1749

Mémoire sur la force des rames

Leonhard Euler

MEMOIEE
SUR LA FORCE DES RAMES
PAR MR. EULER.

I.

Lorsqu'on considere l'action des rames, on est d'abord porté à croire qu'elle doit suivre les loix du levier: & c'est de ce principe qu' Aristote a déjà voulu déterminer la force des rames, dont les vaisseaux sont mis en mouvement. Or l'experience a bientot fait connoitre, que ce Philosophe s'est trompé dans cette recherche, & Mr. Bouguer dans son excellent Traité sur le Navire, qu'il vient de publier, n'est pas peu surpris, que depuis le tems d'Aristote personne ne se soit appliqué avec plus de succés à developper cette question; quoi que la Mecanique paroisse portée à present à un si haut degré de perfection, qu'il semble qu'on ne dût plus être embarrassé sur de pareilles questions. Mr. Bouguer tache donc de suppléer à ce defaut, en traitant cette matiere sur la force des Rames avec beaucoup de soin; mais quoiqu'il ait evité heureusement les fautes d'Aristote, & de ceux qui l'ont suivi, il s'en faut beaucoup, qu'il ait rëussi tout à fait: il y a quelques petites circonstances auxquelles ce grand Geometre ne paroit pas avoir asses réflechi, & par lesquelles l'action des Rames se trouve alterée fort considerablement. Mr. Bouguer trouve par sa Theorie que, pour que les Rames produisent le plus

grand

grand effet, la partie de chaque rame qui eſt dans le vaiſſeau, devoit etre plus longue que celle qui eſt dehors: cependant on ſait, que dans la pratique on obſerve une regle tout à fait oppoſée, & il n'y a aucun doute, que l'experience cultivée depuis ſi longtems n'ait donné à connoitre à peu prés la plus avantageuſe proportion, qu'il faut mettre entre les parties des rames. Cette ſeule circonſtance eſt ſuffiſante à mon avis pour nous convaincre que la Theorie de Mr. Bouguer ſur les rames n'eſt pas encore achevée, & j'eſpere de mettre cette matiere tellement dans tout ſon jour, qu'il ne reſtera plus aucun doute, ni ſur la verité de la Theorie même, ni ſur ſon accord avec l'experience.

II. Il eſt vrai qu'il y a un grand rapport entre le levier & la rame: dans le levier il y a trois points à remarquer; le point d'appuy, celui où l'on applique la force, & celui auquel eſt attaché le fardeau, qui doit etre mis en mouvement. Or la rame nous preſente pareillement trois points à conſiderer: le premier, où le rameur applique ſa force: le ſecond eſt le point, où l'on appuye la rame ſur le bord du vaiſſeau, & le troiſieme ſe trouve dans la pale, qui frappe l'eau. Mais on remarquera auſſi d'abord une grande difference, & on ne ſaura déterminer, lequel de ces trois points dans la rame eſt celui d'appui, ou de l'attache du fardeau. D'un coté, le point où la rame eſt appuyée ſur le bord du vaiſſeau, paroit répondre au point d'appuy du levier, mais alors ce ſeroit l'eau pouſſée par la pale, qui tiendroit lieu du fardeau, & non pas le vaiſſeau même: d'un autre coté, ſi l'on regarde la pale comme le point d'appuy, en quel cas la rame deviendroit un levier homodrome, on rencontrera d'autres difficultés, qui détruiſent la reſſemblance du levier. Car dans ce cas le point d'appuy ne ſera point fixe, & comme la force du rameur agit dans le vaiſſeau même, qui doit étre mis en mouvement, il en naît une circonſtance ſinguliere, qui ne ſe rencontre pas dans les leviers ordinaires. Ces conſiderations nous laiſſent en doute ſur la force, par laquelle le vaiſſeau eſt immediatement pouſſé; ſi c'eſt la force, que le rameur emploie ſur la rame, ou celle dont le bord du vaiſſeau eſt pouſſé, ou enfin celle que la pale exerce ſur l'eau. Dans cette incertitude on doit tout à fait abandonner la consideration du levier, & se tenir uniquement aux premieres loix de la Mecanique, pour en déterminer immediatement le mouvement du vaisseau causé par l'action des rames.

III. Dans cette recherche il y a quantité de choses, auxquelles il faut avoir égard, si l'on veut déterminer le mouvement du vaisseau, qui est causé par l'action des rames. Premierement, on doit considerer la masse du vaisseau, la vitesse qu'il a actuellement, & la resistance qu'il rencontre en sillant par l'eau avec cette vitesse. En second lieu, on doit regarder le poids & la figure de chaque rame, la quantité de la partie qui est dans le vaisseau, & de l'autre qui se trouve dehors, avec la surface de la pale dont l'eau est frappée. En troisieme lieu, il faut introduire dans le calcul la force que les rameurs appliquent aux rames, pour en déterminer la vitesse avec laquelle les pales fendent l'eau, & la resistance qu'elles y rencontrent: & comme dans chaque palade il n'y a qu'environ le tiers du tems, que la rame agit sur l'eau, le reste du tems étant emploié à lever la rame & à la retirer, il est à remarquer que ce n'est que la force, que le rameur exerce, pendant que la pale est sous l'eau, qui est emploiée à pousser le vaisseau. Le nombre de ces considerations, dont dépend cette recherche, etant si grand, & celles qui sont connuës etant melées avec les inconnues, on ne sera plus surpris pourquoi cette matiere a été si négligée jusqu' ici, & combien il est difficile de n'y tomber point dans l'erreur.

