1750

De superficie conorum scalenorum aliorumque corporum conicorum

Leonhard Euler

DE SVPERFICIE
CONORVM SCALENORVM,
ALIORVMQVE CORPORVM CONICORVM.

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Quamquam natura conorum a longo iam tempore ita eſt inueſtigata, vt nihil praetermiſſum videatur, in quo laboraremus; tamen in dimetiendis conorum ſuperficiebus vltra conos rectos, quorum axes ad baſes ſunt normales, non proceſſerunt veteres. Celeb. Varignonius in Miſcell. Societatis Regiae Berolinenſis Continuatione II. argumentum hoc prorſus nouum primus tractauit, atque lineam curuam, cuius conſtructio a quadratura circuli pendet, inuenit per cuius rectificationem area cuiusque coni ſcaleni aſſignari queat. Subiuncta autem huic diſſertationi ibidem reperitur additio Magni Leibnizii, in qua idem negotium per rectificationem curuae algebraicae expeditur. Conſtructio huius curuae eximium exemplum profundiſſimi Auctoris ingenii exhibet; verum inaduertentia Viri alias ſagaciſſimi in hanc ſolutionem ſphalma quodpiam irrepſit, quod vti facile emendari poteſt, ita quoque praeſtantiae ſolutionis parum detrahit. Exprimit enim ſuperficiem coni ſcaleni rectangulo ex linea recta magnitudine data Tab. I.

in

in arcum lineae curuae, cuius conſtructionem expoſuerat, cum iſte arcus antea quantitate quapiam algebraica minui debuiſſet. Quamobrem operam meam non inutiliter mihi equidem collocaſſe videor, ſi primo ſuperficiem coni ſcaleni ope rectificationis lineae algebraicae ordinis ſexti exhibuero, tum vero explanationem ſuperficiei conoidalis cuiuscunque per lineam curuam algebraicam abſoluero, ſimulque lapſum ſummi Leibnizii emendauero.

Fig. 1. §. 2. Sit circulus AMB baſis coni ſcaleni, cuius vertex in ſublimi poſitus ſit V. vnde ad planum baſis demittatur perpendiculum VD; et ex puncto D per centrum baſis C agatur recta DACB. Superficies igitur haec conica generatur, dum linea recta perpetuo per punctum V tranſiens circa peripheriam circuli AMB circumducitur, huiusque ſuperficiei portio arcui AM reſpondens includetur arcu AM et binis rectis ex punctis A et M ad verticem V ductis. Huiusmodi portioni gibbae figuram planam aequalem inueniri oportet. Ponatur radius baſis $AC = BC = a$. longitudo axis $VC = f$ perpendiculum $VD = b$, et interuallum $CD = c$, ita vt ſit $ff = bb + cc$. Hinc erit latus coni minimum $VA = \surd(bb + cc - 2ac + aa)$ et latus maximum $VB = \surd(bb + cc + 2ac + aa)$. Sumto nunc arcu quocunque AM, ponatur angulus $ACM = u$, erit arcus $AM = au$; eiusque elementum $Mm = adu$. Ducatur in puncto M tangens MQ, et ex D in eam ducatur perpendicularis DQ, erit recta VQ normalis in tangentem MQ. Quare ſi ductae concipiantur rectae VM et Vm, erit area trianguli $MVm = \frac{1}{2}Mm \cdot VQ$; quae areola erit differentiale portionis ſuperficiei conicae AVM, quam quaerimus.

§. 3

§. 3. Vt igitur longitudinem perpendicularis VQ inueſtigemus, in radium CM, ſi opus eſt, productum ex D ducamus normalem DN, quae parallela erit et aequalis tangenti MQ, et propterea $DQ = MN$. Cum ergo in triangulo rectangulo DCN ſit hypotenuſa $CD = c$ et angulus $DCN = u$, erit $CN = c \cos u$, hincque $MN = DQ = c \cos u - a$. Iam quia triangulum VDQ ad D eſt rectangulum, erit $VQ = \surd(bb + cc \cos. u^2 - 2ac \cos. u + aa)$; ex quo area trianguli elementaris MVm erit $= \frac{1}{2} Mm . VQ = \frac{1}{2} a du \surd(bb + (c \cos u - a)^2)$. Quamobrem ſuperficies conica AVM erit $= \frac{1}{2} a \int du \surd(bb + (c \cos u - a)^2)$. Vnde perſpicitur, ſi conus eſſet rectus, quo caſu interuallum $CD = c$ euaneſceret, ſuperficiem coni recti arcui AM reſpondentis fore $= \frac{1}{2} a \int du \surd(aa + bb) = \frac{1}{2} au \surd(aa + bb)$. Aequaretur ergo areae trianguli, cuius baſis $= au =$ arcui AM et cuius altitudo ſit $= \surd(aa + bb) = VA$: vti ex elementis conſtat.

§. 4. Ex aequatione $AVM = \frac{1}{2} a \int du \surd(bb + (c \cos u - a)^2)$ ſtatim fluit conſtructio curuae Varignonianae, per cuius rectificationem ſuperficies conica exhiberi poteſt. Formetur enim inter coordinatas orthogonales p et q eiusmodi curua vt ſit $dp = b du$ et $dq = du(c \cos u - a)$, erit elementum huius curuae $= du \surd(bb + (c \cos u - a)^2)$. Hinc arcus iſtius curuae per $\frac{1}{2} a$ multiplicatus praebebit rectangulum, cuius area aequalis erit ſuperficiei conicae AVM. Erit ergo huius curuae abſciſſa $p = bu = \frac{VD . AM}{AC}$; et applicata $q = c \int du \cos u - au = c \sin u - au$ vnde abſciſſae $p = \frac{b}{a} . AM$ reſpondebit applicata $q = QM - AM$ quae propterea curua ope rectificationis circuli facile construitur. Attendenti autem statim patebit hanc curuam eandem esse, quam Varignonius tradidit.

