



1750

Determinatio caloris et frigoris graduum pro singulis terrae locis ac temporibus.

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Determinatio caloris et frigoris graduum pro singulis terrae locis ac temporibus." (1750). *Euler Archive - All Works*. 124.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/124>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DETERMINATIO
CALORIS ET FRIGORIS GRADVVM
 PRO SINGVLIS TERRAE LOCIS AC
 TEMPORIBVS.

§. 1.

Tab. I. **H**oc loco in caloris et frigoris gradus a priori inquire-
 re constitui, quatenus a sola actione solis proficiscun-
 tur: et hanc ob rem neque ad ventos, neque ad tem-
 pestatum diuersitatem, quibus actio solis vehementer tur-
 batur, respicio. In hoc itaque potissimum ero occupa-
 tus, vt remotis istis impedimentis pro quouis terrae loco
 et tempore gradum caloris frigorisue definiam a sola actio-
 ne solis oriundum. Cum igitur ad hoc expediendum ne-
 cesse sit gradum caloris quendam fixum et constantem ad-
 hibere, huius loco eum assumo, qui in ipsa solis superfi-
 cie perpetuo viget, quemque constanter littera *c* designabo.

§. 2. Ad effectum autem solis in calore producendo
 definiendum concipio corpus plana superficie praeditum per-
 petuo soli ita expositum esse, vt radii solares normaliter
 in eius superficiem planam incidant. Sensim igitur istud cor-
 pus a sole calefiet, atque continuo maiorem caloris gra-
 dum recipiet, donec tandem summum gradum acqviserit,
 quem si semel fuerit consecutum, eum in aeternum sit
 conseruaturum. Gradum istum caloris appellabo vltimum
 siue naturalem caloris gradum, quem his circumstantiis exere-
 re valet.

§. 3. Cum igitur calor a radiis solis proficiscatur hi-
 que diurgant ita, vt in duplicata ratione distantiarum a
 sole fiant rariores; etiam vltimus caloris gradus, quem
 sol

sol superficiē planae directe oppositae inducere potest, tenebit rationem reciprocam duplicatam distantiarum a sole. Quare si distantia huius corporis a sole ponatur $= s$, et semidiameter solis $= r$, erit vltimus caloris gradus $= \frac{c}{s^2}$; quoniam, si corpus in ipsa solis superficie seu in distantia r ab eius centro esset positum, eundem caloris gradum acciperet, qui in superficie solis existit.

§ 4. At si radii solis oblique in superficiem corporis cadant, tum vltique tantus calor non generabitur, quam praecedente casu, quo radii solis normaliter in superficiem incidebant. Primo quidem satis perspicuum est, si solis radii tantum lambant superficiem, seu si angulus incidentiae radiorum euanescat, tum effectum omnino nullum a sole produci posse. Ex quo satis tuto assumi posse videtur, gradum caloris vltimum, quem superficies recipit esse sinui anguli incidentiae proportionalem; quando quidem superficies illuminatur. Nam si sol infra horizontem versetur, tum sinus incidentiae fieret negatiuus non autem videtur, effectum solis vnquam in negatiuum abire posse. Quare, si sol sub horizonte existit, eius effectus aliter spectari nequit, ac si ipsum horizontem occuparet, hoc est vltimus gradus caloris semper erit $= 0$, quantumuis profunde sol sub horizonte sit submersus.

§ 5. Si ergo sumatur in terra locus quicumque, definiiri poterit gradus caloris, quem radii solis in data obliquitate incidentes tandem inducerent, si quidem sol perpetuo eundem situm respectu istius loci retineret. Namque sit altitudinis solis supra horizontem illius loci sinus $= v$, posito sinu toto $= r$, erit vltimus caloris gradus, cuius hic locus est capax $= \frac{cv}{s^2}$, denotante semper s di-

84. DETERMIN. CAL. ET FRIGORIS GRADIVM

stantiam solis a terra, existente semidiametro solis $= r$; siue etiam spectari potest s tanquam cotangens semidiametri solis apparentis. Vel si tangens semidiametri solis apparentis ponatur $= x$, erit vltimus gradus caloris $= \epsilon x^2 v$: si quidem sol versetur supra horizontem: at si sol sub horizonte lateat, gradus iste erit $= 0$, qui est extremus summusque frigoris gradus.

§ 6. Hoc igitur modo vbique terrarum calor foret comparatus, si sol respectu terrae quiesceret, ac perpetuo eundem situm retineret. Scilicet in iis regionibus in quibus sol appareret, foret aliquis caloris gradus, isque eo maior, quo magis sol fuerit eleuatus. In altero autem hemisphaerio, a sole averso, summum perpetuo regnaret frigus, nisi quatenus calor partis oppositae influeret. Hic vero ab istiusmodi circumstantiis cogitationes prorsus abstineo, neque alium caloris fontem praeter solem, confidero. Hancque ob rem omnem materiam terrestrem cuiusvis gradus caloris et frigoris aequae susceptibilem pono, ita vt quouis tempore in eum statum constituatur, quem regulae requirunt.