IV. De tous ces differens sujets, qu'il faut soigneusement distinguer les uns des autres, je commencerai par le vaisseau même; dont voicy les dénominations:

1. Soit la masse du Vaisseau, ou son Poids $= M$, qui etant egal au poids d'une masse d'eau, dont le volume est egal à la partie submergée du vaisseau, soit cette partie ou le volume d'eau egal en pesanteur au poids du vaisseau tout entier $=$ g^3 de sorte qu'on puisse se servir, ou de la lettre M, ou de l'expression g^3 pour marquer la masse du vaisseau.

2. Pour

2. Pour determiner la resistance du vaisseau, qu'il essuye en fendant l'eau directement, ou suivant la direction de sa quille, on pourra concevoir une surface plane, qui en passant par l'eau directement, avec une egale vitesse, souffre une resistance egale: soit donc l'aire de cette surface — — $=$ ff, dont la détermination depend de la figure du vaisseau, qui sera d'autant plus petite, plus le vaisseau aura de façon, ou qu'il sera allongé vers la proue. Pour chaque vaisseau, je suppose que ces quantités g^3 & ff soyent deja connuës par l'experience.

3. Pour désigner la vitesse du vaisseau je me servirai de la hauteur, dont un corps tombant acquiert la même vitesse. On sait que cette hauteur est proportionnelle au quarré de la vitesse; & connoissant cette hauteur on est en etat de déterminer la vitesse même ou l'espace, que le vaisseau doit parcourir avec cette vitesse dans un tems donné, par exemple, dans une seconde. Soit cette hauteur generatrice de la vitesse du vaisseau $= v$: & il est reconnu, que si l'on exprime cette hauteur en milliemes parties du pied du Rhin, le vaisseau parçourra dans une seconde un chemin de $\frac{1}{4}\sqrt{v}$ pieds du Rhin: de sorte que sachant la hauteur v, on ne manquera pas de connoitre la vitesse absoluë.

4. La force, dont le vaisseau est poussé en avant selon la direction de sa quille, soit égale au poids $=$ P; & je me servirai de cette idée générale, jusqu'à ce que je serai en etat de tirer sa valeur de l'action des rames, car avant que d'entreprendre cette recherche principale, je me vois obligé de déterminer en general le mouvement, qu'une force quelconque doit imprimer au vaisseau.

V. Ces dénominations avancées, il est clair que, si le vaisseau ne rencontroit aucune resistance, son acceleration, pendant qu'il parcourt l'element d'espace $= ds$, seroit exprimée par cette formule $M\, dv = P\, ds$. Mais à cause de la resistance il faut retrancher de la force poussante P la force qui résulte de la resistence. Or la resistance du vaisseau etant égale à celle qu'une surface plane $= ff$ souffriroit, si elle étoit muë directement avec une vitesse egale par l'eau. Cette vitesse étant supposée duë à la hauteur v, on sait de la Theorie

Theorie Hydrodynamique, que cette force en question est egale au poids d'une colonne d'eau, dont la base est egale à la surface $= ff$ & la hauteur $= v$. c. à d. au poids d'un volume d'eau $= ff\,v$. Mais le poids d'un volume d'eau $= g^3$ étant $=$ M, on aura la resistance, égale à un poids $= \frac{ff\,v}{g^3}$. M; qui étant retranché de la force poussante $=$ P, le vaisseau sera poussé en avant avec la force $P - \frac{ff\,v}{g^3} M$, & l'acceleration du vaisseau, pendant qu'il parcourt l'element de l'espace $= ds$, sera renfermée dans cette formule

$$M\,dv = P\,ds - \frac{ff\,v}{g^3} M\,ds.$$

VI. Pour rendre cette formule plus commode, on pourra réduire le volume d'eau g^3, egal en pesanteur au poids du vaisseau, à une colonne d'eau, dont la base $= ff$ & la hauteur $= h$; de sorte que $ff\,h$ exprime le volume de la partie submergée du vaisseau: ou on n'aura qu'à changer la partie submergée dans la forme d'un prisme, dont la base soit la surface ff, qui sert de mesure de la resistance, & la longueur sera la valeur de la lettre h. Ayant donc $g^3 = ff\,h$, l'equation trouvée se changera en cette forme.

$$M\,h\,dv = P\,h\,ds - M\,v\,ds$$

d'où l'on tire: $ds = \frac{M\,h\,dv}{P\,h - M\,v}$

& prenant l'integrale: $s = h\,l\,\frac{P\,h}{P\,h - M\,v}$

Où s sera l'espace, que le vaisseau aura parcouru, depuis le commencement de son mouvement jusqu'à ce qu'il aura atteint la vitesse qui repond à la hauteur v, étant constamment poussé par la force $=$ P.