§. 5. Si hanc superficiem conicam per quadraturas curuarum exprimere velimus, id quidem infinitis modis tam per curuas algebraicas quam transcendentes sine vllo negotio fieri posset. Verum iam pridem summi Geometrae constructiones problematum transcendentium quae fiant per rectificationes curuarum praecipue algebraicarum, illis quae per quadraturas efficiuntur, longe antetulerunt: cum facilius sit longitudinem cuiusque lineae curuae saltem proxime practice assignare, quam eius aream. Hancobcausam eo tempore, quo ista quaestio in Miscellaneis Soc. Regiae est agitata Celeb. Varignonius non parum praestitisse merito est visus, quod explanationem superficiei conicae scalenae ad rectificationem lineae curvae reduxerit, cuius constructio ope rectificationis circuli tam facile expediri possit. Maximi autem sine dubio esset aestimanda solutio Leibnizii, qua idem, quod Varignonius, per curuam algebraicam idque pro omnibus omnino superficiebus conicis praestitit, nisi ob errorem ante memoratum vsu careret. Nunc autem, postquam a Hermanno methodus latissime patens est inuenta quadraturas omnium curuarum ad rectificationes curuarum algebraicarum reuocandi, fere sine vllo negotio scopus, quem Varignonius et Leibnitius sibi proposuerant, obtineri poterit.

§. 6. In hunc finem eliminemus ex formula inuenta $\frac{1}{2}a \int du \sqrt{(bb + (c \cos u - a)^2)}$ quantitatem transcendentem u, ponendo cosinum anguli $u = z$, ita vt, ducto ex M ad diame-

diametrum perpendiculo MP fit CP $= dz$, et MP $= a\sqrt{(1-zz)}$, erit $du = \frac{-dz}{\sqrt{(1-zz)}}$, et superficies conica quaesita AVM $= -\frac{1}{2}a\int\frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$. Sit iam curuae algebraicae, ope cuius rectificationis haec superficies mensurari queat, abscissa $= x$ et applicata $= y$, ponaturque $dy = p\,dx$, vt sit eius elementum $= dx\sqrt{(1+pp)}$. Efficiendum ergo est vt integratio $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ ab integratione formulae $\int\frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$ pendeat. Primo autem requiritur, vt $\int p\,dx$ fiat quantitas algebraica; alioquin enim curua non foret algebraica. Cum igitur sit $\int p\,dx = px - \int x\,dp$, ponatur $\int x\,dp = q$, fietque $x = \frac{dq}{dp}$ et $y = \int p\,dx = \frac{pdq}{dp} - q$. Vocetur arcus istius curuae $= s$, et cum sit $s = \int dx\sqrt{(1+pp)}$ fiet $s = x\sqrt{(1+pp)} - \int\frac{xpdp}{\sqrt{(1+pp)}}$; sicque rectificatio curuae ab integratione formulae $\int\frac{xpdp}{\sqrt{(1+pp)}}$ pendebit, quae formula ob $x\,dp = dq$ abit in hanc $\int\frac{pdq}{\sqrt{(1+pp)}}$, quae vlterius reducitur ad $\frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}} - \int\frac{qdp}{(1+pp)^{3:2}}$: ita vt futurus sit arcus curuae $s = \frac{dq\sqrt{(1+pp)}}{dp} - \frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}} + \int\frac{qdp}{(1+pp)^{3:2}}$. Statuatur nunc $\int\frac{qdp}{(1+pp)^{3:2}} = \int\frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$, fietque $q = \frac{dz(1+pp)^{3:2}\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{dp\sqrt{(1-zz)}}$ vbi pro p functionem quamcunque algebraicam ipsius z assumere licet. Quo facto erit q functio algebraica ipsius z cognita, ex eaque porro ipsae coordinatae curuae quaesitae x et y definientur.

§. 7. Descripta ergo hac curua ope coordinatarum $x = \frac{dq}{dp}$ et $y = \frac{pdq}{dp} - q$, si eius arcus vocetur $= s$ ob $s = \frac{dq\sqrt{(1+pp)}}{dp} - \frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}} + \int\frac{qdp}{(1+pp)^{3:2}}$, fiet formula nostra, ex qua superficiei

ſuperficiei conicae portio AVM determinatur $\int \frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}} = s - \frac{dq\sqrt{(1+pp)}}{dp} + \frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}} +$ Conſt. Quae conſtans ſi ita determinetur, vt poſito $z=0$, ipſa formula euaneſcat, tum rectangulum $\frac{1}{2}a(\int - \frac{dq\sqrt{(1+pp)}}{dp} + \frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}} +$ Cōſt.) aequabitur portioni ſuperficiei conicae EVM, poſito ſcilicet angulo ACE recto.

