1749

De vibratione chordarum exercitatio

Leonhard Euler

ra, Neuroptera, Lepidoptera, Hymenoptera, Diptera, & Aptera. Horum omnium pleraque genera non paucas ſpecies comprehendunt, quas *Linnæus* non tantum in Suecia primus vidit, ſed quarum apud ceteros quoque Scriptores, qui de Inſectis egerunt, nulla mentio fit. Harum ſpecierum plurimæ inter Scarabæos ſunt, Dermeſtes, Coccinellas, Chryſomelas, Curculiones, quæ omnia ad Coleoptera pertinent. Ex Hemipteris aliquot ſpecies inter Cicadas, Chermes, & Aphides, plurimæ inter Cimices, ſunt. Immo novum aliquod genus habet, Thrips nominatum, cujus duas ſpecies in *Act. Stockholm. A. 1744* deſcriptæ ſunt. Unam ex *Caroli de Geer* obſervatione *Linnæus* deſcribit, elytris albis nigrisque faſciis, corpore atro in floribus præſertim luteis compoſitis habitantem. Ex Neuropteris attentionem merentur Hemerobeorum aliquot ſpecies, plures vero Phryganearum & Ephemerarum. Inter Lepidoptera magnus numerus Phalænarum eſt, quas *Linnæus* primus obſervavit atque deſcripſit; inter Hymenoptera vero Tenthredinum, Ichnevmonum, & Veſparum. Porro ex Dipteris aliquot inter Aſilos ſunt atque Tubanos, plures inter Muſcas & Tipulas, neque non inter Apterorum genera ſunt, quæ vel in hoc *Linnæi* libro primum indicata fuerunt, vel in Actis Academiarum Sueciæ primum deſcripta. In ultima claſſe vermes, de quibus tamen nihil magnopere indicandum habetur. Acceſſerunt vero duæ figurarum æneearum tabulæ, quarum prima aves, atque Cerambycis ſpeciem, altera, præter aves aliquot, Cyprinum piſcem, vermes aliquot, & inſecta, exhibet.

DE VIBRATIONE CHORDARUM EXERCItatio, Autore L. EULERO.

I. Quæ adhuc de motu chordarum vibratorio tum a *Tayloro* & *Bernoullio*, tum ab aliis, ſunt eruta, tametſi hoc argumentum exhaurire videantur, gemina tamen limitatione ita reſtringuntur, ut vix ullo caſu verus chordæ vibratæ motus unquam

unquam definiri possit. Primum enim assumserunt, chordam tensam vibrationes tantum quasi infinite parvas edere, ita ut chorda in hoc motu, sive situm teneat rectum, sive incurvatum, perpetuo tamen eandem longitudinem conservare censeri possit. Altera limitatio in hoc consistit, quod cunctas vibrationes regulares posuerint: in singulis scilicet vibrationibus totam chordam semel ac simul in directum extendi assumserunt, & extra hunc situm figuram ejus incurvatam quaesiverunt, quam quidem trochoidem in infinitum elongatam esse invenerunt.

II. Prima quidem limitatio, qua excursiones chordae vibrantis infinite parvae statuuntur, etiamsi re ipsa semper ad chordae longitudinem rationem teneant finitam, conclusiones tamen, inde deductas, vix perturbat, quoniam plerumque excursiones tam sunt exiguae, ut sine errore sensibili pro infinite parvis haberi possint. Tum vero etiam fines tam mechanicae, quam analyseos, nondum sunt eo usque promoti, ut motus in vibrationibus finitis determinari possit. Quod vero ad alteram limitationem spectat, qua vibrationes omnes regulares assumunt, eam ita salvare conantur, ut dicant, etiamsi primo motus initio vibrationes ab hac lege recedant, eas tamen brevi temporis spatio ita se ad uniformitatem componere, ut chorda in qualibet vibratione semel ac simul in lineam rectam extendatur, extra hunc situm autem figuram trochoidis elongatae affectet.

III. Hoc quidem satis est confirmatum, si unica tantum vibratio huic regulae fuerit conformis, sequentes omnes eandem sequi debere. Simul vero hinc perspicitur, quemadmodum sequentium vibrationum status a praecedentibus pendeat, ex iisque determinari possit, ita vicissim ex statu sequentium indolem praecedentium concludi posse. Quare, si vibrationes sequentes fuerint regulares, fieri nullo modo poterit, ut antecedentes ab hac regula discesserint; ex quo perspicuum est, si prima vibratio fuerit irregularis, sequentes nunquam ad perfectam regularitatem pervenire posse. Prima autem vibratio ab arbitrio nostro pendet, dum chordae, antequam dimittitur,

mittitur, figura quæcunque conciliari poteſt, atque hinc ejusdem chordæ motus vibratorius in infinitum variari poterit, prout ei initio motus alia atque alia figura inducitur.