VII. Si nous passons aux nombres, nous déterminerons pour chaque point du chemin, que le vaisseau parcourt, sa vitesse veritable Car soit e le nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$; ou soit $e = 2,718281828459$

&

& on aura cette équation:

$$e^{s:b} = \frac{Ph}{Ph - Mv}$$

de laquelle on tire la valeur de v;

$$v = \frac{Ph}{M}\left(1 - e^{-s:h}\right)$$

Comme la valeur de b devient dabord fort petite par rapport au chemin s, que le vaiſſeau parcourt, le terme $e^{-s:h}$ evanouïra bientot depuis le commencement; de ſorte qu'on ne ſe trompe pas, ſi l'on ſuppoſe

$$v = \frac{Ph}{M}.$$

En effet on ſait par experience, que quelle que ſoit la force, dont le vaiſſeau eſt pouſſé, il en acquiert dans peu de tems un degré de viteſſe, dont il paroit depuis continuer ſon mouvement ſans aucune acceleration. Il ſuffit donc pour mon deſſein de connoitre cette viteſſe, & il importe fort peu, par quels degrés le mouvement eſt acceleré dans les premiers inſtans.

VIII. Il ſera donc fort aiſé de déterminer cette viteſſe, qu'un vaiſſeau pouſſé par une force quelconque doit acquerir. Car ayant poſé le poids du vaiſſeau $= M$, & la force dont il eſt pouſſé $= P$, on n'a qu'à conſiderer la partie ſubmergée du vaiſſeau, & la changer dans une colonne cylindrique égale en volume, qui etant muë avec la même viteſſe que le vaiſſeau ſelon ſa longueur, en frappant l'eau d'une de ſes baſes perpendiculairement, ſouffre la même viteſſe que le vaiſſeau. Cette réduction faite, que b marque la longueur de cette colonne, & la formule $\frac{P}{M}.\,b$ donnera la hauteur v, de laquelle un

 corps

corps tombant acquiert la viteſſe cherchée du vaiſſeau. Puisque $h = \frac{g^3}{ff}$, on aura $v = \frac{P}{M}.\ \frac{g^3}{ff}$, & parce que M à g^3 a un rapport conſtant, la hauteur v ou le quarré de la viteſſe du vaiſſeau ſera comme $\frac{P}{ff}$. Or ff marque la reſiſtance abſolue, ou celle que le vaiſſeau ſent etant porté d'un degré donné de viteſſe; & partant on aura cette regle: Que le quarré de la viteſſe eſt proportionnel à la force, dont le vaiſſeau eſt pouſſé, diviſée par la reſiſtance abſolue.

IX. Réciproquement, ſi la viteſſe du vaiſſeau eſt connuë, ou la hauteur v, on en connoitra la force, dont le vaiſſeau eſt pouſſé: car poſant cette force $=$ P, on aura $P = \frac{M v}{h}$. On reconnoitra aiſement, que cette même force ſera requiſe pour arreter le vaiſſeau dans une riviere, qui ſe meut avec la même viteſſe duë à la hauteur v: & par cette conſideration, quelle que ſoit la viteſſe du vaiſſeau ſur la mer, nous pourrons regarder le vaiſſeau, comme s'il etoit en repos, pourvuque nous transportions ſon mouvement dans l'eau ſelon une direction contraire, & alors la force requiſe pour arreter le vaiſſeau dans cet etat de repos, ſera $= \frac{M v}{h}$; pourvu que le mouvement ſoit uniforme. Mais ſi le mouvement du vaiſſeau eſt acceleré, deſorte que la hauteur v acquiere un accroiſſement $= d v$, pendant qu'il parcourt l'element d'eſpace $d s$; on pourra de meme, tant le mouvement du vaiſſeau que ſon acceleration, tranſporter dans l'eau; or alors la force requiſe pour arreter le vaiſſeau dans cet état de repos ſera $P = \frac{M v}{h} + \frac{M d v}{d s}$.

Fig. 1. X. Que AB repreſente donc la quille du vaiſſeau, A ſa proüe & B la pouppe: & ſon mouvement, qui ſoit ſelon la direction A α avec une viteſſe duë à la hauteur $= v$, ſoit transporté dans l'eau, qui ſe meuve avec la meme viteſſe dans la direction $b q s$, de ſorte que le vaiſſeau

vaisseau puisse etre consideré comme arreté en repos. Cela posé, je vais examiner l'effet d'une rame, pendant qu'elle est frappée dans l'eau, avec une force quelconque. Pour cet effet soit la rame représentée par la ligne $facbg$, dans laquelle il y a d'abord trois points à considerer.

1. Le point a auquel la force du rameur est appliquée; ou s'il y a plusieurs rameurs, qui agissent sur divers points, le point a en sera le milieu; de sorte que si l'on y conçoit appliquée une force égale à celles de tous les rameurs prises ensemble, elle produise le meme effet.

2. Le point b, que je nommerai le centre de la pale; car chaque point de la pale frappant l'eau, & en essuyant la force de la resistance, il y aura un point b, par lequel passe la moyenne direction de la resistance, & c'est ce que je nomme le centre de la pale, auquel sera rassemblée toute la force, que la pale soutient en frappant l'eau.

3. Le troisieme point, auquel il faut avoir égard, c'est le point d'appuy c; qui sera en repos de meme que le vaisseau, pendant que la rame est poussée d'un mouvement angulaire autour de ce point c.

Ayant determiné ces trois points principaux de la rame, nous y aurons deux parties à distinguer, celle qui est en deça du point c dans le vaisseau, & celle qui est dehors; je nommerai la longueur de chacune:

$$ac = a \quad \& \quad bc = b$$

& la surface de la pale $= cc$, qui essuye la resistance de l'eau, en la frappant.