§. 8. Ponamus, vt rem exemplo illuſtremus $p = \frac{z}{\sqrt{(1-zz)}}$, vt ſit $\sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-zz)}}$ et $dp = \frac{dz}{(1-zz)^{3:2}}$; erit $q = \frac{\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$ et $\frac{dq}{dp} = \frac{bbz+(c-az)(cz-a)}{\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}} = x$ et $y = \frac{(a(cz-a)-bb)\sqrt{(1-zz)}}{\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}$: Hinc prodibit portio ſuperficiei conicae EVM $= \frac{1}{2}a(s - \frac{c(cz-a)\sqrt{(1-zz)}}{\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}} +$ Conſt.), ſi quidem haec conſtans ita accipiatur, vt iſta formula euaneſcat poſito $z=0$. Simili autem modo aliis quibuscunque valoribus pro p accipiendis innumerabiles aliae curuae algebraicae obtinebuntur, quarum rectificatione portio ſuperficiei conicae quaecunque in plano exhiberi poterit.

§. 9. In huiusmodi autem lineis curuis non ipſe arcus ſuperficiei conicae eſt proportionalis, ſed eum perpetuo quapiam quantitate algebraica vel augeri vel diminui oportet, vt prodeat expreſſio ſuperficiem conicam abſolute menſurans. Qua circumſtantia etſi praxis non impeditur, tamen eiusmodi lineae curuae, quarum longitudo ſtatim ipſa ſine adiuncta alia quantitate quaeſitum praebet, illis non immerito anteferri ſolent. Hancobrem non abs re erit eiusmodi curuam algebraicam aſſignare, quae ipſa, vti curua illa Varignonii transcendens, ſine aſſumta alia quantitate

titate ſuperficiei conicae portionem quamuis metiatur. Cum igitur portio EVM exprimatur hac formula $\frac{1}{2}a \int \frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$, curua algebraica inueſtigari debebit cuius elementum ſit $= \frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{b\sqrt{(1-zz)}}$. Huius enim curvae ſi arcus quantitati z reſpondens ponatur $= s$, erit ſuperficiei conicae portio EV$M = \frac{1}{2}abs$.

§. 10. Sint coordinatae huius curuae quaeſitae x et y, quae cum per functiones algebraicas ipſius z exprimi debeant, ſtatuatur $dx = \frac{dz(m+kz)}{\sqrt{(1-z)}}$ et $dy = \frac{dz(n+kz)}{\sqrt{(1+z)}}$ ſic enim ſumtis integralibus fiet

$$x = 2m + \tfrac{4}{3}k - (2m + \tfrac{4}{3}k + \tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1-z)}$$
$$y = -2n + \tfrac{4}{3}k + (2n - \tfrac{4}{3}k + \tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1+z)}$$

Eiusmodi conſtantibus adiectis, vt poſito $z = 0$, quod euenit in puncto E, ambae coordinatae x et y euaneſcant. Hinc elicietur iſta aequatio:

$$\left.\begin{matrix} +xx - 4mx - \frac{8}{3}kx \\ +yy + 4ny - \frac{8}{3}ky \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 4(n-m)(n+m)z + \frac{8}{3}(n-m)kzz \\ -\frac{8}{3}(n+m)kz \quad - \frac{8}{3}kkzz \end{matrix}\right)$$

Vnde valor ipſius z per x et y facile definitur, qui in altera aequatione ſubſtitutus dabit aequationem algebraicam inter x et y, qua natura curuae quaeſitae continebitur.

§. 11. Cum iam ſit $dx = \frac{(m+kz)dz}{\sqrt{(1-z)}}$ et $dy = \frac{(n+kz)dz}{\sqrt{(1+z)}}$. fiet huius curuae elementum:

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dz\sqrt{\left(\frac{m^2+2mkz+k^2zz}{1-z} + \frac{n^2+2nkz+k^2zz}{1+z}\right)}$$

ſeu $$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{dz\sqrt{\left(\begin{matrix}+nn - nnz + 2nkz - 2nkzz \\ +mm + mmz + 2mkz + 2mkzz\end{matrix} + 2k^2z^2\right)}}{\sqrt{(1-zz)}}$$

Quod aequale ponatur formae $\frac{dz\sqrt{(aa+bb-2acz+cczz)}}{b\sqrt{(1-zz)}}$ prodibuntque ex comparatione terminorum homogeneorum hae aequationes.

$$aa+bb=(nn+mm)bb$$

$$2ac=(n-m)(n+m)bb-2(n+m)kbb$$

$$cc=2k^2b^2-2(n-m)kbb$$

Ex harum vltima fit $n-m=k-\frac{cc}{2kbb}=\frac{2kkbb-cc}{2kbb}$ qui valor in ſecunda ſubſtitutus dat:

$$2ac=-\frac{(n+m)(2kkbb+cc)}{2k}$$

ergo erit $n+m=\frac{-4ack}{2kkbb+cc}$. Cum ergo ſit:

$$n-m=\frac{2kkbb-cc}{2kbb}$$

ex his aequationibus ambae litterae m et n definiuntur.

§. 12. Supereſt ergo vt tertia incognita k per primam aequationem definiatur. Cum autem quarta incognita b maneat indeterminata, ei pro lubitu valor aſſignari poterit, ſtatuamus ergo $bb=\frac{cc}{2kk}$, vt euadat $n-m=0$: eritque $n+m=-\frac{2ak}{c}$, ac propterea $m=n=-\frac{ak}{c}$, vnde facta in prima aequatione ſubſtitutione etiam incognita k ex calculo egreditur. Fieri ergo nequit $m=n$. Quocirca ſtatuamus $2kkbb=gcc$ ſeu $bb=\frac{gcc}{2kk}$ eritque $n-m=\frac{(g-1)k}{g}$ et $n+m=\frac{-4ak}{(g+1)c}$. Vnde fit $n=\frac{(g-1)k}{2g}-\frac{2ak}{(g+1)c}=\frac{(gg-1)ck-4agk}{2g(g+1)c}$ et $m=\frac{-2ak}{(g+1)c}-\frac{(g-1)k}{2g}=\frac{-4agk-(gg-1)ck}{2g(g+1)c}$.