IV. Hinc itaque naſcitur ſequens quæſtio, qua univerſa hæc inveſtigatio continetur:

Si chorda datæ longitudinis datæque molis a data vi, ſeu pondere, tendatur, eaque a ſitu recto in figuram quamcunque, quæ tamen quaſi infinite parum a recta diſcrepet, diducatur, ſubitoque dimittatur, determinare motum vibratorium totum, quo agitabitur.

Problema hoc tam in Mechanica, quam in Analyſi, difficillimum feliciſſimo ſucceſſu primus aggreſſus eſt Celeb. *D'Alembert*, qui cum Academia Regia elegantiſſimam ejus ſolutionem communicavit. Quoniam autem in hujusmodi indagationibus ſublimibus ſemper non parum fructus percipi ſolet ex collatione plurium ejusdem Problematis ſolutionum, meam quoque ſolutionem hujus quæſtionis in medium afferre non dubito, quæ etſi ab *Alembertiana* parum diſcrepat, tamen ſumma hujus argumenti amplitudo effecit, ut in applicatione formularum generalium haud contemnendas obſervationes adjeciſſe mihi videar.

V. Primum ergo ipſum Problema dilucide proponam, ut appareat, quibus ſubſidiis tam ex analyſi, quam ex mechanica, petitis opus ſit ad ſolutionem impetrandam.

TAB. V Fig. 1. Propoſita igitur ſit chorda AB in terminis ſuis A & B fixa, & vi quacunque, ut in inſtrumentis muſicis fieri ſolet, ſecundum directionem AF tenſa. Sit chorda hæc ubique æquabilis craſſitiei, ac vocetur:

Ejus longitudo $AB = a$

Ejus maſſa, ſeu pondus, $= M$

& vis tendens AF æqualis ſit ponderi $= F$.

Tum chorda hæc ex ſtatu ſuo naturali AB diducatur in ſitum incurvatum quemcunque $ALlB$, qui quidem infinite parum diſcrepet a naturali recto AB, ut longitudo $ALlB$ non ſenſibiliter ſuperet longitudinem AB; ſitque hæc figura $ALlB$ chordæ initio inducta cognita. Jam quæritur, ſi chorda ex hoc ſitu

ſitu ſubito dimittatur, qualem motum ſit conſecutura, & cujusmodi vibrationes ſit editura.

VI. Poſtquam ergo chorda e ſitu $ALlB$ erit dimiſſa, a vi tendente ſtatim ſitum naturalem AB verſus urgebitur, quem ſingula ejus puncta vel ſimul, vel diverſis temporis momentis, attingent: continuo igitur chorda aliam atque aliam figuram induet, ſingulaque ejus puncta motu vibratorio ciebuntur, donec a reſiſtentia omnis agitatio compeſcatur. Ad hunc autem motum, utcunque fuerit comparatus, perfecte cognoſcendum ſufficiet, ad quodvis tempus ſtatum chordæ, ſeu ejus figuram, aſſignaſſe. Dum enim hinc per ſucceſſionem inſtantaneam mutatio figuræ definitur; inde ſimul celeritatem cujusque chordæ puncti determinare licet, ſicque totus motus innoteſcet: hancque ob rem in iſta inveſtigatione non opus erit ad celeritates ſingulorum chordæ punctorum reſpicere, quo pacto ſolutio non mediocriter ſublevabitur.

VII. Quia longitudinem chordæ, dum ſucceſſive omnes has varias figuras induit, non immutari aſſumimus, ita ut ſit $ALlB = AB$, erit etiam ductis quibusvis applicatis PL, pl ad axem AB normalibus, arcus AL, Al æquales abſciſſis reſpondentibus AP, Ap: ac proinde applicatæ PL, pl erunt quaſi infinite parvæ reſpectu abſciſſarum. Hinc, ſi vocentur abſciſſa $AP = x$, applicata PL erit infinite parva præ x, & ipſe arcus AL erit $= x$: prætereaque erit $Pp = Ll = dx$. Ex quo intelligitur, dum chorda ſucceſſive alias atque alias figuras recipit, ſingula ejus puncta L perpetuo ſecundum directionem applicatarum LP moveri, ita ut quævis applicata LP viam repræſentet, in qua chordæ punctum L ſtatum naturalem AB verſus accedat: tum vero ob motum conceptum ſecundum eandem directionem ad AB normalem in plagam contrariam excurret.

VIII. His notatis, ponamus, elapſo tempore t chordam in ſitum $AMmB$ perveniſſe, ex ſitu primitivo $ALlB$, ita ut punctum L in M pertigerit. Poſita igitur abſciſſa quavis $AP = x$, quæ eadem ſimul longitudinem arcus AM exhibeat, ſit applicata in hac curva AMB reſpondens $PM = y$,

&, quia hæc curva AMB a tempore elapſo $= t$ pendet, erit y functio quædam ambarum variabilium x & t, ita ut, poſito $t = o$, valor ipſius y applicatam curvæ primitivæ ALB exhibeat. Perſpicuum vero eſt, ſi natura hujus functionis ipſarum x & t, qua applicata y exprimitur, fuerit cognita, ex ea ad quodvis tempus t ipſam figuram chordæ aſſignari poſſe, ex cujus mutabilitate porro totius chordæ motus facile concludetur.