XI. Pour la force, qui est employée à mouvoir la rame au point a, je la nommerai $= p$, dont la direction soit selon la quille du vaisseau, vers la proue A: c. à. d. la rame sera poussée au point a par la force $= p$ dans la direction aA parallele à la quille. Or comme les rameurs se trouvent dans le vaisseau, ils ne sauroient exercer aucune force, sans qu'ils en s'appuyant exerçassent une force égale le sur le vaisseau meme dans une direction contraire. Par consequent le vaisseau par la force des rameurs sera immediatement poussé en arriere dans la direction AB par une force $= p$. De plus, comme les rameurs ne peuvent agir, sans qu'ils mettent leurs propres corps en mouvement, & qu'ils en vainquent l'inertie, pour y avoir égard, soit l'inertie des rameurs $= q$, qui ne doit pas étre estimée par la masse de leurs corps, puisqu'une bonne partie ne participe point du mouvement; on pourra prendre pour q la moitié ou une autre partie de leurs corps, qu'on jugera la plus conforme à l'experience: car par rapport à leur force p, & leur inertie q, on se doit contenter de les connoitre à peu prés, à quoi quelques observations seront suffisantes. Outre cela comme la masse de la rame doit etre mise en mouvement, soit son inertie ou son poids $= m$ & puisque ce mouvement est angulaire autour du point fixe c, il en faut regarder le *momentum* de l'inertie par rapport au point c, qu'on trouve en multipliant chaque particule de matiere de la rame par le quarré de sa distance au point c, & en rassemblant tous ces produits ensemble dans une somme. Soit donc ce moment d'inertie de chaque rame $= mkk$, puisqu'il sera le produit du poids par le quarré d'une ligne droite.

XII. La ligne $facbg$ represente ici la situation de la rame au premier moment, qu'elle est plongée dans l'eau; cette situation etant oblique à la quille AB, je tire à la quille la perpendiculaire ecb, & je nomme l'angle $fce = \alpha$. Quelque tems aprés dans cette palade, la rame soit réduite dans la situation $tpcqv$, où chacune des lettres t, p, c, q, v répond à chacune des lettres f, a, c, b, g dans la premiere situation: soit nommé l'angle $ect = \Phi$, & la vitesse de la pale à son centre q soit duë à la hauteur $= u$, dont la direction sera la droite qr perpendiculaire à la direction de la rame cq. Donc si l'eau etoit en repos, la pale frapperoit directement l'eau, & la force de l'eau sur la pale seroit égale au poids d'un cylindre d'eau, dont la base $= cc$, c à. d. à la surface de la pale, & la hauteur $= u$: ou cette force seroit égale au poids d'un volume d'eau $= ccu$, ou absolument au

poids

poids $= \frac{cc\sigma}{g^3}$ M: & la direction de cette force seroit la droite qy perpendiculaire à la surface de la pale.

XIII. Mais l'eau ayant deja un mouvement suivant la direction qs parallele à la quille, avec une vitesse $= \sqrt{v}$; elle échapera en partie à l'action de la rame. Donc pour avoir la direction & la vitesse, dont la rame frappe actuellement l'eau, on n'aura qu'à prendre les lignes qs & qy égales ou proportionnelles aux vitesses $\sqrt{\sigma}$ & $\sqrt{u}$, & aprés en avoir formé le parallelogramme $sqyz$, y tirer la diagonale qz, qui representera tout ensemble la direction & la vitesse, dont l'eau est frappée par la rame. C'est pourquoi la vitesse étant representée par la diagonale yz, & l'obliquité par l'angle vqz, la force de l'eau sur la pale sera égale au poids d'un volume d'eau $= cc.qz^2.$ sin vqz^2, ou à cause de $uz = qz$ sin vqz, à un volume d'eau $= cc.uz^2$. Mais puisque $sz = qy = \sqrt{u}$, $qs = \sqrt{v}$, & l'angle $sqr = \Phi$, nous aurons $su = \sqrt{v}.$ cos Φ, & partant $uz = \sqrt{u} -$ cos $\Phi.\sqrt{v}$. Donc la force d'eau sur la pale sera égale au poids d'une masse d'eau, dont le volume $= cc\,(\sqrt{u} - \cos\Phi.\sqrt{v})^2$. Par là il est clair, que la pale souffre la meme resistance, que si sa vitesse $\sqrt{u}$ dans la direct. qr étoit diminuée de la vitesse de l'eau $\sqrt{v}$ réduite à la meme direction qr, qui sera $= \cos\Phi.\sqrt{v}$: & on voit bien que pour que la rame produise quelque effet, la partie retranchée $\cos\Phi.\sqrt{v}$ doit etre moindre que $\sqrt{u}$.

XIV. Maintenant ayant supposé la force $= p$, dont le rameur tire la rame au point p, soit la direction de cette force perpendiculaire à la direction de la rame selon $p\pi$, & la vitesse du point p suivant $p\pi$ sera $= \frac{a}{b}\sqrt{u}$; & pendant que la rame avance de l'element de l'angle $d\Phi$ autour de c, le point q parcourra l'espace $= bd\Phi$ & le point p l'espace $ad\Phi$. Or l'inertie des rameurs q ayant la meme vitesse, que le point p, qui est duë à la hauteur $\frac{aau}{bb}$, son acceleration, pendant que l'angle φ croît de ſon element $d\varphi$, ſera $= \frac{aadu}{bb} : ad\Phi = \frac{adu}{bbd\Phi}$; à la production de laquelle eſt requise une force $= \frac{aqdu}{bbd\Phi}$: Ce ne ſera pas donc toute la force des rameurs p qui eſt employée à l'acceleration de la rame, mais il en faut retrancher la partie $\frac{aqdu}{bbd\Phi}$, qui eſt employée à l'acceleration des corps des rameurs ou de leur inertie. Et partant la force employée à l'acceleration de la rame eſt $= p - \frac{aqdu}{bbd\Phi}$, dont le moment par rapport au point d'appuy c eſt $= ap - \frac{aaqdu}{bbd\Phi}$.