§. 13. Ex his valoribus nunc obtinebitur:

$$mm+nn=\frac{16aaggkk+(gg-1)^2cckk}{2gg(g+1)^2cc}$$

Hinc ex prima aequatione $aa+bb=(nn+mm)bb$ fiet $aa+bb=\frac{16aagg+(gg-1)^2cc}{4g(g+1)^2}$

fit

fit $aa+bb=ee$, haecque aequatio euoluta dabit:

$$\begin{array}{llll} ccg^4-4eeg^3 & -2ccgg & -4eeg & +cc=0 \\ & +16aagg & & \\ & -8eegg & & \end{array}$$

ex qua valorem ipfius g quaeri oportet.

§. 14. Quanquam haec aequatio eft quarti ordinis, tamen quia non mutatur, fi loco g ponatur $\frac{1}{g}$, ea ad refolutionem aequationis quadratae reuocari poteft. Fingantur eius factores $cgg-2pg+c=0$ et $cgg-2qg+c=0$ et productum illi aequationi aequale efficiatur. Erit autem hoc productum:

$$\begin{array}{l} ccg^4-2cpg^3+2ccgg-2cpg+cc=0 \\ \quad -2cqg^3+4pqgg-2cqg \end{array}$$

Quae forma cum aequatione inuenta comparata dabit:

$$p+q=\frac{2ee}{c} \text{ et } pq=4aa-2ee-cc$$

unde fit: $(p-q)^2=\frac{4e^4}{cc}-16aa+4ee+4cc$ et $p-q=\frac{2}{c}\sqrt{(e^4-4aacc+2ccee+c^4)}$. Confequenter

$$p=\frac{ee+\sqrt{(e^4-4aacc+2ccee+c^4)}}{c} \text{ et}$$

$$q=\frac{ee-\sqrt{(e^4-4aacc+2ccee+c^4)}}{c}.$$

§. 15. Inuentis nunc p et q ex aequationibus fuperioribus valores ipfius g ita definientur vt fit $g=\frac{p\pm\sqrt{(pp-cc)}}{c}$ et $g=\frac{q\pm\sqrt{(qq-cc)}}{c}$. Cumigitur nunc quatuor valores pro quantitate g inuenerimus, habebimus primo $bb=\frac{gcc}{gkk}$ feu fumta quantitate b pro arbitrio erit $k=\frac{c}{b}\sqrt{\frac{1}{g}}$; vnde porro inueniuntur.

$$m=-\frac{(g-1)k}{2g}-\frac{2ak}{(g+1)c}$$

$$n=+\frac{(g-1)k}{2g}-\frac{2ak}{(g+1)c}$$

Ex cognitis denique valoribus litterarum m, n, et k curua quaesita per coordinatus x et y ſupra exhibitas algebraice deſcribetur, quo facto ſi eius arcus quantitati z reſpondens dicatur $= s$, erit ſuperficiei conicae portio $EVM = \frac{1}{2} abs$.

§. 16. Vt exemplum praebeamus, faciat axis coni VC cum baſi angulum 60°, incidatque perpendiculum VD in peripheriam, baſis erit CD = CA et propterea $c = a$; porro erit $CV = f = 2a$ et $bb = 3aa$ vnde fit $ee = 4aa$ atque $p = a(4 + \sqrt{21})$ et $q = a(4 - \sqrt{21})$. Hinc fit $g = 4 + \sqrt{21} + 2\sqrt{(9 + 2\sqrt{21})}$, quia duo reliqui valores fiunt imaginarii. Erit ergo

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}g} = \tfrac{1}{4}\sqrt{14} + \tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(3 + \sqrt{21})}$$

ſit $b = 1$ erit $k = \frac{a}{4}(\sqrt{14} + \sqrt{6} + 2\sqrt{(3 + \sqrt{21})})$. Hinc porro irrationalibus debite reductis inuenitur

$$m = \tfrac{a}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{14} - 2\sqrt{(3 + \sqrt{21})}) \text{ et}$$
$$n = \tfrac{a}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{14} - 2\sqrt{(3 + \sqrt{21})}).$$

quibus valoribus inuentis deſcribatur curua inter coordinatas x et y ita, vt ſit

$$x = \tfrac{4}{3}k + 2m - (2m + \tfrac{4}{3}k + \tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1 - z)}$$
$$y = \tfrac{4}{3}k - 2n + (2n - \tfrac{4}{3}k + \tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1 + z)}.$$

Cuius curuae ſi arcus ſinui anguli ECM, qui eſt $= z$ reſpondens ponatur $= s$ erit ſuperficiei conicae portio $EVM = \frac{1}{2} as$.

§. 17. Expeditis conis ſcalenis, qui cum baſes habeant circulares, perpendiculum ex vertice in planum baſis demiſſum extra eius centrum cadit, nunc conos quoscunque conſiderabo, qui formantur, dum linea recta per verticem perpetuo tranſiens circa lineam quamcunque circumducitur. Sit igitur

igitur figura quaecunque AM basis huiusmodi coni, et punctum V in sublimi positum eius vertex, vnde in basin demittatur perpendiculum VD. Ex D ad punctum curuae AM quodcunque M ducatur recta DM, et in M ducatur recta tangens curuam MQ, in quam D perpendiculum demittatur DQ: et cum basis cognita ponatur, relatio assignari poterit inter DM et DQ. Sit igitur $DM = x$, $DQ = y$, atque habebitur aequatio inter x et y. Ponatur praeterea huius coni altitudo $VD = b$, sumto autem huius curuae elemento Mm, si ducatur Dm et ex M in Dm perpendiculum demittatur Mn, erit $mn = dx$, et ob $MQ = \sqrt{(xx - yy)}$ similitudo triangulorum DMQ, Mmn dabit $Mn = \frac{y\,dx}{\sqrt{(xx-yy)}}$ et $Mm = \frac{x\,dx}{\sqrt{(xx-yy)}}$. Fig. 2.