IX. Cum itaque y ſit functio quædam ipſarum x & t, ejus differentiale hujusmodi habebit formam, ut ſit: $dy = p\,dx + q\,dt$, quæ formula variabilitatem ipſius y non ſolum per curvam AMB, ſed etiam ratione fluxus temporis, complectitur. Scilicet, ſi tempus t ſtatuatur conſtans, ſeu $dt = o$, æquatio $dy = p\,dx$ exprimet naturam curvæ AMB: at, ſi abſciſſa x ſumatur conſtans, ſeu $dx = o$, æquatio $dy = q\,dt$ definiet motum puncti L, quamdiu chordæ motus durat, eo quod ex ea ad quodvis tempus t ab initio elapſum locum M aſſignare licet, in quem punctum L pervenerit. Erunt autem p & q iterum functiones ipſarum x & t, quarum differentialia, poſita utraque x & t variabili, ſunto:

$$dp = r\,dx + s\,dt, \quad \& \quad dq = s\,dx + u\,dt.$$

Conſtat enim ex natura differentialium, elementum dt in dp & elementum dx in dq communem coefficientem habere oportere.

X. Cum jam motus chordæ ex viribus ſollicitantibus determinari debeat, ſit vis acceleratrix, qua nunc punctum chordæ M axem AB verſus acceleratur $= P$, atque omnes iſtæ vires, quibus ſingula chordæ elementa axem AB verſus urgentur, ſimul ſumtæ æquivalere debent vi, qua chorda actu tenditur, & quam poſuimus $AF = F$. Sive, ſi chordæ in ſingulis punctis M has vires P contrariæ ſecundum ML applicatas concipiamus, tum eæ cum vi chordam tendente $AF = F$ in æquilibrio conſiſtere debebunt, atque ex hac proprietate vera vis acceleratrix P, qua quodlibet chordæ elementum Mm actu ſollicitatur, determinari poterit.

XI. Cum maſſa, ſeu pondus, totius chordæ ſit $= M$, ac

per

per totam longitudinem $AB = a$ æquabiliter distribuatur, erit portionis AP, seu AM, pondus $= \frac{Mx}{a}$, ac proinde elementi $Mm = dx$ pondusculum $= \frac{Mdx}{a}$; quod cum a vi acceleratrice $= P$ secundum ML sollicitetur, erit vis motrix hujus elementi $= \frac{Mdx}{a}.P$, & summa omnium virium motricium per arcum AM erit $= \frac{M}{a}\int Pdx$. Jam, quia punctum A fixum ponitur, ei applicatam concipere licet in directione AG ad AB normali vim quandam $AG = G$, quæ tanta sit, ut punctum A in quiete conservetur. His positis, ex theoria æquilibrii virium filo perfecte flexili applicatarum colligetur sequens æquatio:

$$Fy - Gx + \frac{M}{a}\int dx \int Pdx = o,$$

uti Fy & Gx sunt momenta virium F & G respectu puncti M & $\frac{M}{a}\int dx \int Pdx$ est summa momentorum omnium virium elementarium respectu ejusdem puncti M.

XII. Consideretur jam curva AMB, quam chorda hoc momento format, cujus natura formulis ante traditis exprimetur, si tempus t constans statuatur, seu $dt = o$; eritque idcirco $dy = pdx$ & $dp = rdx$. Hinc æquatio ex statu æquilibrii inventa differentietur, & pro dy posito pdx per dx divisa dabit:

$$Fp - G + \frac{M}{a}\int Pdx = o.$$

Jam denuo differentietur, &, pro dp ponendo rdx, dividatur per dx, sicque prodibit: $Fr + \frac{M}{a}P = o$, unde resultat vis acceleratrix puncti M secundum directionem MP,

 nempe

nempe $P = -\frac{Far}{M}$. Quare, si curva AMB esset cognita, ex ejus natura vis acceleratrix singulorum elementorum posset determinari.

XIII. Contemplemur nunc solius puncti M motum, quo a vi acceleratrice P sollicitatum ad P accedit, & abscissa $AP = x$ invariabilis erit censenda. Cum igitur sit ob $dx = 0$, incrementum momentaneum applicatae PM, $dy = qdt$ & $dq = udt$, tempusculo dt punctum M accedet ad P per spatiolum $= -qdt$, cujus differentiale, posito elemento temporis dt constante, erit $= -dqdt = -udt^2 = -ddy$. At ex acceleratione a vi P orta per principia mechanica obtinetur haec aequatio: $P = -\frac{2ddy}{dt^2} = -2u$, si quidem elementum temporis dt exponatur, ut moris est, per elementum spatii ad celeritatem applicatum, celeritas vero ipsa per radicem quadratam ex altitudine celeritati debita repraesentetur. Cum itaque invenerimus cum $P = -\frac{Far}{M}$, tum etiam $P = -2u$, erit $2u = \frac{Far}{M}$, seu $u = \frac{Far}{2M}$.

