, etiamsi navis ab ictu penduli propulsionem proram versus accipiat; tamen hunc totum motum deinceps ab ascensu penduli subsequenteque descensu omnino sublatum iri, quae destructio cum post singulos ictus eueniat, nauis nullum motum progressiuum consequi poterit, vti Celeb. Iacobus Bernoulli est suspicatus. Quanquam enim idem fere raciocinium, quo hic vsus sum instituit, viresque nauem retrahentes simili modo aestimauit, tamen in determinatione vis propellentis a percussione oriundae, errorem quendam commisit, quem Cl. Cramerus eius Commentator probe animaduertit, neque tamen ob calculi, qui ipsi subeundus videbatur, molestiam correxit.

§. 19. Neque vero haec perfecta virium propellentium et repellentium compensatio tantum locum habet, cum pendulum per integrum quadrantem mouetur; sed etiamsi minores arcus oscillando absoluat, perinde obseruabitur, id quod ostendisse operae erit pretium. Descendat ergo pendulum ante consideratum simplex AM per arcum quadrante minorem HMC, sitque positis vt ante longitudi-
Fig. 4. ne $AM = a$, et pondere corporis $M = M$, angulus $HAC = \theta$: et elapso tempore $= t$ descripserit arcum HM, sitque angulus $MAC = \Phi$; erit ductis horizontalibus HI et MK, altitudo $AI = a \operatorname{cos.} \theta$ et $AK = a \operatorname{cos.} \Phi$. Hinc ergo erit $IK = a(\operatorname{cos.}\Phi - \operatorname{cos.}\theta)$ quae est altitudo celeritati corporis in M debita: quare eius vis centrifuga erit $= 2M(\operatorname{cos.}\Phi - \operatorname{cos.}\theta)$, qua filum penduli AM tendetur. Cum autem tempusculo dt pendulum per arculum $= -a\,d\Phi$ descendat cum celeritate $= \sqrt{a(\operatorname{cos.}\Phi - \operatorname{cos.}\theta)}$, erit $dt = \frac{-d\Phi\sqrt{a}}{\sqrt{(\operatorname{cos.}\Phi - \operatorname{cos.}\theta)}}$.

§. 20.

§. 20. Confideretur nunc etiam vis grauitatis, qua pendulum in M ſecundum MP deorſum vrgetur vi $=M$; hinc per reſolutionem naſcetur vis pendulum tendens MR $= M\cos\Phi$. Quamobrem filum AM omnino tenditur vi $= 3M\cos\Phi - 2M\cos\theta$; quae cum habeat directionem obliquam, pro directione horizontali dabit vim $= 3M\cos\Phi \sin\Phi - 2M\cos\theta \sin\Phi$. Haec ergo per elementum temporis $dt = \frac{-d\Phi\sqrt{a}}{\sqrt{(\cos\Phi-\cos\theta)}}$ multiplicetur, vt prodeat ſollicitatio momentanea $= \frac{-Md\Phi\sin\Phi(3\cos\Phi-2\cos\theta)\sqrt{a}}{\sqrt{(\cos\Phi-\cos\theta)}}$. Ponatur $\cos\Phi = z$, et $\cos\theta = b$ erit $-d\Phi\sin\Phi = dz$, et ſollicitatio momentanea erit $= \frac{+Mdz(3z-2b)\sqrt{a}}{\sqrt{(z-b)}}$; cuius integrale eſt $= (+2Mz\sqrt{a(z-b)} = (+2M\cos\Phi\sqrt{a(\cos\Phi-\cos\theta)}$; quod quia initio vbi $\Phi = \theta$ euaneſcere debet, erit $C = 0$, ita vt ſumma omnium virium momentanareum deſcenſui per arcum HM reſpondentium ſit $= 2M\cos\Phi\sqrt{a(\cos\Phi-\cos\theta)}$.