§ 7. Si igitur terrae regio iam illum ipsum habeat caloris gradum, quem sol ipsi communicare conetur, quemque actu tandem induceret, nisi eum iam haberet, tum nulla eueniet mutatio caloris in ea regione, sed ille ipse gradus conseruabitur. At si praesens regionis calor vel maior sit vel minor, quam calor naturalis situi solis respondens, tum paullatim ille calor vel diminuetur vel augebitur, donec tandem calori solis naturali aequalis fiat. Verisimile autem videtur, caloris illius vel augmenta vel decremēta, quae dato tempore gignuntur, differentiae
calorum

calorum folis scilicet naturalis et proprii, quem corpus habet, esse proportionalia. Cum enim aequalitas amborum caloris graduum tanquam finis sit proposita, eo fortior ad eam obtinendam erit actio, quo maior fuerit inaequalitas.

§. 8. Si ergo ponamus in regione terrae quadam caloris praesentis gradum esse z ; atque solem in altitudine supra horizontem versari, cuius sinus sit $= v$; erit calor naturalis a sole oriundus $= c\kappa^2 v$, denotante c gradum caloris in superficie folis et κ tangentem semidiametri apparentis folis. Tempusculo igitur dt calor regionis z incrementum accipiet proportionale excessui $c\kappa^2 v - z$, siquidem fuerit $c\kappa^2 v > z$, contrario enim casu calor z decrementum patietur. Hinc ergo erit $dz = a dt (c\kappa^2 v - z)$: ac si sol perpetuo istum situm obtineret, foret integrando $at = l \frac{c}{c\kappa^2 v - z} = l \frac{c\kappa^2 v - f}{c\kappa^2 v - z}$, si f denotet gradum caloris, qui in ea regione fuit, principio a quo tempus t computatur.

§. 9. His nunc praemissis hypothesibus pro quouis terrae loco gradum caloris definire conabor ad quamlibet horam dati diei. Sit igitur HOR horizon loci propositi, Z zenith, P polus mundi borealis, et AOB parallelus, in quo sol die proposito mouetur. Sit elevationis poli PR sinus $=$ P cosinus $= p$, posito sinu toto $= r$; sinus declinationis borealis solis $= Q$, cosinus $= q$, sinusque Q abibit in sui negativum, si declinatio solis sit australis. Ponamus solem in S versari, angulumque APS esse $= t$, qui angulus exprimit tempus, quo sol post transitum per meridianum ex A in S peruenit; an-

Tab. I.
fig. 2.

guliqve APS finus fit $= x$. cosinus $= y$; erit $dt = \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$ ob $xx + yy = 1$

§. 10. Quoniam nunc in triangulo sphaerico PZS dantur primo angulus ZPS, cuius finus est x et cosinus y ; deinde latus PZ, cuius finus est p , cosinus P; et tertio latus PS cuius finus est q , cosinus Q, reperietur lateris ZS cosinus $= pqy + PQ$; qui simul est finus altitudinis solis super horizonte, dum in S versatur. Solis igitur occasus continget in puncto O, existente anguli APO cosinu $= \frac{PQ}{pq}$. Ponamus autem esse angulum ipsum APO $= g$, quo semissis temporis diurni designabitur atque posito angulo 180. grad. $= \pi$, erit $\pi - g$ tempus dimidia noctis.

§. 11. Inquiramus nunc primum in varietatem caloris regionis propositae, quamdiu sol supra horizontem versatur, sitque tempore t post meridiem, quo sol in S reperitur, gradus caloris in loco proposito $= z$. Quoniam vero hoc tempore est finus altitudinis solis $= pqy + PQ$, erit calor solis naturalis $= cn^2 (pqy + PQ)$. Quamobrem tempusculo dt , quod per angulum SP repraesentatur, calore z incrementum capiet dz tantum, ut sit $dz = \alpha dt (cn^2 pqy + cn^2 PQ - z)$, in qua aequatione α quantitatem quandam constantem denotat, per observationes determinandam.

§. 12. Aequatio differentialis inuenta $dz = \alpha dt (cn^2 pqy + cn^2 PQ - z)$ reducatur ad hanc formam $dz + \alpha z dt = \alpha cn^2 dt (pqy + PQ)$ quae multiplicata per $e^{\alpha t}$ denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, fiet integrabilis; erit enim integrale $e^{\alpha t} z =$
 αcn^2

$$\begin{aligned} \alpha c \kappa^2 \int e^{\alpha t} dt (pqy + PQ) &= c \kappa^2 PQ e^{\alpha t} + \alpha c \kappa^2 pq \int e^{\alpha t} dx \\ \text{ob } y dt &= dx. \text{ Cum autem fit } t = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha x)}} \text{ erit } \int e^{\alpha t} dx \\ &= \int e^{\frac{\alpha dx}{\sqrt{(1-\alpha x)}}} dx = \frac{e^{\alpha t} (\alpha + \alpha \sqrt{(1-\alpha x)})}{1 + \alpha \alpha}. \end{aligned}$$

Addita ergo indefinita constante habebitur $e^{\alpha t} z = C c \kappa^2 pq + c \kappa^2 PQ e^{\alpha t} + \frac{\alpha c \kappa^2 pq e^{\alpha t} (x + \alpha y)}{1 + \alpha \alpha}$, atque calor quaesitus $z = e^{-\alpha t} C c \kappa^2 pq + c \kappa^2 PQ + \frac{\alpha c \kappa^2 pq (x + \alpha y)}{1 + \alpha \alpha}$.