XIV. His binis conditionibus, quas ad calculum revocavimus, tota quaestio proposita absolvitur; ideoque, si, elapso quovis tempore, t pro puncto chordae quocunque M ponatur abscissa $AP = x$, & applicata $PM = y$, haec per ejusmodi functionem ipsarum x & t exprimetur, ut, posito $dy = pdx + qdt$, indoles functionum p & q ex his formulis sit petenda:

$$dp = rdx + sdt, \;\&\; dq = sdx + \frac{Fa}{2M}rdt.$$

Quaestio ergo proposita mechanica ad hoc Problema analyticum reducitur, ut ipsarum x & t ejusmodi quaerantur functiones r & s, ut tam haec formula differentialis $rdx + sdt$, quam haec $sdx + \frac{Fa}{2M}rdt$ fiat integrabilis. Hujusmodi enim functionibus pro r & s inventis, assignari poterunt valores

lores $p = \int (r dx + s dt)$ & $q = \int (s dx + \frac{Fa}{2M} r dt)$, unde porro valor ipsius applicatæ $y = \int (p dx + q dt)$ elicietur.

XV. Hoc autem Problema analyticum, in se spectatum, maxime est indeterminatum; quo igitur ad casum quempiam oblatum accommodetur, sequentia sunt annotanda: Primo in integrationibus constantes ita sunt adstruendæ, ut, posito $x = o$, quicunque demum ipsi t valor tribuatur, semper fiat $y = o$. Deinde hoc idem usu venire debet casu $x = a$, quo iterum, quicquid sit t, semper prodeat $y = o$. Tertio, his observatis, ex infinitis functionibus r & s, quæ ante memoratis conditionibus satisfaciant, pro quovis casu proposito eæ sunt eligendæ, ut, posito $t = o$, valor applicatæ y resultans eam exhibeat curvam arbitrariam, quæ chordæ primo motus initio erat inducta. Quod cum fuerit præstitum, nulla amplius constans indeterminata in solutione remanebit, atque verus chordæ motus absolute exhiberi poterit.

XVI. Quo igitur figura chordæ initialis ad arbitrium constitui possit, solutio latissime patere debet. Quamobrem, dum ab his formulis investigationem incipere oportet:

$$dp = r dx + s dt, \quad \& \quad dq = s dx + \frac{Fa}{2M} r dt,$$

generatim omnes valores possibiles pro r & s indagari debent, qui has ambas formulas simul integrabiles reddant. Multiplicemus in hunc finem has formulas seorsim per constantes m & n, & producta addamus, ut sit:

$$m dp + n dq = dx \,(mr + ns) + dt \,(ms + \frac{Fa}{2M} nr),$$

hæcque formula denuo integrabilis esse debebit, quicunque valores constantes literis m & n tribuantur. Fiat igitur

$m : n = \frac{Fa}{2M} n : m$, seu $mm = \frac{Fa}{2M} nn$, ut sit $m = 1$, & $n = \pm \sqrt{\frac{2M}{Fa}}$, eritque:

 dp

$$dp \pm dq \sqrt{\frac{2M}{Fa}} = \left(dx \pm dt \sqrt{\frac{Fa}{2M}}\right) \left(r \pm s \sqrt{\frac{2M}{Fa}}\right).$$

XVI. Sit brevitatis gratia $\frac{Fa}{2M} = b$, & habebitur:

$$dp \pm dq \sqrt{\frac{1}{b}} = (dx \pm dt \sqrt{b}) \left(r \pm s \sqrt{\frac{1}{b}}\right), \text{ ſeu}$$

$$dp \sqrt{b} \pm dq = (dx \pm dt \sqrt{b}) (r\sqrt{b} \pm s), \text{ vel etiam}$$

$$dq \pm dp\sqrt{b} = (dx \pm dt\sqrt{b}) (s \pm r\sqrt{b}).$$

Cum igitur hæc formula $(dx \pm dt\sqrt{b})$ $(s \pm r\sqrt{b})$ integrabilis eſſe debeat; neceſſe eſt, ut ſit $s \pm r\sqrt{b}$ functio ipſius $x \pm t\sqrt{b}$. Ponamus, ut utriusque ſigni rationem habeamus:

$$\begin{matrix} x + t\sqrt{b} = v \\ x - t\sqrt{b} = u \end{matrix} \quad \text{erit} \quad \begin{matrix} x = \frac{v+u}{2} \\ t\sqrt{b} = \frac{v-u}{2}, \end{matrix}$$

& habebimus has æquationes:

$dq + dp\sqrt{b} = dv\,(s + r\sqrt{b})$, & $dq - dp\sqrt{b} = du\,(s - r\sqrt{b})$, in quibus eſſe oportet $s + r\sqrt{b}$ functionem ipſius v, & $s - r\sqrt{b}$ functionem ipſius u, quia alias integratio non ſuccederet.