XV. La force de la reſiſtance de l'eau ſur la pale etant trouvée égale à un volume d'eau $= cc\,(\sqrt{u} - \operatorname{coſ}\varphi.\ \sqrt{v})^2$, elle ſera égale au poids $= \frac{M}{g^3}\,cc\,(\sqrt{u} - \operatorname{coſ}\varphi.\ \sqrt{v})^2$, dont le moment par rapport au point d'appuy c ſera $\frac{Mbcc}{g^3}\,(\sqrt{u} - \operatorname{coſ}\varphi.\ \sqrt{v})^2$, qu'il faut retrancher du moment de la force: de ſorte que le mouvement angulaire de la rame ſera acceleré par le moment $ap - \frac{aaqdu}{bbd\Phi}$ $- \frac{Mbcc}{g^3}\,(\sqrt{u} - \operatorname{coſ}\Phi.\ \sqrt{v})^2$. Mais le momene d'inertie de la rame étant $= mkk$, & ſa viteſſe angulaire $= \frac{\sqrt{u}}{b}$, l'acceleration meme ſera $=$ $mkk.\,\frac{du}{bbd\Phi}$, & partant nous aurons cette equation:

$\frac{mkkdu}{bbd\Phi}$

$$\frac{mkkdu}{bbd\Phi} = ap - \frac{aaqdu}{bbd\Phi} - \frac{Mbcc}{g^3}(\sqrt{u} - \text{cof}\,\Phi.\,\sqrt{v})^2$$

de laquelle il faut déterminer la quantité u, pour connoitre la force, que la rame ſent en frappant l'eau. Alors la rame étant ſollicitée en p par la force $p\pi = p - \frac{aqdu}{bbd\Phi}$, & en q par la force $q\gamma$

$$= \frac{Mcc}{g^3}(\sqrt{u} - \text{cof}\,\Phi.\,\sqrt{v})^2 = \frac{ap}{b} - \frac{(aaq + mkk)\,du}{b^3\,d\Phi}$$

le point d'appuy c ſoutiendra la ſomme de ces forces $= p + \frac{ap}{b} - \frac{(aaq + abq + mkk)\,du}{b^3\,d\Phi}$, d'où réſulte ſuivant la direction cd parallele à la quille la force

$$cd = \frac{(a + b)}{b}\,p\ \text{cof}\,\Phi - \frac{(a\,(a+b)\,q + mkk)\,du\,\text{cof}\,\Phi}{b^3\,d\Phi}$$

Cette force agiſſant immediatement ſur le vaiſſeau, il en faut retrancher la force, dont le rameur en s'appuyant repouſſe le vaiſſeau, & qui etant réduite à la direction du vaiſſeau eſt $= p\ \text{cof}\,\Phi$: Par conſéquent la force, qui réſulte de l'action de la rame pour accelerer le mouvement du vaiſſeau, ſera $= \frac{ap}{b}\,\text{cof}\,\Phi - \frac{(a\,(a+b)\,q + mkk)\,du\,\text{cof}\,\Phi}{b^3\,d\Phi}$.

XVI. De là il eſt d'abord evident, que dès que le mouvement de la rame devient uniforme, ce qui arrive quand $du = o$, alors la force de la rame pour accelerer le vaiſſeau, ſera la plus grande $= \frac{ap}{b}\,\text{cof}\,\Phi$; mais tandisque l'acceleration de la rame dure, cette force ſera d'autant plus diminuée, plus la viteſſe de la rame ira en augmentant. Il faut donc tacher d'arranger la manœuvre des rames, enſorte que leur mouvement arrive au plutot qu'il ſera poſſible à un degré d'uniformité, ou que la pluspart de ſon acceleration, qui ſe fait dans l'eau, ſe faſſe au plus vîte. Pour cet effet on doit obſerver, que les rameurs, avant qu'ils plongent les rames dans l'eau, leur impriment

déjà

déjà à peu prés le meme mouvement, dont ils sont capables de les tirer par l'eau ; & la force deviendroit meme plus grande, si les rames venoient dès le premier instant frapper l'eau encore avec une plus grande vitesse ; ce qui s'executera aisement, pourvu que les rameurs commencent dejà, pendant que les rames sont encore levées dans l'air, à les tirer selon la meme direction, qu'on leur donne dans l'eau. Car puisqu'on ne rencontre alors que la resistance de l'air, on imprimera aux rames presque dans un instant ce degré requis de vitesse, ou bien un plus grand. Cette regle est d'autant plus necessaire à garder, lorsque le vaisseau va fort vîte. Car alors si la premiere vitesse, avec laquelle la rame entre dans l'eau, savoir $\sqrt{u}$ étoit plus petite que la vitesse du vaisseau ; le mouvement du vaisseau seroit effectivement arrêté, puisque l'eau agiroit sur la pale suivant la direction $y\,q$, & non pas suivant $r\,q$, comme il a été supposé dans le calcul.