§. 13. Hinc igitur reperietur calor meridianus loci propositi faciendo $t = 0$, quo facto erit $x = 0$, et $y = 1$. Quare tempore meridiei erit calor $= C c \kappa^2 pq + c \kappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 c \kappa^2 pq}{1 + \alpha \alpha}$. Si detur calor meridianus, isque ponatur $= f$, determinabitur inde constans quantitas C , quae per integrationem est ingressa, eritque $C c \kappa^2 pq = f - c \kappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c \kappa^2 pq}{1 + \alpha \alpha}$; unde ex dato calore meridiano definietur calor pro quavis hora eiusdem diei, ita vt sole in S existente post meridiem fit calor regionis propositae $z = e^{-\alpha t} f + c \kappa^2 PQ (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{\alpha c \kappa^2 pq (x + \alpha y)}{1 + \alpha \alpha} - \frac{\alpha^2 c \kappa^2 pq e^{-\alpha t}}{1 + \alpha \alpha}$.

§. 14. Inuestigemus nunc gradum caloris, qui fuit eodem die, cum sol est ortus; poni debet $t = -g$, eritque pariter ac in occasu $y = \frac{-PQ}{pq}$ at $x = -\frac{\sqrt{(p^2 q^2 - P^2 Q^2)}}{pq}$, ob angulos ante meridiem negativos. Ex quibus prodibit calor, quando sol oritur $= e^{\alpha g} f - c \kappa^2 PQ (e^{\alpha g} - 1) - \frac{\alpha c \kappa^2 (\alpha PQ + \sqrt{(p^2 q^2 - P^2 Q^2)})}{1 + \alpha \alpha} - \frac{\alpha^2 c \kappa^2 pq e^{\alpha g}}{1 + \alpha \alpha} = e^{\alpha g} (f - c \kappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c \kappa^2 pq}{1 + \alpha \alpha}) + \frac{c \kappa^2 PQ - \alpha c \kappa^2 \sqrt{(p^2 q^2 - P^2 Q^2)}}{1 + \alpha \alpha}$. At si anguli g sinus ponatur $= m$, cosinus $= n$; erit calor tempore ortus solis $= e^{\alpha g} (f + c \kappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c \kappa^2 pq}{1 + \alpha \alpha}) - \frac{c \kappa^2 npq - \alpha c \kappa^2 mpq}{1 + \alpha \alpha}$.

§. 15.

§. 15. Perueniet nunc sol ad occasum in O fietque $z = g$; $y = n = \frac{PQ}{pq}$ et $x = m = \frac{\sqrt{(p^2q^2 - P^2Q^2)}}{pq}$, ideoque $PQ = -npq$. Hinc igitur tempore occasus solis prodibit calor loci propositi $= e^{-\alpha g} (f + c\kappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{c\kappa^2 npq + \alpha c\kappa^2 mpq}{1+\alpha\alpha}$. Maximus autem hoc die calor erit tum, quando fit $z = c\kappa^2 pqy + c\kappa^2 PQ$; quippe quo tempore erit $dz = 0$. Substituto autem hoc valore in aequatione inuenta prodibit $e^{-\alpha t} (f - c\kappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) = \frac{c\kappa^2 pq(y - \alpha x)}{1+\alpha\alpha}$; ex qua valor anguli t erutus et in tempus conuersus praebebit momentum maximi caloris a meridie computando.

§. 16. Cum igitur calor tempore solis occasus fit re-
pertus, quem ponamus breuitatis gratia $= b$, quantum iste calor sequente nocte diminuatur, inuestigemus. Ver-
setur itaque sol post occasum in V, et ponatur angulus $OPV = t$, et calor tum fit $= z$, dum ergo sol per arcu-
lum Vv progreditur erit decrementum caloris $dz = -\alpha z dt$, hincque $l \frac{b}{z} = \alpha t$; ex quo fiet $z = e^{-\alpha t} b$. Sequenti igitur die, cum sol iterum orietur, prodibit calor $= e^{-2\alpha(\pi-g)} b$. Per totam ergo noctem calor diminuetur, vnde quavis nocte frigus summum erit, quando sol oritur.

§. 17. Cum igitur primo die tempore ortus solis gradus caloris fuisset $= e^{\alpha g} (f + c\kappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{c\kappa^2 pq(n + \alpha m)}{1+\alpha\alpha}$; die sequente calor tempore ortus solis erit $= e^{\alpha g - 2\alpha\pi} (f + c\kappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{e^{-2\alpha(\pi-g)} c\kappa^2 pq(n - \alpha m)}{1+\alpha\alpha}$; si quidem sol ponatur interea eandem declinationem conseruare. At si hoc eodem sequente die calor tempore meridiei ponatur Φ , debet calor tempore ortus eiusdem diei esse $= e^{\alpha g} (\Phi + c\kappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{c\kappa^2 pq(n + \alpha m)}{1+\alpha\alpha}$ vnde prodibit $\Phi +$

$$\Phi + c\kappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha} - \frac{e^{-\alpha\epsilon} c\kappa^2 pa(n+am)}{1+\alpha\alpha} = e^{-2\alpha\pi}$$

$$(f + c\kappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{e^{\alpha\epsilon-2\alpha\pi} c\kappa^2 pq(n-am)}{1+\alpha\alpha}$$

§. 18. Si sol perpetuo eandem declinationem conseruaret, tum quoque perpetuo eadem diei hora idem gradus caloris haberetur. Hoc igitur casu foret $\Phi = f$, atque calor tempore ortus solis primo die aequalis calori sequentis diei eodem tempore. Hinc igitur erit $e^{\alpha\epsilon} (1 - e^{-2\alpha\pi}) (f + c\kappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) = c\kappa^2 pq (n+am - e^{-2\alpha(\pi-\epsilon)} n am)$

atque calor meridianus, qui erit constans, definietur $f = \frac{c\kappa^2 pq (e^{-\alpha\epsilon} (n+am) - e^{\alpha\epsilon-2\alpha\pi} (n-am))}{(1-e^{-2\alpha\pi})(1+\alpha\alpha)} - c\kappa^2 npq + \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}$.