XVIII. Integratione ergo inſtituta utraque, fiet $q + p\sqrt{b} =$ functioni cuipiam ipſius v, & $q - p\sqrt{b} =$ functioni cuipiam ipſius u. Sit igitur, ut ſolutio latiſſime pateat:

V functio quæcunque ipſius $v = x + t\sqrt{b}$
U functio quæcunque ipſius $u = x - t\sqrt{b}$
& conditionibus memoratis ſatisfiet ponendo:

$$\begin{matrix} q + p\sqrt{b} = V \\ q - p\sqrt{b} = U \end{matrix} \quad \text{unde fit} \quad \begin{matrix} q = \frac{V+U}{2} \\ p = \frac{V-U}{2\sqrt{b}} \end{matrix}$$

Cum igitur ſit $dy = pdx + qdt$, erit ſubſtitutis pro p, q, dx & dt valoribus:

$$dy = \frac{(dv + du)(V - U)}{4\sqrt{b}} + \frac{(dv - du)(V + U)}{4\sqrt{b}}$$

quæ

quæ poſt evolutionem præbet:

$$dy = \frac{Vdv - Udu}{2\sqrt{b}} \quad \& \quad y = \frac{1}{2\sqrt{b}} \left(\int Vdv - \int Udu\right).$$

XIX. Erit autem $\int Vdv$ functio ipſius $v = x + t\sqrt{b}$, & $\int Udu$ functio ipſius $u = x - t\sqrt{b}$, exiſtente $b = \frac{Fa}{2M}$. Unde, ſi characteres f & ϕ adhibeantur ad functiones quaſcunque quantitatum, quibus præfiguntur, indicandas, ſequentem habebimus expreſſionem generalem pro applicata y, qua ejus quantitas ad quodvis tempus ab initio elapſum t, & pro qualibet abſciſſa x, exhibetur:

$$y = f : (x + t\sqrt{b}) + \phi : (x - t\sqrt{b}).$$

Erunt enim, ut regrediendo periculum faciamus, in formula $dy = pdx + qdt$ valores p & q ſequentes:

$$p = f' : (x + t\sqrt{b}) + \phi' : (x - t\sqrt{b})$$
$$q = \sqrt{b}\,(f' : (x + t\sqrt{b}) - \phi' : (x - t\sqrt{b}))$$

& pro formulis $dp = rdx + sdt$ & $dq = sdx + brdt$ erit, ut natura rei requirit:

$$r = f'' : (x + t\sqrt{b}) + \phi'' : (x - t\sqrt{b})$$
$$s = \sqrt{b}\,(f'' : (x + t\sqrt{b}) - \phi'' : (x - t\sqrt{b}))$$

ſiquidem differentiale functionis $f : z$ per $dzf' : z$ & differentiale functionis $f' : z$ per $dzf'' : z$ denotemus.

XX. Hactenus quidem characteres f & ϕ in æquatione:

$$y = f : (x + t\sqrt{b}) + \phi : (x - t\sqrt{b})$$

functiones quaſcunque ratione compoſitionis diverſas ſignificant, at earum relatio per reliquas conditiones magis determinatur. Cum enim, poſito $x = o$, perpetuo eſſe debeat $y = o$, erit $f : + t\sqrt{b} + \phi : - t\sqrt{b} = o$, ideoque $\phi : - t\sqrt{b} = - f : t\sqrt{b}$. Tum vero, quia, poſito $x = a$, valor ipſius y pariter evaneſcere debet, erit quoque $f : (a + t\sqrt{b}) + \phi : (a - t\sqrt{b}) = o$, ſicque natura functionum f & ϕ ita definiri debet, ut ſatisfiat his conditionibus:

$$\phi : - t\sqrt{b} = - f : t\sqrt{b}$$
$$\phi : (a - t\sqrt{b}) = - f : (a + t\sqrt{b}).$$

XXI.

TAB. V Fig. 2.

XXI. Cum in genere $f: z$ repræsentari possit per applicatam curvæ cujusdam, cujus abscissa est z, sit AMB curva, cujus applicatæ PM exhibeant functiones abscissarum AP, quæ charactere f: designantur, ut sit $PM = f: AP$. Quodsi jam sumatur $AP = t\sqrt{b}$, erit $PM = f: t\sqrt{b}$: cui cum negative æqualis esse debeat $\phi: -t\sqrt{b}$, capiatur $Ap = AP$, ut sit $Ap = -t\sqrt{b}$, &, posita curva Amb infra axem simili curvæ AMB, erit $pm = f: t\sqrt{b} = \phi: -t\sqrt{b}$. Ergo curva Amb similis curvæ AMB exponet naturam alterius functionis ϕ. Tum curva AMB simili modo ultra B existente $AB = a$ continuetur infra axem, ut portio BNA similis sit & æqualis curvæ BnA, &, sumto $BQ = Bq = t\sqrt{b}$, erit $AQ = a + t\sqrt{b}$, & $QN = -f: (a + t\sqrt{b}) = \phi: (a - t\sqrt{b})$, pariterque ob $Aq = a - t\sqrt{b}$ erit $qn = f: (a - t\sqrt{b})$; unde patet curvam istius formæ AMB, quæ utrinque per partes, sibi similes & æquales, Amb, BNa alternatim sursum & deorsum sitas, in infinitum continuetur, aptam esse ad naturam utriusque functionis f & ϕ repræsentandam.