§. 18. His praemissis si in peripheria basis punctum fixum A tanquam principium assumatur. Superficiei conicae portio AVM erit integrale trianguli elementaris MVm. Ad areolam ergo huius trianguli exprimendam, iungatur recta VQ, quae in tangentem MQ erit normalis, ac propterea area trianguli MVm fiet $= \frac{1}{2} Mm . VQ$. Est vero ob triangulum VDQ ad D rectangulum, $VQ = \sqrt{(bb + yy)}$ vnde cum sit $Mm = \frac{x\,dx}{\sqrt{(xx-yy)}}$, habebitur area trianguli elementaris $MVm = \frac{x\,dx\sqrt{(bb+yy)}}{2\sqrt{(xx-yy)}}$. Atque hinc erit superficiei conicae portio quaesita $AVM = \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(xx-yy)}}$.

§. 19. Maxime naturalis via hanc superficiem exprimendi est, vt ea in planum explicetur. Concipiatur igitur conus charta superductus, quae secundum rectas AV et MV et basin AM excissa in planum explicetur Fig. 3.

VAM; haecque figura mixtilinea VAM aequalis erit portioni ſuperficiei conicae $AVM = \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(xx-yy)}}$. Huius figurae explicatae ducatur in M tangens MQ, et in eam ex V demittatur perpendiculum VQ. Cum igitur hoc triangulum VMQ ſimile et aequale ſit triangulo VMQ in fig. 2. erit $VM = \sqrt{(bb+xx)}$ $VQ = \sqrt{(bb+yy)}$ et $MQ = \sqrt{(xx-yy)}$. Conſtituto autem triangulo elementari MVm, ductaque Mr ad Vm perpendiculari, erit vt ante $Mm = \frac{x\,dx}{\sqrt{(xx-yy)}}$, at $mr = \frac{x\,dx}{\sqrt{(bb+xx)}}$, et $Mr = \frac{x\,dx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(bb+xx)(xx-yy)}}$.

§. 20. Inquiramus nunc in conſtructionem huius curvae ex data baſi coni in fig. 2. Ponamus in hunc finem angulum $AVM = v$ et diſtantiam $VM = z$, erit ſtatim $z = \sqrt{(bb+xx)}$. Tum vero erit $dv = \frac{Mr}{VM} = \frac{x\,dx\sqrt{(bb+yy)}}{(bb+xx)\sqrt{(xx-yy)}}$. Vocemus ſimili modo in fig. 2. angulum $ADM = u$ erit $du = \frac{Mn}{DM} = \frac{y\,dx}{x\sqrt{(xx-yy)}}$; Hinc fit $x^4 du^2 - xxyy\,du^2 = y^2 dx^2$ et $y^2 = \frac{x^4 du^2}{dx^2 + x^2 du^2}$ ideoque erit $\sqrt{(bb+yy)} = \frac{\sqrt{(bb\,dx^2 + (bb+xx)x^2 du^2)}}{\sqrt{(dx^2 + x^2 du^2)}}$ et $\sqrt{(xx-yy)} = \frac{x\,dx}{\sqrt{(dx^2 + x^2 du^2)}}$: vnde oritur $dv = \frac{\sqrt{(bb\,dx^2 + (bb+xx)xx\,du^2)}}{bb+xx}$. Quia igitur vel u vel y per x datur, inueniri poterit angulus v, quo cognito curua AM circa V in plano deſcribetur, cuius area AVM aequalis erit ſuperficiei conicae quaeſitae.

§. 21. Quoniam aſſignatio ſuperficiei conicae pendet ab integratione formulae $\int \frac{x\,dx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(xx-yy)}}$, hoc negotium tam per quadraturas quam rectificationes curuarum algebraicarum innumerabilibus modis facile expediri poteſt.

Vt

Vt autem conſtructionem Leibnizianam, quae eſt elegantiſſima, emendemus, peculiari modo nobis erit procecedendum. Perſpicuum autem eſt Virum ſummum ſuam conſtructionem ex conſideratione rectarum ad datam curvam ſub angulis quibuscunque ductarum deduxiſſe; hae enim rectae ſuis concurſibus formant nouam curuam, cuius rectificatio tam ſimpliciter exprimitur, vt quaeuis quadratura eo facile reducatur. Atque ex hoc ipſo fonte Celeb. Hermannus methodum ſuam ingenioſiſſimam quadraturas curuarum quascunque ad rectificationes curuarum algebraicarum reducendi hauſit, quam methodum poſtea Celeb. Ioh. Bernoulli ex geometria in analyſin puram translatam dilucide propoſuit.