XVII. Si donc la rame étoit d'abord plongée dans l'eau avec le degré de vitesse $\sqrt{u}$, que la force des rameurs est capable de conserver dans l'eau, de sorte que la rame puisse etre tirée par l'eau sans etre accelerée : par ce que je viens de trouver, la force, dont le vaisseau sera acceleré, seroit $= \frac{a\,p}{b}$ cos φ ; & de là on devroit conclure que plus la raison $\frac{a}{b}$ seroit grande, c. à. d. plus la partie de la rame, qui est hors du vaisseau, seroit courte, plus aussi la force, qui agit sur le vaisseau, devroit etre grande ; & c'est à quoi la theorie de Mr. Bouguer aboutit. Mais outre que nous voyons, qu'on est bien eloigné d'observer cette regle dans la pratique, il est aisé de se convaincre, qu'on ne gagneroit non seulement rien, mais qu'on perdroit trés considerablement, si l'on faisoit la partie exterieure des rames beaucoup plus courte, que l'interieure. Car alors la vitesse des bras des rameurs deviendroit beaucoup plus grande, que la vitesse avec laquelle les pales sont poussées par l'eau. Or cette vitesse doit etre considerablement plus grande que la vitesse du vaisseau : d'où l'on voit, que pourvû que le mouvement du vaisseau fut mediocre, les rameurs seroient obligés

obligés de mouvoir leurs bras avec une si grande vitesse, qu'ils ne sauroient le soutenir. Cette circonstance etant tout à fait contraire à ce que le calcul vient d'avancer, il s'ensuit evidemment, qu'il y a quelques considerations essentielles omises dans le fondement du calcul, auxquelles on doit nécessairement avoir égard, si l'on veut déterminer l'action des rames contormément à l'experience.

XVIII. Or je remarque d'abord qu'il y a une grande difference par rapport à la production du mouvement entre les masses, dont on considere l'inertie dans la Mecanique, & les corps humains: les premiers sont susceptibles, à moins qu'on fasse abstraction de la resistance, de tout degré de vitesse, pourvû que la force, dont ils sont sollicités, ait asses de tems d'y agir: & ce n'est que l'acceleration du mouvement, qui requiert une dépense des forces. Mais il n'en est pas de meme des corps humains; il faut non seulement de la force pour les mettre en mouvement, mais ausfi pour les y conserver. On sait qu'un homme, quoiqu'il applique toutes ses forces à courir, n'est pas capable de surmonter un certain degré de vitesse; & alors il lui sera imposfible de porter, ou de trainer aprés lui, le moindre fardeau. Il y a donc une grande difference entre la force, qu'un homme etant en repos peut exercer, & celle dont le meme homme est capable, pendant qu'il court, ou qu'il est obligé d'entretenir ses membres dans le mouvement. Par là on conviendra aisement, qu'un rameur, quand il est obligé de tirer la rame fort vite, n'y puisse appliquer la meme force, que s'il étoit encore en repos: & il y aura meme un degré de vitesse, que le rameur étant obligé de suivre, n'est plus capable d'employer la moindre force. Donc si p marque la force, dont le rameur etant encore en repos tire la rame, on se tromperoit fort, si l'on estimoit de la meme quantité la force, que le rameur, etant obligé de se mouvoir soi meme, peut employer à tirer la rame.

XIX. Pour corriger cette faute, qui a été commise dans la détermination précedente, il est nécessaire de savoir ce degré de vitesse, dont un homme est capable de mouvoir ses membres, quand il n'a rien du tout à tirer, qu'on pourra aisement éstimer par quelques obser-

observations. Soit θ la hauteur duë à cette vitesse, & il est clair, que si la vitesse du point p de la rame, auquel est appliquée la force du rameur, etoit égale à $\sqrt{\theta}$, le rameur n'y pourroit plus exercer la moindre force. Donc, puisque la vitesse du point p est representée par la hauteur $\frac{aau}{bb}$, s'il y avoit $\frac{aau}{bb} = \theta$, la force du rameur cesseroit entierement; & elle deviendroit meme negative si $\frac{aau}{bb} > \theta$, & dans ce cas le rameur arreteroit le mouvement de la rame, quand meme il n'y rencontreroit la moindre resistance. Or ayant posé $p =$ à la force, dont le rameur tire la rame etant encore en repos, il est evident qu'on doit diminuer cette force p d'autant plus, plus que le mouvement de la rame sera rapide, ensorte que s'il devient $\frac{aau}{bb} = \theta$, la force evanouïsse entierement. Quoiqu'il soit difficile, & peut-etre impossible, de déterminer précisement cette diminution, puisque cela demanderoit une connoissance parfaite de la force & de l'action des muscles: il me semble que je ne m'ecarterai sensiblement de la verité, quand je suppose que la force des rameurs, lorsque le point p de la rame a déjà une vitesse duë à la hauteur $\frac{aau}{bb}$, est $= p\left(1 - \frac{aau}{bb\theta}\right)$. Car cette expression nous marque la force $= p$, si la rame est encore en repos: & si le point p de la rame a déjà une vitesse $= \sqrt{\theta}$, ou si $\frac{aau}{bb} = \theta$, cette force evanouït.