Sub aequatore ergo, ob $P=0$, et $p=1$, itemque $m=1$ et $n=0$, hincque $g=\frac{\pi}{2}$ foret constans calor meridianus $f = \frac{\alpha c\kappa^2 q e^{-\alpha\frac{\pi}{2}}}{(1+\alpha^2)(1-e^{-\alpha\pi})} + \frac{\alpha^2 c\kappa^2 q}{1+\alpha\alpha}$.

§. 19. Formulae istae tantopere sunt compositae et perplexae; vt ex iis vix quicquam concludi queat. Huius autem incommodi ratio in eo est posita, quod amplitudo ortiua et occidua in eas ingrediatur, atque lex continuitatis sit interrupta: quoniam pro nocte alio sum vsus calculo alio pro die. Quamobrem vt aliquid ad vtilitatem deriuare queamus, necesse est aliquantum a veri similitudine recedere, atque continuam legem assumere, secundum quam gradus caloris mutantur. Ita cum calores solis supra horizontem existentis sint sinibus altitudinum proportionales; eadem lege oportebit calorem solis naturalem sub horizonte latentis negativum statuere, ac sinui depressionis sub horizonte proportionalem.

§. 20. Hac autem admiffa hypothefi facile perfpicitur conclufiones inde deducendas veritati minus fore contentaneas, eo quod foli hoc pacto, quando fub horizonte verfatur, non folum omnis effectus ad calorem generandum adimatur, fed etiam vis contraria frigorifica tribuatur. Qua quidem in re experientia aduerfari videtur, cum fol fub horizonte calori praefenti plus nocere non poffit, quam fi prorfus ab effet; at dum ipfum horizontem occupat, iam perinde eft, ac fi prorfus foret fublatus. Quicquid autem fit, conueniet ex hac hypothefi confequentias formare, quae nihilominus aliquam vtilitatem habere poterunt, cum iam ante pateat, qua in parte conclufiones ab experientia diffentire debeant.

5. 21. Quoniam hoc pacto continuitatis lex obferuatur, ex aequatione fupra inuenta $z = e^{-\alpha t} (f - c\kappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) + c\kappa^2 PQ + \frac{\alpha c\kappa^2 pq(x+\alpha y)}{1+\alpha^2}$, quae praebet calorem poft meridiem tempore t , existente calore meridiano $= f$, etiam gradus caloris nocturni poterunt determinari. Ita fequente media nocte ob $t = \pi$ et $x = 0$, $y = -1$, erit gradus caloris $= e^{-\alpha\pi} (f - c\kappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) + c\kappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}$. Sequentis autem diei meridie erit calor $= e^{-2\alpha\pi} (f - c\kappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) + c\kappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}$, ob $t = 2\pi$ et $x = 0$, $y = 1$.

§. 22. Incrementum ergo caloris, a meridie primi diei ad meridiem fequentem erit $= (1 - e^{-2\alpha\pi}) (c\kappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$. Si ergo fol perpetuo eandem declinationem retineret, foret etiam quotidie eadem femper caloris conditio, atque meridianus calor conftans. Hoc itaque cafu erit calor meridianus $f = c\kappa^2 (PQ + \frac{\alpha^2 pq}{1+\alpha\alpha})$. Singulis ergo diebus

diebus, cum maximus calor incidat, quando est $e^{-\alpha t} (f - c\kappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) = \frac{c\kappa^2 pq (y-\alpha x)}{1+\alpha\alpha}$ incidet nostro casu maximus calor post meridiem, quando fit $y = \alpha x$ seu $\frac{\alpha}{y} = \frac{\alpha}{\alpha}$: atque ipse calor maximus erit $= c\kappa^2 (PQ + \frac{\alpha pq}{\sqrt{1+\alpha\alpha}})$; hoc est quando sol iam tantum meridianum est transgressus, vt fit anguli APS tangens $= \frac{1}{\alpha}$. Quare cum maximus calor circiter in horam tertiam pomeridianam incidere obseruetur, idque tum quando aestas maxime est aequabilis, erit proxime $\alpha = 1$.

§. 23. Cum igitur, sole eandem declinationem conferuante, incrementum caloris meridiani vno die fit $= (1 - e^{-2\alpha\pi}) (c\kappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$, erit incrementum duobus diebus acquisitum $= (1 - e^{-4\alpha\pi}) (c\kappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$, atque generaliter incrementum n diebus acquisitum erit $= (1 - e^{-2n\alpha\pi}) (c\kappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$. Cum igitur sol tempore vnus diei circiter $\frac{1}{365}$ partem eclipticae percurrat; n diebus conficiet $\frac{n}{365}$ partes; hoc est angulum $\frac{2\pi n}{365}$; denotante π angulum 180. graduum. Tempore ergo, quo sol eclipticae arcum ds percurrit, ob $n = \frac{365 ds}{2\pi}$, erit incrementum caloris meridiani $= (1 - e^{-365\alpha ds}) (c\kappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$; puta in eadem eleuatione poli, vbi tum est meridies.