§. 22. Sumamus pro curua data AM illam ipſam figuram, quae ante baſin coni conſtituerat, atque in eius ſingulis punctis Mm in datis cum hac curua angulis ductae concipiantur rectae MS, ms quae ſuis contactibus forment nouam curuam FSs; per cuius rectificationem ſuperficiem conicam exprimi oporteat. Ponatur arcus curuae cognitae $AM = s$. ſitque angulus $SMm = v$, quem recta SM cum curua AM in puncto M conſtituit, et ſumto elemento $Mm = ds$, erit angulus $smN = v + dv$. Quo hinc concurſus rectarum MS et ms ſeu punctum S determinetur, conſideretur centrum circuli oſculatoris in Mm, quod ſit in R, et vocetur radius oſculi $MR = mR = r$, erit angulus $MRm = \frac{ds}{r}$: atque ob rectas RM, Rm ad curuam AM normales, erit angulus $RMS = 90° - v$ et angulus $RMS = 90° - v - dv$. Vnde cum ſit $R \circ S = MRm + RMS = MSm + Rms$, fiet ang. $MSm = MR$ Fig. 4.

$m +$

$m + \mathrm{RMS} - \mathrm{R}ms = \frac{ds}{r} + dv$. Nunc in triangulo MS m ob datos angulos et latusculum $\mathrm{M}m = ds$, fiet $\frac{ds}{r} + dv : ds = \text{ſin. } v : m\mathrm{S}$ vel MS, eritque igitur $\mathrm{MS} = \frac{r\,ds\,\text{ſin.}\,v}{ds + r\,dv}$; ex qua formula conſtructio curuae FS conſequitur.

§. 23. Ponatur haec recta $\mathrm{MS} = z$, vt ſit $z = \frac{r\,ds\,\text{ſin.}\,v}{ds + r\,dv}$; eritque $ms = z + dz$. Ex m in MS ducatur normalis mk, ob angulum $m\mathrm{M}k = v$, erit $mk = ds$ ſin. v et $\mathrm{M}k = ds$ coſ. v. Cum igitur ſit $\mathrm{S}s = ms - k\mathrm{S} = ms - \mathrm{MS} + \mathrm{M}k$, fiet $\mathrm{S}s = ds$ coſ. $v + dz$. At eſt $\mathrm{S}s$ elementum curuae FS, ex quo erit longitudo huius curvae $\mathrm{FS} = \int ds$ coſ. $v + z +$ Conſt. Ad hanc conſtantem definiendam reſpondeat curuae FS, punctum F curuae datae AM puncto A, ita vt recta AF ſit tangens curuae quaeſitae FS in puncto F. Hinc cum ſit $\mathrm{MS} = z$, prodibit $\mathrm{FS} = \int ds$ coſ. $v + \mathrm{MS} - \mathrm{AF}$, ſi quidem integrale $\int ds$ coſ. v ita capiatur, vt euaneſcat poſito $s = 0$. Quo facto viciſſim integrale formulae $\int ds$ coſ. v per rectificationem curvae FS exhiberi poterit, erit ſcilicet $\int ds$ coſ. $v = \mathrm{FS} + \mathrm{AF} - \mathrm{MS}$.

§. 24. His praemiſſis ſit D veſtigium verticis coni in plano baſis, ſeu punctum, in quod perpendiculum ex vertice coni in planum baſis demiſſum incidit, cuius perpendiculi altitudo VD ſupra poſita eſt $= b$. Ducta porro ad M tangente MQ, in eamque ex D demiſſo perpendiculo DQ, vocauimus $\mathrm{DM} = x$ et $\mathrm{DQ} = y$, eratque elementum $\mathrm{M}m = \frac{x\,dx}{\sqrt{(xx - yy)}}$, quod nunc appellamus $= ds$. Quare cum inuenerimus ſuperficiem conicam arcui baſis AM reſpondentem $= \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx\,\sqrt{(bb + yy)}}{\sqrt{(xx - yy)}}$, erit iſta ſuper-

superficies $= \frac{1}{2}\int ds\sqrt{(bb+yy)}$. Quo igitur haec superficies per rectificationem curuae FS exprimatur, angulus v vbique ita constitui debet, vt formulae $\int ds \,\mathrm{cos.}\, v$ integratio ad integrationem formulae $\int ds\sqrt{(bb+yy)}$ perducatur.

§. 25. Ponamus in hunc finem $\mathrm{cos.}\, v = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$: et cum cosinus ipsius v vltra radii magnitudinem, quam vnitate metimur nunquam excrescere possit, quantitas k tanta assumi debet, vt $\sqrt{(bb+yy)}$ eam nunquam superare queat. Quare notetur maximus valor, quem formula $\sqrt{(bb+yy)}$ vsquam in cono induere potest, eique k vel aequalis vel etiam maior assumatur. Hoc igitur modo si angulus v fuerit definitus, obtinebitur superficies conica arcui basis AM insistens $\frac{1}{2}\int ds\sqrt{(bb+yy)} = \frac{1}{2}k\int ds \,\mathrm{cos.}\, v$; ideoque exprimetur rectangulo $\frac{1}{2}k(FS + AF - MS)$ si scilicet rectae MS vbique ita constituantur, vt sit $\mathrm{cos.}\, SMm = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$ seu $\mathrm{sin.}\, RMS = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$ hincque construatur curua FS, rectanguli $\frac{1}{2}k(AF+FS-MS)$ area aequabitur superficiei conicae quaesitae, quae igitur per rectificationem curuae algebraicae FS exhibebitur. Cum enim vbique tam angulus RMS quam longitudo MS algebraice assignari queant, ipsa curua FS erit algebraica.