XXII. Descripta ergo hujusmodi curva anguiformi, sive regulari, æquatione quapiam contenta, sive irregulari, vel mechanica, ejus quælibet applicata PM præbebit eas functiones, quibus ad Problema solvendum opus habemus, scilicet, si abscissa quævis ponatur $AP = z$, erit applicata $PM = f: z$. Hinc igitur, si abscissæ z tribuantur valores $x + t\sqrt{b}$ & $x - t\sqrt{b}$, erit $y = f: (x + t\sqrt{b}) + f: (x - t\sqrt{b})$, unde ad quodvis tempus in chorda vibrante pro qualibet abscissa conveniens applicata y assignari poterit. Ponamus autem $t = o$, ut curvam initialem chordæ obtineamus, eritque, sumta $AP = x$, applicata in chorda vibrante $y = f: x + f: x = 2PM$; vel quia superiorum functionum semisses capere licet, ut sit:

$$y = \tfrac{1}{2} f: (x + t\sqrt{b}) + \tfrac{1}{2} f: (x - t\sqrt{b}).$$

Ipsa curva AMB exhibebit figuram chordæ, ad quam initio motus ponitur diducta.

XXIII. Vicissim igitur, si detur curva, seu figura, ad quam chorda initio est diducta, inde ad quodvis tempus t ab initio elapsum figura chordæ determinari poterit. Descripta enim

super

ſuper axe $AB = a$, qui longitudini chordæ ſit æqualis, figura chordæ initiali AMB, ea utrinque ſitu inverſo repetatur, ut ſit $Amb = AMB$ & $BNa = BnA$, eademque lege repetitio hujus curvæ utrinque in infinitum continuata concipiatur. Tum, ſi hæc curva adhibeatur ad functiones inventas exprimendas, poſt tempus elapſum $= t$ abſciſſæ x in chorda vibrante reſpondebit applicata:

$$y = \tfrac{1}{2} f: (x + t\sqrt{b}) + \tfrac{1}{2} f: (x - t\sqrt{b}),$$

unde facilis conſtructio curvæ, quam chorda quovis tempore induit, colligi poteſt.

XXIV. Ne autem hæc formula quantitates heterogeneas involvere videatur, notandum eſt, $t\sqrt{b}$ per lineam rectam repræſentari, ideoque ipſi x eſſe homogeneum. Sit enim z altitudo, ex qua grave tempore t delabitur, atque, ſi temporis expreſſio modo ſupra indicato tractetur, erit $t = 2\sqrt{z}$: ideoque loco t ſcribere licet $2\sqrt{z}$, & ex altitudine z viciſſim tempus t ab initio motus elapſum cognoſcetur. Erit ergo $t\sqrt{b} = 2\sqrt{bz} = 2\sqrt{\frac{Faz}{2M}} = \sqrt{\frac{2Faz}{M}}$; ideoque per lineam rectam exprimetur. Ponamus autem brevitatis cauſa $\sqrt{\frac{2Faz}{M}} = v$, ita ut valor ipſius v ad quodvis tempus aſſignari poſſit; eritque, elapſo tempore, quo grave per altitudinem $= z$ delabitur:

$$y = \tfrac{1}{2} f: (x + v) + \tfrac{1}{2} f: (x - v).$$

XXV. Si igitur chordæ longitudinis $AB = a$ initio figura AMB fuerit inducta, indeque per ejus repetitionem linea curva anguinea $nb\, AMBaN$ formata; figura, quam chorda, elapſo tempore t, quo grave per altitudinem $= z$ decidit, eſt habitura, ita definietur. Ex hac altitudine z cognita quæratur valor $v = \sqrt{\frac{2Faz}{M}}$, &, propoſita abſciſſa quavis $AP = x$, capiatur utrinque $PQ = Pq = v$, ductiſque ad puncta Q & q applicatis QN & qn, erit ob $QN = f: (x + v)$ & $qn = f: (x - v)$, applicata chordæ abſciſſæ $AP = x$ reſpondens $y = \tfrac{1}{2} QN + \tfrac{1}{2} qn$, ſeu capiatur $Pm = \frac{QN + qn}{2}$, eritque m lo- TAB. V Fig. 3.

eus puncti M, &c, si hæc constructio pro singulis axis AB punctis instituatur, puncta m dabunt figuram chordæ præsentem AmB. Hocque modo ad quodvis tempus figura chordæ, quam inter vibrandum induit, facile describetur.

TAB. V Fig. 3.