§. 21. Ponatur iam $\Phi = 0$, ac pro toto penduli deſcenſu erit ſumma ſollicitationum momentanearum $= 2M\sqrt{a(1-\cos\theta)} = 2M\sqrt{CI}$: ſeu cum $\sqrt{CI}$ exprimat celeritatem penduli in imo puncto C, iſta ſumma aequabitur duplae quantitati motus, quem pendulum in C acquirit. Cum iam aſcenſus ſimilis ſit deſcenſui, ſumma virium nauem retro pellentium, quae tam ex aſcenſu quam deſcenſu originem trahunt, erit $= 4M\sqrt{CI}$. Ex §. 17 autem obtinebimus vim, quae ex ictu reſultat, ſi loco celeritatis ibi conſideratae $\sqrt{a}$ ſubſtituamus hanc, qua pendulum in tabulatum incurret, quae eſt $= \sqrt{CI}$. Quo facto reperietur quoque vis ex percuſſione orta $= 4M\sqrt{CI}$: atque adeo etiam hoc caſu vires in deſcenſu et et ascensu retro pellentes simul sumtae aequales erunt vi, qua nauis ab ictu antrorsum propellitur. Neque ergo hoc quoque casu ab impulsionibus penduli naui motus progressiuus induci poterit.

§. 22. Quae hactenus de pendulis simplicibus sunt demonstrata, ita cum lege quadam constantissima naturae coniuncta videntur, vt iam pro certo affirmare possimus, in pendulis quoque quibusuis compositis eandem perfectam aequalitatem inter vires propellentes ac repellentes deprehensum iri. Quod etsi ex natura centri oscillationis facile ostendi posset, tamen ceteris naturae legibus tam videtur consentaneum, vt primis mechanicae principiis merito sit annumerandum. Quemadmodum ergo in pressionibus, seu viribus mortuis actioni semper aequalis et contraria reactio, ita quoque in percussionibus similis aequalitas locum habet, quod eo minus est mirandum, cum quaelibet percussio ad pressiones reuocari queat. Plus itaque virium quilibet ictus praestare nequit, quam ad motum corporum collidentium generandum requiritur, atque hancobrem naues non solum hoc modo Bernoulliano propelli non possunt, sed quaecunque aliae machinationes, quae totae naui sunt inclusae nullique principo externo innituntur, aeque erunt inutiles, neque nauibus vllum motum imprimere valebunt.

§. 23. Stabilito igitur hoc principio vicissim eiusmodi problemata resoluere poterimus, quae alias solutu longe futura essent difficillima. Vti si pendulum superius praeterea fuerit flexile, atque non in circulo sed alia quacunque linea curua moueatur, praetereaque resistentia aliaque motus impedimenta affuerint, quae res calculum insuperabilem redderent; vel si alia quaecunque machina in naui

con-

constituatur, quae partim pressionibus partim percussionibus in nauim agat; nihilominus certissime affirmare poterimus, perfectum continuo existere aequalitatem inter vires nauem propellentes et eas, quae in regionem oppositam effectum exerant. Ac si vires quidem sint omnes prementes seu mortuae, istud aequilibrium quolibet instanti existit, sin autem machina insuper percussiones complectatur, tum quidem non quouis momento aequilibrium cernetur, sed fieri potest vt nauis per aliquod temporis interuallum a viribus prementibus propellatur; qui autem effectus deinceps subito ab insequente percussione penitus destruatur. Quamdiu scilicet ipsa machina in motu versatur, et extra aequilibrii statum est posita, naui motus imprimetur, quam primum autem machina in pristinum statum restituitur, simul nauis in situm primum redigetur.

§. 24. Ratio autem huius principii multo clarius perspicietur, si primum aquam omni resistentia carentem assumamus, ita vt nauis perpetuo motum impressum sine vllo impedimento prosequi possit. In hac hypothesi, si super naui huiusmodi pendulum aliaue quaecunque machina agitetur, quae nullum recipiat motus principium externum, ex legibus motus manifestum est commune grauitatis centrum ipsius nauis ac machinae quiescere debere; nisi quatenus verticaliter vel ascenditvel descendit. Haec enim lex non solum obseruatur, cum machina per pressiones in nauem agit, quo casu tam in nauem quam in machinam aequales vires exeruntur: sed etiam si ictus seu percussiones peraguntur, centri grauitatis status non secus perturbabitur. Quomodocunque ergo machina intra nauem existens fuerit comparata, eiusque actio tum ex

pressio-

pressionibus quam percussionibus composita, centrum commune grauitatis secundum horizontem nullum motum consequi poterit, neque idcirco vlla huiusmodi machina apta erit ad nauem promouendam.