§. 24. Quoniam autem propter exponentem $365\alpha ds$ infinite paruum est $e^{-365\alpha ds} = 1 - 365\alpha ds$, erit, dum sol per arcum eclipticae ds progreditur, existente tota eclipticae circumferentia $= 2\pi$, incrementum caloris meridiani $= 365\alpha ds (c\kappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$; in qua expressione denotat, α numerum vnitati pproxime aequalem; c

gradum caloris constantem in superficie solis; P eleuationis poli in loco proposito sinum, Q sinum declinationis solis borealis; atque p et q cosinus sinibus P et Q respondentes. Denique κ est tangens semidiametri solis apparentis, atque f denotat ipsum calorem meridianum tempore oblato.

Tr. 1.
 2.
 §. 25. Denotet ergo AVB aequatorem, et EVL eclipticam, intersectio V aequinoctium vernum atque P polum loci propositi. Versetur sol in S post aequinoctium vernum, et ponatur arcus VS = s existente tota ecliptica = 2π ; atque sit arcus VS finis = u; angulique S VT, qui est $23^{\circ} 29'$, sinus = m; calor meridianus autem, dum sol in S versatur = r. His positis erit $Q = mu$, et $q = V(1 - m^2 uu)$; ac dum sol per arculum ds progreditur erit incrementum caloris meridiani $dr = 365 \cdot \alpha ds (c\kappa^2 m Pu + \frac{\alpha^2 c\kappa^2 p \sqrt{(1 - m^2 uu)}}{1 + \alpha\alpha} - r)$ existente $ds = \frac{du}{\sqrt{(1 - uu)}}$. Ponatur breuitatis gratia n pro numero 365 α erit $dr + nr ds = (c\kappa^2 m Pu + \frac{\alpha^2 c\kappa^2 p \sqrt{(1 - m^2 uu)}}{1 + \alpha\alpha}) n ds$.

§. 26. Postrema haec aequatio integrata dabit $c^{ns} r = c\kappa^2 n \int e^{ns} ds (m Pu + \frac{\alpha^2 p \sqrt{(1 - m^2 uu)}}{1 + \alpha\alpha}) = \frac{c\kappa^2 m n P}{1 + m\alpha} e^{ns} (nu - \sqrt{(1 - uu)}) + \frac{\alpha^2 c\kappa^2 n p}{1 + \alpha\alpha} \int e^{ns} ds \cdot V(1 - m^2 u^2)$. Ad integrale posterioris membri inueniendum oportet nosse, esse $\int e^{ns} u^v ds =$

$$ds = \frac{e^{ns} u^{v-1} (nu - v \sqrt{(1 - uu)}) + v(v-1) \int e^{ns} u^{v-2} ds}{nn + vv}$$

$$\text{vnde est } \int e^{ns} ds = \frac{e^{ns}}{n}; \int e^{ns} u^2 ds = \frac{e^{ns} u (nu - 2\sqrt{(1 - uu)}) + \frac{2}{n} e^{ns}}{4 + nn}$$

$$= \frac{e^{ns} (2 + n^2 u^2 - 2nu \sqrt{(1 - uu)})}{n(4 + nn)}; \int e^{ns} u^4 ds =$$

e^{ns}

$$\frac{e^{ns} u^3 (uu - 4V(1-uu)) + \frac{12e^{ns}}{n(4+nn)} (2+n^2 u^2 - 2nuV(1-uu))}{16+nn}$$

$$\frac{e^{ns} (24+12n^2 u^2 + 4n^2 u^4 + n^4 u^4 - 4nu(6+4uu+nnuu)V(1-uu))}{n(4+nn)(16+nn)}$$

atque ita porro.

§. 27. Quoniam ergo est $V(1-m^2 u^2) = 1 - \frac{m^2 u^2}{2} - \frac{m^4 u^4}{8} - \text{etc.}$ erit $\int e^{ns} ds V(1-m^2 u^2) = e^{ns} \left(\frac{s}{n} - \frac{m^2 u^2 s}{2n} - \frac{m^4 u^4 s}{8n} - \text{etc.} \right)$

$$\frac{mm(2+nnuu - 2nuV(1-uu))}{2n(4+nn)} - \frac{m^4}{8} \frac{(24+12n^2 u^2 + 4n^2 u^4 + n^4 u^4 - 4nu(6+4u+nnuu)V(1-uu))}{n(4+nn)(16+nn)}$$

- etc.) + const. Ponamus $s = 0$, erit $u = 0$ et $V(1-uu) = 1$; fietque calor meridianus in aequinoctio verno $r = C - \frac{cm^2 mnP}{1+nn} + \frac{\alpha^2 cu^2 nP}{1+\alpha\alpha} \left(\frac{1}{n} - \frac{mm}{n(4+nn)} - \frac{3m^4}{n(4+nn)(16+nn)} - \text{etc.} \right)$

At posito $s = 2\pi$, r denotabit calorem meridianum in sequente aequinoctio verno, ita vt fit $e^{n\pi} r = C - \frac{cm^2 mnP e^{2n\pi}}{1+nn} + \frac{\alpha^2 cu^2 nP e^{2n\pi}}{1+\alpha\alpha} \left(\frac{1}{n} - \frac{m^2}{n(4+nn)} - \frac{3m^4}{n(4+nn)(16+nn)} - \text{etc.} \right)$