XXVI. Quæramus figuram chordæ, postquam tantum elapsum est tempus, ut sit $v = a$, seu $z = \frac{Ma}{2F}$, eritque

$$y = \tfrac{1}{2} f : (x + a) + \tfrac{1}{2} f : (x - a).$$

Erit autem ex natura curvæ descriptæ $f : (x - a) = - f : (a - x)$ & $f : (a + x) = - f : (a - x)$ unde fiet

$$y = - f : (a - x).$$

Unde perspicitur, hoc tempore chordam totam infra axem fore inflexam, figuramque habituram esse $AM'B$, æqualem figuræ datæ AMB, sed situ inverso positam, ita ut, sumta abscissa $BP' = AP$, applicata futura sit $P'M' = PM$. Hincque vicissim, si denuo æquale tempus t, unde fiat $v = a$, præterlabatur, tota chorda in situm ipsi initio inductum AMB revertetur; quod etiam inde palam est, quod, elapso ab initio tempore, unde fiat $v = 2a$, proveniat:

$$y = \tfrac{1}{2} f : (x + 2a) + \tfrac{1}{2} f : (x - 2a).$$

At, sumto $PQ = Pq = 2a$, ex natura curvæ erit $Q'N' = PM = q'n'$, ideoque $y = PM$, uti initio motus.

XXVII. Quæcunque ergo chordæ initio tribuatur figura, ad eandem chorda singulis vibrationibus iterum perveniet, nisi quatenus ejus excursiones a resistentia diminuuntur; ex quo perspicuum est, supra memoratam opinionem, qua vibrationes chordæ, utcunque initio regulares fuerint, mox sese ad uniformitatem ita componere putabantur, ut figura in trochoidem elongatam abeat, veritati minime esse consentaneam. Interim tamen patet, quæcunque chordæ vibrantis fuerit figura, vibrationes nihilo minus satis fore regulares; cum enim, posito $v = 2a$, chorda ad pristinum statum revertatur, interea duas vibrationes absolvisse est censenda; ideoque ex valore $v = a$ tempus unius vibrationis definietur, quod æquale erit tempori, quo grave per altitudinem $\frac{Ma}{2F}$ delabitur, seu, si longitudo

chordæ

chordæ $AB = a$ in particulis millesimis pedis Rhenani exprimatur, tempus unius vibrationis in minutis secundis expressum erit $= \frac{1}{125} \sqrt{\frac{Ma}{2F}}$, seu chorda singulis minutis secundis tot peraget vibrationes, quot hæc expressio $125 \sqrt{\frac{2F}{Ma}}$ continebit unitates, perinde ac si chorda secundum legem uniformitatis, a *Tayloro* descriptam, vibrationes suas absolveret.

XXVIII. Uti figura *AMB*, chordæ initio inducta, præbet ejus primam excursionem maximam; ita, una vibratione absoluta, chorda reperietur in altera excursione maxima *AM'B*, quæ primæ inversæ æqualis est ostensa. Nunc igitur videamus, utrum tempore inter has vibrationes medio chorda perfecte in directum extendatur, ut situm naturalem accipiat, an minus, quoniam ex tempore unius vibrationis oritur $v = a$; ponamus pro momento medio $v = \frac{1}{2} a$, eritque ex forma generali;

$$y = \tfrac{1}{2} f: (x + \tfrac{1}{2} a) + \tfrac{1}{2} f: (x - \tfrac{1}{2} a),$$

cujus valor evanescet, si fuerit $f: (\frac{1}{2} a - x) = f: (\frac{1}{2} a + x)$, hoc est, si figura *ADB*, chordæ initio tributa, ita fuerit comparata, ut abscissis $\frac{1}{2} a + x$ & $\frac{1}{2} a - x$ æquales applicatæ respondeant: quod evenit, si in longitudinis *AB* puncto medio *C* erecta applicata *CD* fuerit curvæ *ADB* diameter, & pars *DB* similis & æqualis parti *DA*. Quoties ergo curva, chordæ initio inducta, hanc habuerit proprietatem, toties chorda, in cujusvis vibrationis medio in directum extendetur, quod cum innumerabilibus modis evenire queat, manifestum est, ne hanc quidem conditionem requirere, ut chorda inter vibrandum sese perpetuo ad figuram trochoidis elongatæ componat. TAB. V Fig. 1.

XXIX. Quanquam autem, rem generatim spectando, tempora vibrationum non a figura, quam chorda inter vibrandum induit, pendent, sed per solas quantitates *a*, *M*, & *F*, determinantur, quarum prima *a* longitudinem chordæ, *M* pondus chordæ, & *F* pondus vi tendenti æquale, denotat; tamen singulares dantur casus, quibus vibrationum tempora vel ad semissem, vel trientem, vel quadrantem, vel etiam quamvis longitudi- Fig. 2.

tudinis totius partem aliquotam contrahi possunt. Si enim tota chordæ longitudo fuerit $Aa = a$, eaque initio ita incurvetur, ut duas obtineat partes AMB, & Ba, sibi mutuo perfecte similes & æquales, tum perinde vibrationes peraget, ac si longitudinis tantum esset dimidiæ AB, eæque proinde erunt duplo celeriores. Simili modo, si figura chordæ initialis tres habuerit partes similes & æquales $bABa$, uti in Figura repræsentantur, tum perinde vibrationes peraget, ac si ejus longitudo esset triplo minor, & quælibet vibratio triplo brevior evadet. Ex quo intelligitur, quomodo vibrationes quoque quadruplo, vel quintuplo, &c. breviores fieri possint.