§. 25. Quodsi vero resistentia aquae simul consideretur, tum lex ante memorata de centro grauitatis aliquantum infringitur, dum nauis a machina sollicitata tantum non cedit, quantum per illam legem cedere deberet, similique modo in collisionibus ob resistentiam aquae commune centrum grauitatis non perfecte quiescet. Difficillimo etiam calculo opus esset, si quis singulos hos effectus secundum praecepta mechanica euoluere vellet. Cum autem totus resistentiae effectus in motu minuendo consumatur, neque ab ea vllus motus produci possit: resistentia aquae certe in causa esse non poterit, vt naui motus imprimatur, cum eadem nauis resistentia sublata quiescere deberet. Vnde summo iure concludimus, quemadmodum nauis remota aquae resistentia a viribus internis nullum motum progressiuum adipisci potest, ei multo minus, si resistentia aquae accedat, ab huiusmodi viribus vllum motum imprimi posse.

Fig. 1. §. 26. Quamquam hoc ratiocinium omni exceptione maius videtur, tamen dantur casus, quibus ob ipsam resistentiam motus producitur, cum nullus ea remota oriretur. Si enim nauis DEFG basi sua EF in plano aspero incumberet, super quo sine sensibili frictione promoueri nequeat, perspicuum est frictionem tantam esse posse, vt a viribus pendulum tendentibus superari nequeat, sicque ab iis naui nullus motus retrorsum imprimatur. Nihilo tamen minus ab ictu penduli contra tabel-

bellatum AF frictio vinci poterit, quo fiet vt nauis a ſingulis percuſſionibus penduli aliquantum prorſum protrudatur, quae promotio cum a viribus contrariis non deſtruatur, nauis vtique promouebitur, qui effectus nullo modo obtineretur, ſi nulla frictio adeſſet. In quo memorabile paradoxon mechanicum continetur, quod ipſa frictio motus cuiuspiam cauſa eſſe queat, ita vt frictione ſublata nullus plane motus ſequeretur.

§. 27. Eo maior igitur hinc cauſa dubitandi ſuboritur, vtrum ob aquae reſiſtentiam naui ab huiusmodi penduli ictibus nullus motus induci queat, etiamſi certum ſit, ſi reſiſtentia abeſſet, ipſi hoc modo nullum motum imprimi poſſe. Quod dubium vt tollamus, conſideremus nauem alternatim a duabus viribus; p et P ſollicitari, a quarum altera p tempore $= t$ proram verſus, ab altera autem P tempore $=$ T puppim verſus vrgeatur, hae autem vires p et P ratione temporum t et T ita ſint comparatae, vt ſit $pt = PT$, quam aequalitatem determinatio virium tam propellentium quam repellentium ante inſtituta ſuppeditauit. Quamuis autem neque vis p neque P, quamdiu vtraque agit, inuenta ſit conſtans, tamen commoditatis calculi gratia vtramque conſtantem ſine errore aſſumere poterimus, cum leuis inaequalitas nullius motus cauſa eſſe queat, qui ex aequalitate non aeque ſequeretur.

§. 28. Ponamus igitur vim p prius agere, qua nauis propellatur, atque initio nauem fuiſſe in A, vbi celeritatem habuerit proram verſus $= \sqrt{b}$, iamque confeciſſe ſpatium $AP = x$ atque in P celeritatem habere de- Fig. 5.

bitam altitudini $= v$. Cum igitur resistentia sit vt quadratum celeritatis, ponatur ea $= \frac{v}{k}$; fietque $dv = pdx - \frac{vdx}{k}$. Ponatur tempus quo ex A in P peruenerit $= t$, erit $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$ et $dx = dt\sqrt{v}$ quo valore loco dx substituto habebimus $kdv = (kp - v)\,dt\sqrt{v}$. Sit $\sqrt{b} = c$ et $\sqrt{v} = u$, vt irrationalitas tollatur, erit $2kdu = (kp - uu)\,dt$. Quia igitur si $t = 0$ fit $u = c$, integrale huius aequationis etiamsi per logarithmos exhiberi posset, tamen expediet per seriem sequenti modo exprimere:

$u = c + At + Btt + Ct^3 + Dt^4 +$ etc.

ex qua fit:

$$\frac{2kdu}{dt} = 2Ak + 4Bkt + 6Cktt + \alpha Dkt^3 + \text{etc.}$$

$$\begin{array}{l} kp - uu = kp - 2Act - 2Bctt - 2Cct^3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad - cc \quad\;\; - AAtt - 2ABt^3 \end{array} \text{ etc.}$$