§. 28. Cum autem post innumerabiles reuolutiones solis perpetuo idem calor meridianus in aequinoctium verum incidere debeat, oportebit quantitatem constantem C esse $= 0$; si pro loco proposito ponatur calor meridianus in aequinoctio verno $= a$, erit $a = \frac{\alpha^2 cu^2 P}{1+\alpha\alpha} \left(1 - \frac{m^2}{4+nn} - \frac{3m^4}{(1+n^2)(16+nn)} - \text{etc.} \right) - \frac{cm^2 mnP}{1+nn}$. Atque dum sol in loco quocunque S ecclipticae versatur, erit calor meridianus

$$\text{ridianus } \gamma = \frac{\alpha^2 c \kappa^2 p}{1 + \alpha \alpha} \left(1 - \frac{m^2(2+n^2u^2-2nu\sqrt{1-uu})}{2(4+nn)} - \frac{m^4(24+12n^2u^2+4n^2u^4+n^4u^6)}{8(4+nn)} \right) - \frac{4nu(r+4u+nnuu)\sqrt{1-uu}}{(16+nn)} + \frac{c \kappa^2 m n P (nu - \sqrt{1-uu})}{1+nn}$$

§. 29. Cum n fit numerus valde magnus, quippe proxime aequalis numero 365, ob $\alpha = 1$, atque m numerus unitate minor, scilicet $= 0,3982823$. pro dato terrae loco ad quemvis anni cuiusque diem proxime poterit definiri calor meridianus. Aequinoctio nimirum verno erit calor meridianus $\frac{\alpha^2 c \kappa^2 p}{1 + \alpha \alpha} - \frac{c \kappa^2 m n P}{1 + nn}$; aequinoctio vero autumnali erit calor meridianus $= \frac{\alpha^2 c \kappa^2 p}{1 + \alpha \alpha} + \frac{c \kappa^2 m n P}{1 + nn}$. At solstitio aestivo habebitur calor meridianus $= \frac{\alpha^2 c \kappa^2 p}{1 + \alpha \alpha} \left(1 - \frac{m^2 n^2}{2(4+nn)} - \frac{m^4 n^4}{8(4+nn)(16+nn)} - \text{etc.} \right) + \frac{c \kappa^2 m n^2 P}{1 + nn} = \frac{\alpha^2 c \kappa^2 p \sqrt{1-mm}}{1 + \alpha \alpha} + \frac{c \kappa^2 m n^2 P}{1 + nn}$; atque solstitio hyemali erit calor meridianus $= \frac{\alpha^2 c \kappa^2 p}{1 + \alpha \alpha} \left(1 - \frac{m^2 n^2}{2(4+nn)} - \text{etc.} \right) - \frac{c \kappa^2 m n^2 P}{1 + nn} = \frac{\alpha^2 c \kappa^2 p \sqrt{1-mm}}{1 + \alpha \alpha} - \frac{c \kappa^2 m n^2 P}{1 + nn}$, neglectis terminis nimium exiguis.

§. 30. Sub aequatore ergo est calor meridianus in aequinoctio verno $= \frac{c \kappa^2}{2}$, in solstitio aestivo $= \frac{c \kappa^2}{2} - \frac{c \kappa^2 m^2 n^2}{4(4+nn)}$; in aequinoctio autumnali $= \frac{c \kappa^2}{2}$; et in solstitio hyemali $= \frac{c \kappa^2}{2} - \frac{c \kappa^2 m^2 n^2}{4(4+nn)}$. At sub elevatione poli 80° ; erit calor meridianus in aequinoctio verno $\frac{c \kappa^2}{4} - \frac{c \kappa^2 m n \sqrt{3}}{2(1+nn)}$; in solstitio aestivo $= \frac{c \kappa^2}{4} - \frac{c \kappa^2 m^2 n^2}{8(4+nn)} + \frac{c \kappa^2 m n^2 \sqrt{3}}{2(1+nn)} - \frac{c \kappa^2 \sqrt{1-mm}}{4} + \frac{c \kappa^2 m n^2 \sqrt{3}}{2(1+nn)}$; in aequinoctio autumnali $= \frac{c \kappa^2}{4} + \frac{c \kappa^2 m n \sqrt{3}}{2(1+nn)}$; et in solstitio hyberno $= \frac{c \kappa^2}{4} - \frac{c \kappa^2 m^2 n^2}{8(4+nn)} - \frac{c \kappa^2 m n^2 \sqrt{3}}{2(1+nn)} - \frac{c \kappa^2 \sqrt{1-mm}}{4} - \frac{c \kappa^2 m n^2 \sqrt{3}}{2(1+nn)}$. Sub ipso denique polo boreali erit calor in aequinoctio verno $= \frac{-c \kappa^2 m n}{1+nn}$; in solstitio aestivo $= \frac{c \kappa^2 m n^2}{1+nn}$; in aequinoctio autumnali $= \frac{c \kappa^2 m n^2}{1+nn}$; atque in solstitio hyberno $= \frac{-c \kappa^2 m n^2}{1+nn}$: in quibus formulis denotat $n = 365$, cum posuerimus $\alpha = 1$.