§. 26. Sumto autem $\mathrm{cos.}\, v = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$ erit $\mathrm{sin.}\, v = \frac{\sqrt{(kk-bb-yy)}}{k}$ et differentiando $dv \,\mathrm{cos.}\, v = \frac{-yky}{k\sqrt{(kk-bb-yy)}} = \frac{-ydy}{kk\,\mathrm{sin.}\, v}$. vnde fit $dv = \frac{-ydy}{kk\,\mathrm{sin.}\, v\,\mathrm{cos.}\, v}$. Cum autem natura curuae AM aequatione inter variabiles $DM = x$ et $DQ = y$ exprimatur, erit radius osculi $MR = r = \frac{xdx}{dy} =$

 $ds\sqrt{}$

$\frac{ds\sqrt{(xx-yy)}}{dy}$, vnde fit $dy = \frac{ds\sqrt{(xx-yy)}}{r}$ ideoque $dv = \frac{-y\,ds\sqrt{(xx-yy)}}{kkr\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,v}$. Quia ergo fupra inuenimus $MS = z = \frac{r\,ds\,\text{fin.}\,v}{ds + r\,dv}$, nunc habebimus $MS = z = \frac{kkr\,\text{fin.}\,v^2\,\text{cof.}\,v}{kk\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,v - y\sqrt{(xx-yy)}}$ Quam expreffionem fequenti modo geometrice conftruere conabimur.

Fig. 4. et 5. §. 27. Sit iterum curua AM bafis coni, D veftigium verticis, et M punctum huius curuae quodcunque in quo ducatur tangens MQ et normalis MK. Ductaque recta DM ex D in tangentem demittatur perpendiculum DQ, fimulque tangenti agatur recta indefinita DC, in qua capiatur DC = altitudini coni $= b$, ductaque CQ erit $CQ = \sqrt{(bb+yy)}$. Tum in normali ad curuam capiatur $MK = k$, fuper qua tanquam diametro defcripto femicirculo KPM applicetur chorda $KP = CQ$, fi ducatur MP, erit finus anguli $KMP = \frac{KP}{k} = \text{cof.}\,v$, vnde recta MP erit pofitio rectae MS, fumatur in normali ad curuam $MR = r$, et cum fit $DQ = y$, et $MQ = \sqrt{(xx-yy)}$, fiet $MS = \frac{MK \cdot MR\,\text{fin.}\,v}{MK - DQ \cdot MQ : MK\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,v}$ feu $MS = \frac{MK\,\text{cof.}\,v \cdot MR\,\text{fin.}\,v}{MK\,\text{cof.}\,v - DQ \cdot MQ : MK\,\text{fin.}\,v}$. Cum vero fit $MK\,\text{cof.}\,v = KP$ et $MK\,\text{fin.}\,v = MP$, ex R in MP demittatur perpendiculum RT, et erit $MR\,\text{fin.}\,v = MT$ fietque $MS = \frac{KP \cdot MT}{KP - DQ \cdot MQ : MP}$. Capiatur $PX = \frac{DQ \cdot MQ}{MP}$, erit $MS = \frac{KP \cdot MT}{KX}$, vnde longitudo rectae MS facile definitur. Quae operatio fi in fingulis punctis M inftituatur, fingula puncta S determinabunt curuam quaefitam FS; qua inuenta erit portio fuperficiei conicae arcui AM infiftentis aequalis areae parallelogrammi rectanguli $\frac{1}{2}MK(AF+FS-MS)$.

§. 28.

§. 28. Si curua AM ſtatuatur circulus, extra cuius centrum cadat punctum D, vt conus abeat in conum ſcalenum ordinarium qualem primo ſumus contemplati, atque curua FS ſecundum praecepta hic data conſtruatur, tum eadem prodibit curua, quam Illuſtr. Leibnizius loco ſupra allegato inuenire docuit Ex quo manifeſtum eſt non ipſam hanc curuam FS in rectam elongatam, ſi in rectam quampiam conſtantem ducatur, praebere ſuperficiem conicam quaeſitam, ſed arcum illum FS recta AF auctum longitudine rectae MS minui debere. Hoc ergo modo non ſolum conſtructionem Leibnizianam, quae tantum ad conos ſcalenos erat accommodata, emendauimus, ſed etiam ad conos, quorum baſes ſint figurae quaecunque extendimus.

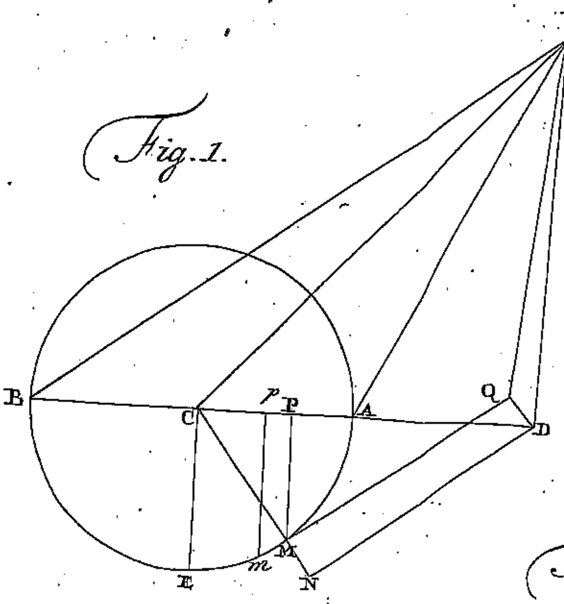
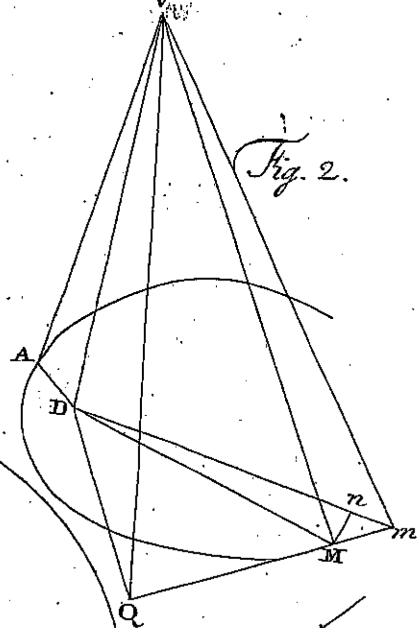