Coaequatio coefficientium igitur dabit:

$A = \frac{1}{2}p - \frac{cc}{2k}$. $B = \frac{-cp}{4k} + \frac{c^3}{4k^2}$:

$6Ck = \frac{ccp}{2k} - \frac{c^4}{2kk} - \frac{1}{4}pp + \frac{ccp}{2k} - \frac{c^4}{4kk} = -\frac{1}{4}pp + \frac{ccp}{k} - \frac{3c^4}{4kk}$

Ergo $C = \frac{-pp}{24k} + \frac{ccp}{6kk} - \frac{c^4}{8k^3}$

$8Dk = \frac{cpp}{12k} - \frac{c^3p}{3kk} + \frac{c^5}{4k^3} + \frac{cpp}{4k} - \frac{c^3p}{2kk} + \frac{c^5}{4k^3}$

seu $D = \frac{cpp}{24kk} - \frac{5c^3p}{48k^3} + \frac{c^5}{16k^4}$ etc.

Ex his ergo oritur celeritas nauis quaesita finito tempore t:

$$u = c + \frac{1}{2}t\left(p - \frac{cc}{k}\right) - \frac{ctt}{4k}\left(p - \frac{cc}{k}\right) - \frac{t^3}{24k}\left(pp - \frac{4ccp}{k} + \frac{3c^4}{kk}\right)$$
$$+ \frac{ct^4}{48kk}\left(2pp - \frac{5ccp}{k} + \frac{3c^4}{kk}\right) + \text{etc.}$$

§. 29. Simili modo si finito hoc tempore t celeritas nauis antrorsum ponatur $= C$ vt sit $C = u$, tumque vis P nauem retrahat tempore T, si elapso hoc tempore T celeritas nauis residua ponatur $= U$, reperietur

U

$$U = C - \tfrac{1}{2} T \left(P + \frac{CC}{k} + \frac{CTT}{4k}\left(P + \frac{CC}{k}\right) - \frac{T^3}{24k}\right.$$
$$\left.\left(PP + \frac{4CCP}{k} + \frac{7C^4}{kk} + \frac{CT^4}{48kk}\left(2PP + \frac{5CCP}{k} + \frac{3C^4}{kk}\right) - \text{etc.}\right)\right.$$

Quia vero eſt $pt = PT$ ponamus $pt = PT = Q$ erit $p = \frac{Q}{t}$ et $P = \frac{Q}{T}$, quibus valoribus loco p et P ſubſtitutis, erit

$$u = c + \tfrac{1}{2} Q - \frac{cct}{2k} - \frac{cQt}{4k} - \frac{QQt}{24k} + \frac{c^3tt}{4kk} + \frac{ccQtt}{6kk} + \frac{cQQtt}{24kk} - \text{etc.}$$
$$U = C - \tfrac{1}{2} Q - \frac{CCT}{2k} + \frac{CQT}{4k} - \frac{QQT}{24k} + \frac{C^3T^2}{4kk} - \frac{CCQT^2}{6kk} + \frac{CQQT^2}{24kk} \text{ etc.}$$

Cum autem tempus percuſſionis t ſit quaſi infinite paruum poſito $t = 0$, erit $u = c + \frac{1}{2} Q = C$, vnde ab ſubſequente penduli actione ab eius tenſione oriunda fiet:

$$U = c - \frac{T}{24k}(12cc + 6cQ + QQ) + \text{etc.}$$

vbi reliquos terminos negligimus, quia prae his duobus ſunt valde parui.

§. 30. Hinc ergo manifeſtum eſt fore $U < c$, ideoque celeritatem nauis a quauis penduli actione, quae primum ex ictu tum vero ex tenſione penduli componitur, diminui debere. Etiamſi ergo nauis iam habeat celeritatem quamquiam antrorſum directam, eam tamen ab actione penduli mox amittet, vnde multo minus cum quieuerit, a pendulo vllum motum adipiſci poterit. Quod ſi vero obiiciatur nauem forte a pendulo retrorſum repelli permutandis velocitatibus u et U, ſimili modo oſtendetur, celeritatem quoque retrorſum directam, ſi quam nauis habuerit, ab actione penduli continuo imminui debere, atque adeo nullo modo naui ab huiusmodi pendulo imprimi poſſe.