XXX. Expedita solutione generali, nonnullos casus evolvamus, quibus curva anguiformis *Fig. 3* lege continuitatis ita est connexa, ut ejus natura æquatione comprehendi possit. Ac primo quidem statim constat, has curvas, quoniam ab axe in infinitis punctis secantur, fore transcendentes. Positis longitudine chordæ $AB = a$ abscissa quavis $AP = u$, sit $1 : \pi$ ut diameter circuli ad peripheriam, & manifestum est, æquationem sequentem, per sinus expressam, ejusmodi præbere curvam, qualis requiritur:

$$PM = \alpha \,\text{fin.}\, \frac{\pi u}{a} + \beta \,\text{fin.}\, \frac{2\pi u}{a} + \gamma \,\text{fin.}\, \frac{3\pi u}{a} + \delta \,\text{fin.}\, \frac{4\pi u}{a} + \&c.$$

Si enim loco u ponatur vel a, vel $2a$, vel $3a$, vel $4a$, &c. applicata PM evanescit, &, posita u negativa, ipsa applicata in sui negativam abit. Quodsi ergo curva AMB fuerit figura chordæ primitiva, elapso tempore t, quo grave per altitudinem $= z$ decidit posito $v = \sqrt{\frac{2Faz}{M}}$, abscissæ x in figura chordæ respondebit applicata y, ut sit:

$$y = + \tfrac{1}{2} \alpha \,\text{fin.}\, \frac{\pi}{a}(x+v) + \tfrac{1}{2} \beta \,\text{fin.}\, \frac{2\pi}{a}(x+v) + \tfrac{1}{2} \gamma \,\text{fin.}\, \frac{3\pi}{a}(x+v) \;\&c.$$

$$+ \tfrac{1}{2} \alpha \,\text{fin.}\, \frac{\pi}{a}(x-v) + \tfrac{1}{2} \beta \,\text{fin.}\, \frac{2\pi}{a}(x-v) + \tfrac{1}{2} \gamma \,\text{fin.}\, \frac{3\pi}{a}(x-v) \;\&c.$$

XXXI. Cum autem sit $\text{fin}(a+b) + \text{fin.}(a-b) = 2\,\text{fin.}\, a \,\text{cof.}\, b$ hæc æquatio transformabitur in istam formam:

$y =$

$$y = \alpha \, fin. \frac{\pi x}{a} . \, cof. \frac{\pi v}{a} + \beta \, fin. \frac{2\pi x}{a} \, cof. \frac{2\pi v}{a} + \gamma \, fin. \frac{3\pi x}{a} \, cof. \frac{3\pi v}{a} \, \&c.$$

& figura chordæ primitiva hac exprimetur æquatione:

$$y = \alpha \, fin. \frac{\pi x}{a} + \beta \, fin. \frac{2\pi x}{a} + \gamma \, fin. \frac{3\pi x}{a} + \&c.$$

quæ eadem redit, quoties v fit vel $2a$, vel $4a$, vel $6a$, &c. Sin autem fit v vel a, vel $3a$, vel $5a$, &c. figura chordæ erit:

$$y = -\alpha \, fin. \frac{\pi x}{a} + \beta \, fin. \frac{2\pi x}{a} - \gamma \, fin. \frac{3\pi x}{a} + \&c.$$

Ubi notandum est, si fit $b = o$, $\gamma = o$, $\delta = o$, &c. casum prodire, qui vulgo solus in vibratione chordarum locum habere putatur, scilicet $y = \alpha \, fin. \frac{\pi x}{a} \, cof. \frac{\pi v}{a}$, quo curvatura chordæ perpetuo est linea sinuum, seu trochois, in infinitum elongata. Sin autem vel solus terminus β, vel γ, vel δ, &c. adsit, habentur casus, quibus tempus vibrationis vel duplo, vel triplo, vel quadruplo, &c. minus redditur.

ALEXII SYMMACHI MAZOCHII, NEAPOlitanæ Ecclesiæ Canonici, & Regii S. Scripturæ Interpretis, in vetus marmoreum sanctæ Neapolitanæ Ecclesiæ Calendarium Commentarius.

Neapoli, ex officina Novelli de Bonis, Typographi Archiepiscopalis, 1744, 4.

Alph. 1 plag. 17, cum Tab. æn. 1.

Ecclesiæ Pontificiæ Purpurato, & primario Neapolitanorum Antistiti, *Josepho Spinello*, luculentum hoc opus dedicatum, ejusdem in fronte gerit insignia. Argumentum figura æri incisa exhibet. Nimirum inter antiqua civitatis Neapolitanæ templa proximum a principe locum tenet S. *Joannis* Baptistæ, vulgo S. *Joannis Majoris*, a *Vincentio* antistite fundatum olim Seculo

 VI