§. 31. Ex formula inuenta intelligitur, calorem meridianum non fore maximum ipso solstitio aestiuo, neque minimum solstitio hyberno; sed aliquantum post has tempestates incidere. Quod tempus vt definiatur pro quavis eleuatione poli, quaeratur, quando fiat $dr = 0$. Hoc autem euenit, cum fit $r = c\kappa^2 m P u + \frac{\alpha^2 c\kappa^2 p \sqrt{(1-m^2 u^2)}}{1+\alpha\alpha}$; erit ergo $c\kappa^2 m P u + \frac{\alpha^2 c\kappa^2 p \sqrt{(1-m^2 u^2)}}{1+\alpha\alpha} = \frac{\alpha^2 c\kappa^2 p \sqrt{(1-m^2 u^2)}}{1+\alpha\alpha} + \frac{c\kappa^2 m n P (nu - \sqrt{(1-uu)})}{1+n\alpha}$; est enim proxime $r = \frac{\alpha^2 c\kappa^2 p \sqrt{(1-m^2 u^2)}}{1+\alpha\alpha} + \frac{\alpha^2 \kappa^2 p m^2 u \sqrt{(1-uu)}}{(1+\alpha^2)n\sqrt{(1-m^2 u^2)}} + \frac{c\kappa^2 m n P (nu - \sqrt{(1-uu)})}{1+n\alpha}$; generaliter sumendis iis tantum terminis, in quibus n plurimas habet dimensiones.

§. 32. Ad tempus igitur definiendum, quo calor meridianus est maximus, ista habetur aequatio $u = -n\sqrt{(1-uu)}$ et $\frac{u}{\sqrt{(1-uu)}} = -n$ ergo $u = \frac{n}{\sqrt{(1+n^2)}}$ et $\sqrt{(1-uu)} = \frac{1}{\sqrt{(1+n^2)}}$. Maximus ergo calor meridianus, pariter ac maximum frigus incident post solstitia; at discrimen ne vnicum quidem diem adaequat, ita vt satis tuto ipsa solstitia pro momentis, in quibus calor meridianus tum fit maximus tum minimus, haberi queant. Quodsi cum obseruationibus minus congruat, id hypothesi a veritate nimium aberranti est tribuendum. Vi hypothesis enim in solstitio aestiuo calor per noctem minime diminuitur, per diem autem maxime augetur.

§. 33. Quoniam calor meridianus sub aequatore non multum variatur per anni tempestates, ex eo commodissime calor in superficie solis poterit determinari. Denotet enim i maximum calorem meridianum sub aequatore obseruatum, qui cum fit $= \frac{c\kappa^2}{2}$, erit $c = \frac{2i}{\kappa^2}$. At cum κ sit tangens semidiametri solis apparentis, si pro κ sumatur

96 DETERMIN. CALOR. ET FRIG. GRADVVM.

matur tangens 16', fiet $c = 92328 i$; ita vt calor in superficie solis propemodum fit centies millies maior, quam summus calor tempore meridiei, sub ipso aequatore. Verum vt ratio multiplicationis caloris pateat, notandum est, summum calorem meridianum sub aequatore duplo maiorem esse, quam medium gradum caloris, inter gradus caloris meridiani aequinoctialis verni et autumnalis, sub eleuatione poli 60°.

§. 34. Qui formulas datas contemplabitur, mox perspiciet, summum calorem meridianum neque sub aequatore neque sub polis deprehensum iri. Quamobrem operae pretium erit illas regiones terrae determinare, in quibus tempore solstitii aestiui maximus obseruari debeat calor. Calculo vero subducto reperietur harum regionum eleuatio poli 41. graduum: fieri enim debet $\frac{p}{p} = \frac{2m}{\sqrt{1-mm}}$. His vero regionibus erit calor meridianus in solstitio aestiuo = $\frac{cx^2\sqrt{1+mm}}{2} = \frac{15215 cx^2}{2}$, cum summus calor meridianus sub aequatore sit = $\frac{cx^2}{2}$.

§. 35. Hinc igitur sequentem tabellam deduxi, in qua pro variis poli eleuationibus conspiciuntur gradus caloris meridiani, tempore tam aequinoctiorum quam solstitiorum.

Calor

Calor meridianus.

Elevatio Poli.	Aeq. Verno	Solstit. Aest.	Aeq. Aut.	Solstit. hyb.
0°	0, 500	0, 459	0, 500	0, 459
10°	0, 492	0, 521	0, 492	0, 382
20°	0, 469	0, 567	0, 470	0, 295
30°	0, 432	0, 596	0, 434	0, 198
40°	0, 382	0, 607	0, 384	0, 095
50°	0, 321	0, 600	0, 322	-0, 010
60°	0, 249	0, 574	0, 251	-0, 115
70°	0, 170	0, 531	0, 172	-0, 218
80°	0, 085	0, 472	0, 088	-0, 313
90°	-0, 001	0, 398	0, 001	-0, 398

§. 36. Cum autem hac theoria pro quouis loco folis in eccliptica detur calor meridianus, r ita vt sit $r = \frac{cx^2 p \sqrt{(1-m^2 u^2)}}{z} + \frac{cx^2 pm^2 u \sqrt{(1-uu)}}{2n \sqrt{(1-m^2 u^2)}} + \frac{cx^2 mnP(nu - \sqrt{(1-uu)})}{1+nn}$. Hoc ergo die tempore t post meridiem erit calor $= e^{-\alpha t} cn^2 \left(\frac{pm^2 u \sqrt{(1-uu)}}{2n \sqrt{(1-m^2 u^2)}} - \frac{mnP \sqrt{(1-uu)}}{1+nn} \right) + cn^2 m P u + \frac{cx^2 p(x+y) \sqrt{(1-m^2 u^2)}}{z}$ seu neglectis terminis qui per n sunt diuisi erit calor iste $Z = cn^2 \left(m P u + \frac{p(x+y) \sqrt{(1-m^2 u^2)}}{z} \right)$; vnde sequitur maximum cuiusuis diei calorem incidere in horam tertiam pomeridianam: ideo quia posuimus $\alpha = 1$. Nam si α maius foret, maximus calor propius ad meridiem incideret.