Fig. 1.

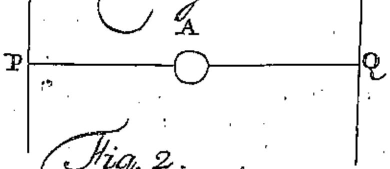


Fig. 2.

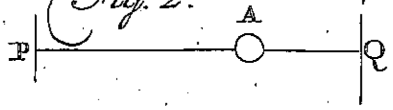
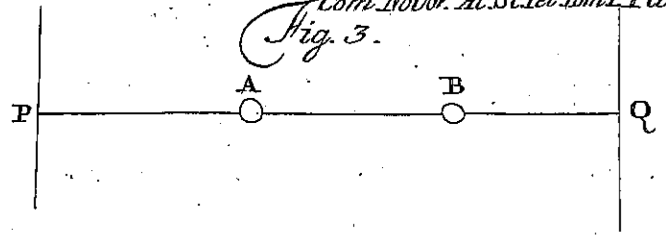


Fig. 3.



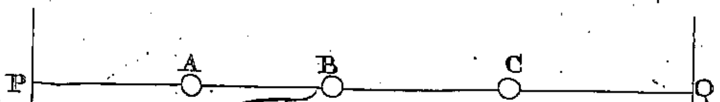


Fig. 4.

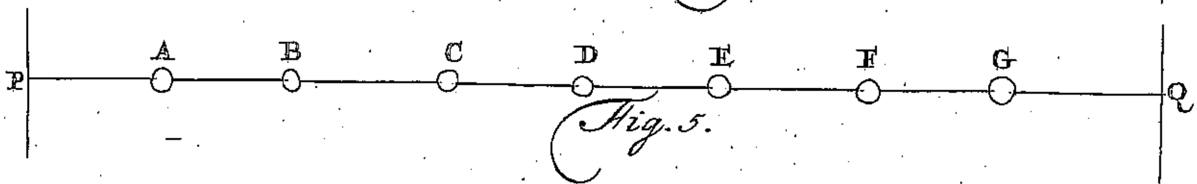


Fig. 5.

Tab. IV.

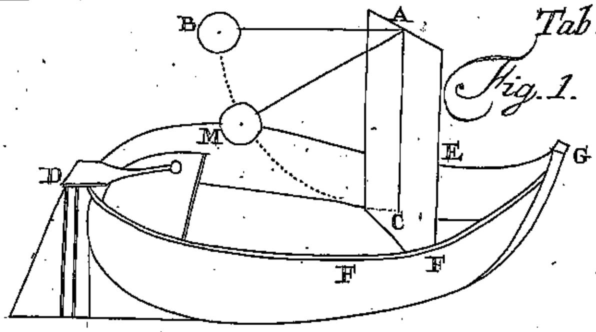


Fig. 1.

Fig. 2.

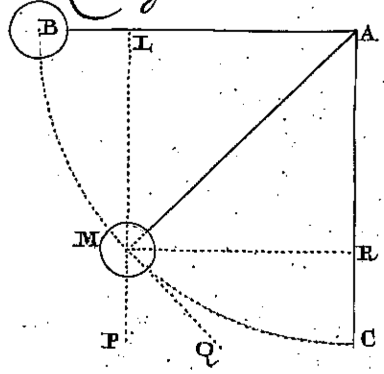


Fig. 4.

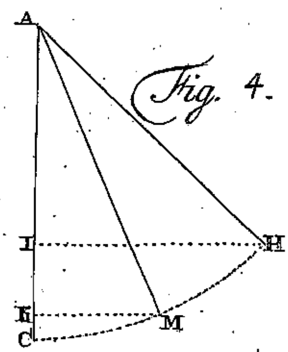


Fig. 3.

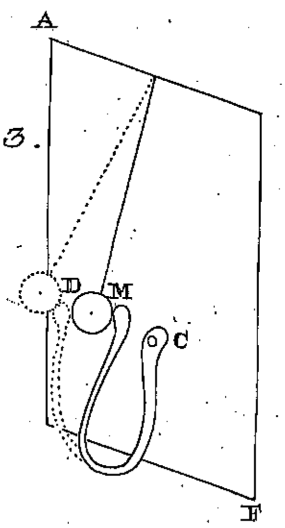


Fig. 5.