Fig. 1.
V
B
C
p P
A
Q
D
E
m
M
N


V
Fig. 2.
A
D
n
m
M
Q

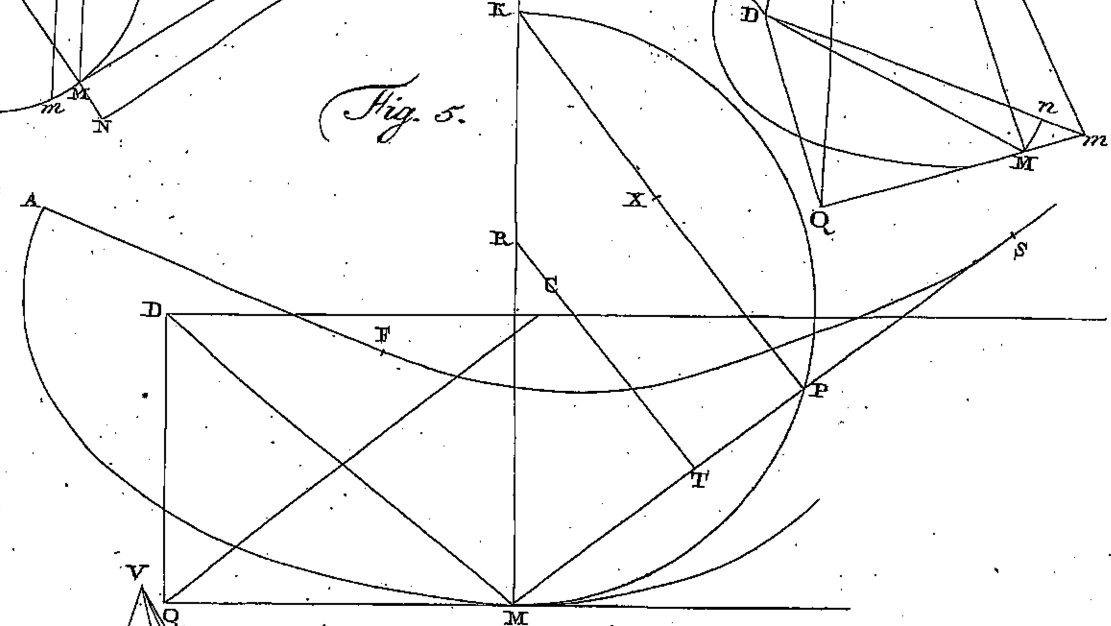
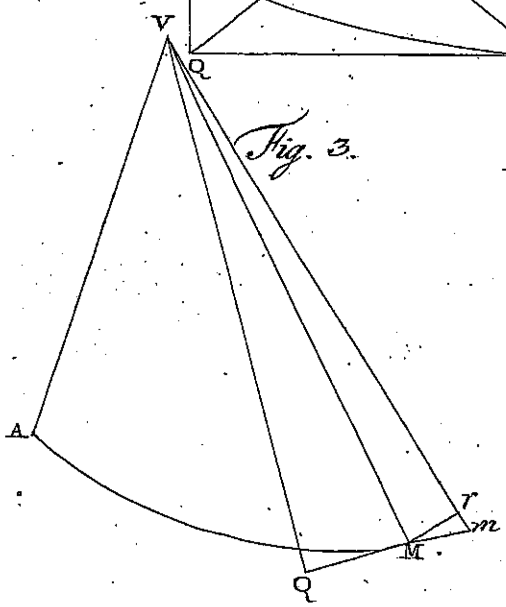
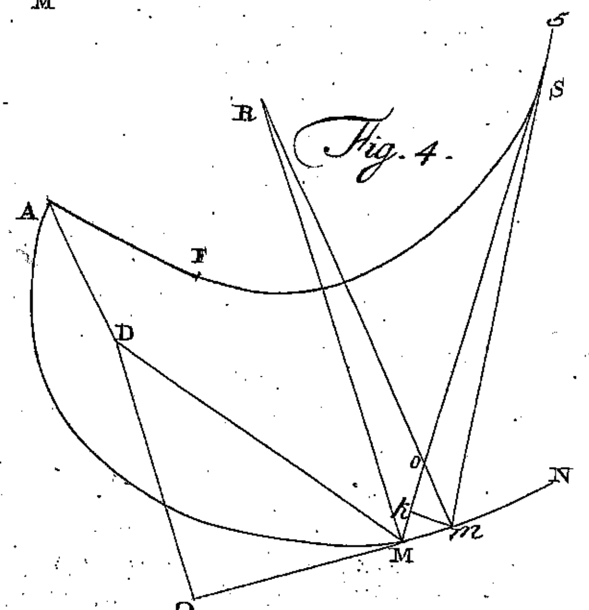


Fig. 5.
K
X
A
R
C
D
F
S
P
T
Q
M


V
Fig. 3.
A
r
m
M
Q


s
S
R
Fig. 4.
A
F
D
o
k
N
m
M
Q