§. 37. Quamobrem si longitudinis folis finus ponatur $= u$; atque P designet finum elevationis poli, p eius cosinum; ac m finum inclinationis ecclipticae ad aequatorem: erit pro dato loco

Tom. XI.

N

Calor.

		Calor.
Meridie		$c\kappa^2 (mPu + \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2})$
hora 3		$c\kappa^2 (mPu + \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{\sqrt{2}})$
hora 6		$c\kappa^2 (mPu + \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2})$
hora 9		$c\kappa^2 (mPu + 0)$
hora 12		$c\kappa^2 (mPu - \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2})$
mane		
hora 3		$c\kappa^2 (mPu - \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{\sqrt{2}})$
hora 6		$c\kappa^2 (mPu - \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2})$
hora 9		$c\kappa^2 (mPu - 0)$
hora 12		$c\kappa^2 (mPu + \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2})$

§. 38. Hinc autem clarissime insufficientia huius hypothesi elucet, cum sub aequatore ipso media nocte maius frigus deberet regnare, quam rigidissima hyeme sub polis. Causa quidem huius absurdi sponte se offert, quoniam secundum theoriam sub aequatore tempore nocturno calor maxime imminui debeat, eo quod soli sub horizonte latenti adeo vim frigefaciendi tribuimus, eamque eo maiorem, quo profundius sit submersus: in zona autem torrida profundissime submergitur. Quocirca ista theoria correctione indiget maxima, si quidem ad observationes accommodari debeat.

§. 39. Ob has difficultates tentabo rem expedire per priorem hypothesin, quae veritati magis est consentanea; manentibus ergo postremis denominationibus, praeterquam quod r denotet gradum caloris tempore ortus solis, reperietur haec aequatio $dr + nr ds =$

$$\frac{c\kappa^2 ne^{-2\alpha\pi} ds (mPu e^{2\alpha\pi} - 1) + a(1 + e^{-\alpha\pi}) \sqrt{(p^2 - m^2u^2)}}{(1 + \alpha\alpha)(1 - e^{-2\alpha\pi})} \text{ vbi } g \text{ de-}$$

notat

notat arcum, cuius sinus est $\frac{\sqrt{(p^2 - m^2 u^2)}}{p\sqrt{(1 - m^2 u^2)}}$. Ex qua aequatione, cum n fit numerus tam magnus scilicet 365, erit proxime

$$r = \frac{c\kappa^2}{1 + \alpha\alpha} \frac{e^{-2\alpha\pi}(mPu(e^{2\alpha g} - 1) + \alpha(e^{2\alpha g} + 1)\sqrt{(p^2 - m^2 u^2)})}{(1 - e^{-2\alpha\pi})}$$

vnde reperitur calor meridianus $f = \frac{c\kappa^2 e^{-\alpha g}}{1 + \alpha^2}$

$$\frac{(e^{2\alpha g - 2\alpha\pi} - 1)mPu + (e^{2\alpha g - 2\alpha\pi} + 1)\alpha\sqrt{(p^2 - m^2 u^2)}}{1 - e^{-2\alpha\pi}} + c\kappa^2 mPu$$

$$+ \frac{\alpha^2 c\kappa^2 p\sqrt{(1 - m^2 u^2)}}{1 + \alpha\alpha}. \text{ Calor in occasu erit } =$$

$$\frac{c\kappa^2 e^{-2\alpha g}((e^{2\alpha g} - 1)mPu + (e^{2\alpha g} + 1)\alpha\sqrt{(p^2 - m^2 u^2)})}{(1 + \alpha^2)(1 - e^{-2\alpha\pi})}, \text{ ergo quouis}$$

die se habet calor ortus ad calorem occasus vt $e^{-2\alpha\pi}$ ad $e^{-2\alpha g}$ seu vt $e^{2\alpha g}$ ad $e^{2\alpha\pi}$; quo breuiores ergo sunt dies, eo maior est differentia inter gradus caloris in ortu et occasu.

§. 40. Post meridiem ergo tempore t quod in arcum aequatoris conuersum dat angulum t , erit calor in regione

$$\text{proposita } z = \frac{c\kappa^2 e^{-\alpha(t+g)}}{(1 + \alpha^2)(1 - e^{-2\alpha\pi})} ((e^{2\alpha(g-\pi)} - 1)Pu) + (e^{2\alpha(g-\pi)}$$

$$+ 1)\alpha\sqrt{(p^2 - m^2 u^2)} + c\kappa^2 mPu + \frac{\alpha c\kappa^2 p(\alpha + \alpha g)\sqrt{(1 - m^2 u^2)}}{1 + \alpha^2}, \text{ vbi } u$$

denotat sinum longitudinis solis; x sinum anguli t et y cofi-

num ipsius: g vero angulum cuius sinus est $\frac{\sqrt{(p^2 - m^2 u^2)}}{p\sqrt{(1 - m^2 u^2)}}$ et

$$\text{cofinus } = \frac{-mPu}{p\sqrt{(1 - m^2 u^2)}} \text{ seu } g = \frac{\pi}{2} + \text{Ar. fin. } \frac{mPu}{p\sqrt{(1 - m^2 u^2)}} \text{ vel}$$

$$dg = \frac{mPdu}{(1 - m^2 u^2)\sqrt{(p^2 - m^2 u^2)}}.$$