XX. On m'objectera peut-étre, que j'aurois pû former cette formule des vitesses $\sqrt{u}$ & $\sqrt{\theta}$ memes, au lieu de leurs quarrés, & que peut-étre cette formule $p\left(1 - \frac{a\sqrt{u}}{b\sqrt{\theta}}\right)$ seroit plus convenable, comme etant plus simple. Mais je reponds que si cette formule étoit vraie, il s'ensuivroit, que si le mouvement se faisoit en sens contraire,

auquel

auquel cas au lieu de $\sqrt{u}$ on devroit ecrire $-\sqrt{u}$; la force agiſſante deviendroit plus grande, que ſi la viteſſe $\sqrt{u}$ étoit $= o$, ce qui ſeroit abſurde. Or ma formule $p\left(1 - \frac{aau}{bb\theta}\right)$ n'eſt pas ſujette à cet inconvenient, puisque la viteſſe du rameur $\frac{a\sqrt{u}}{b}$, ſoit qu'elle ſoit affirmative ou negative diminue également la force principale p. Ayant donc établi cette expreſſion $p\left(1 - \frac{aau}{bb\theta}\right)$ pour marquer la force, que les rameurs exercent ſur la rame, nous n'aurons pas beſoin d'avoir égard à la diminution, qui eſt cauſée par l'acceleration de la rame, puisqu'il eſt permis de ſuppoſer que le mouvement de la rame, pendant qu'elle fend l'eau, eſt uniforme, & qu'il ne s'y fait aucune acceleration. Car comme c'eſt la manœuvre la plus avantageuſe des rames, on doit apporter tout le ſoin, que les rameurs executent cette regle; & quand même la premiere viteſſe, avec laquelle ils plongent les rames dans l'eau, ſeroit plus grande, la force, dont le vaiſſeau eſt pouſſé, deviendroit un peu plus grande: & le vaiſſeau marcheroit plus vîte que le calcul marqueroit, ce qui ſeroit une faute à profit. Car comme il eſt impoſſible de déterminer exactement toutes les quantités, dont le mouvement du vaiſſeau dépend, il faut ſe contenter de le connoitre à peu prés, & il ſera toujours plus à propos de ſe tromper en defaut qu'en excés: vû qu'il ſera un avantage, lorsque le vaiſſeau marchera plus vite, qu'on n'auroit penſé.

XXI. Ayant dont trouvé, que la force dont la rame eſt pouſſée au point p ſelon la direction $p\pi$, eſt $= p\left(1 - \frac{aau}{bb\theta}\right)$, & la force de l'eau ſur la pale reſtant comme auparavant $= \frac{Mcc}{g^3}(\sqrt{u} - \operatorname{coſ}\Phi.\sqrt{v})^2$; puisqu'il n'y a plus d'acceleration, il faut que les moments de ces forces ſoyent égaux entr'eux: ce qui donne cette équation:

$$a p\left(1-\frac{a a u}{b b \theta}\right)=\frac{\mathrm{M} b c c}{g^{3}}(\sqrt{u}-\operatorname{cof} \Phi . \sqrt{v})^{2}$$

de laquelle il faut chercher la quantité u; & alors la veritable force, avec laquelle l'eau eſt frappée par la rame ſuivant la direction $q\,y$ ſera

$$\frac{\mathrm{M} c c}{g^{3}}(\sqrt{u}-\operatorname{cof} \Phi . \sqrt{u})^{2}=\frac{a p}{b}\left(1-\frac{a a u}{b b \theta}\right)$$

Donc le point d'appuy c étant pouſſé par la ſomme de ces deux forces, il en réſultera une force ſuivant la direction $c\,d$ parallele à la quille, qui ſera =

$$\frac{(a+b) p \operatorname{cof} \Phi}{b}\left(1-\frac{a a u}{b b \theta}\right)$$

qui eſt employée à accélerer le mouvement du vaiſſeau. Mais d'un autre coté le vaiſſeau étant repouſſé par toute la force que les rameurs employent, qui eſt $= p$, & dans une direction perpendiculaire à celle des rames, il en faut retrancher la force p coſ Φ, pour avoir la veritable force, dont le vaiſſeau eſt pouſſé ſuivant la direction de ſon mouvement A α: cette force ſera donc:

$$\frac{(a+b) p \operatorname{cof} \Phi}{b}\left(1-\frac{a a u}{b b \theta}\right)-p \operatorname{cof} \Phi \text{ ou bien }$$

$$=\frac{a}{b} p \operatorname{cof} \Phi-\frac{(a+b) a a u p \operatorname{cof} \Phi}{b^{3} \theta}$$

XXII. Cette force ne ſera donc plus $=\frac{a p}{b}$ coſ Φ, comme nous avons trouvé dans la premiere recherche, mais elle doit etre diminuée d'une quantité, qui eſt proportionelle au quarré de la viteſſe de la pale; & de là il n'en ſuivra plus cet inconvenient, que le mouvement du vaiſſeau deviendroit plus vite, plus on raccourciroit la longueur exterieure de la rame $c\,b = b$. Pour profiter de la formule trouvée

$$\frac{a p}{b} \operatorname{cof} \Phi-\frac{(a+b) a a u p \operatorname{cof} \Phi}{b^{3} \theta}$$

qui

qui marque la force dont le vaisseau est poussé dans la direction A α: il faut premierement remarquer, que l'angle φ ne devient jamais si grand, qu'on eut besoin de réflechir à la diminution de cette force, qui est causée par le cosφ; je rejetterai donc ce facteur cosφ, comme si la direction du mouvement de la pale restoit toujours parallele à la quille; ou afin qu'on n'estime cette force trop grande, on la pourra diminuer d'une partie convenable, ou de supposer la force entiere des rameurs p un peu plus petite qu'elle n'est en effet: & ainsi cette force sera:

$$\frac{ap}{b} - \frac{(a+b)aaup}{b^3\theta}.$$

XXIII. Cette force doit étre égale à la resistance, que le vaisseau trouve à fendre l'eau; si l'on veut, que le vaisseau soit dejà reduit à un movement uniforme. Or cette resistance a été trouvée là haut $= \frac{Mv}{h}$, où $h = \frac{g^3}{ff}$: d'où nous tirons cette égalité

$$\frac{Mv}{h} = \frac{ap}{b} - \frac{(a+b)aaup}{b^3\theta}.$$

qui etant jointe à celle, que nous venons de trouver, qui est en supposant l'angle $\varphi = o$ ou cos$\varphi = 1$;

$$ap\left(1 - \frac{aau}{bb\theta}\right) = \frac{Mbcc}{g^3}(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2$$

servira à déterminer tant la vitesse des pales $\sqrt{u}$ que celle du vaisseau $\sqrt{v}$. Or ici j'ai supposé, que la force des rames demeure constamment la même; mais puisque dans chaque palade il se passe à peu pres deux tiers du tems, que la pale est frappée dans l'air, si nous concevons trois rames, dont l'une agisse aprés l'autre, il n'y aura toujours qu'une, dont l'action est employée à pousser le vaisseau: & partant ces trois rames ne produiront que l'effet, que je viens de déduire d'une seule.

XXIV. Ainsi quand il y aura sur le vaisseau n rameurs, ils produiront le même effet, que s'il n'y avoit que le tiers $\frac{1}{3}n$, & que leur force fut sans interruption employée à pousser le vaisseau. Donc si nous posons la force, dont un rameur travaille $= p$, la force de tous les n rameurs, entant qu'elle s'applique au mouvement du vaisseau, ne sera que $= \frac{1}{3} n p$. Et partant mettant dans la premiere $\frac{1}{3} n p$ au lieu de p, on trouvera la vitesse du vaisseau, qui est mis en mouvement par n rameurs, en resoloant ces deux équations:

$$\frac{3 M v}{n h} = \frac{a p}{b} - \frac{(a + b) a a p u}{b^3 \theta}$$

$$\frac{M b c c}{g^3} (\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 = a p \left(1 - \frac{a a u}{b b \theta}\right)$$

dont celle-cy donne d'abord:

$$\sqrt{v} = \sqrt{u} - \sqrt{\frac{g^3 a p}{M b c c} \left(1 - \frac{a a u}{b b \theta}\right)}$$

Mais la premiere donne:

$$\sqrt{v} = \sqrt{\frac{n a h p}{3 M b} \left(1 - \frac{(a + b) a u}{b b \vartheta}\right)}$$

supposé que chaque rame ne soit agitée que par un seul homme: car s'il y en a plusieurs, il faut partager la pale d'une rame en autant de parties, qu'il y a de rameurs, & alors une telle partie sera la valeur de $c c$.

XXV. Or il faut remarquer, que comme les rameurs par leur force, dont ils s'appuyent dans le vaisseau, en diminuent le mouvement, pendant qu'ils tirent la rame: ils avanceront au contraire le mouvement du vaisseau, pendant qu'ils retirent les rames dans l'air; à quoi nous n'avons pas fait reflexion. C'est pourquoi c'est trop si l'on retranche de la force des rames, la valeur $p \operatorname{cos} \Phi$, ou p en supposant $\operatorname{cos} \Phi = 1$, & on n'en doit oter que la force $p \left(1 - \frac{a a u}{b b \theta}\right)$, qu'un rameur exerce actuellement sur la rame; puisque l'excés est redressé par le mouvement suivant du rameur. Cette consideration nous fournira ces deux équations

$\frac{3 M v}{n h}$

$$\frac{3\,M\,v}{n\,h} = \frac{a\,p}{b}\left(1 - \frac{a\,a\,u}{b\,b\,\theta}\right) \text{ \&}$$

$$\frac{M\,b\,c\,c}{g^3}(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 = a\,p\left(1 - \frac{a\,a\,u}{b\,b\,\theta}\right)$$

d'où l'on tire:

$$\frac{3\,v}{n\,h} = \frac{c\,c}{g^3}(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2$$

ou $\sqrt{u} - \sqrt{v} = \sqrt{\frac{3\,g^3\,v}{n\,c\,c\,h}}$

& partant $\sqrt{u} = \left(1 + \sqrt{\frac{3\,g^3}{n\,n\,c\,c\,h}}\right)\sqrt{v}$

On aura donc:

$$u = \left(1 + \sqrt{\frac{3\,g^3}{n\,n\,c\,h}}\right)^2 v$$

laquelle valeur étant ſubſtituée dans la premiere équation donnera

$$\frac{3\,M\,v}{n\,h} = \frac{a\,p}{b} - \frac{a^3\,p}{b^3\,\theta}\,v\left(1 + \sqrt{\frac{3\,g^3}{n\,c\,c\,h}}\right)^2$$

d'où nous tirerons enfin:

$$v = \frac{n\,a\,b\,b\,h\,\theta\,p}{3\,M\,b^3\,\theta + n\,a^3\,h\,p\left(1 + \sqrt{\frac{3\,g^3}{n\,c\,c\,h}}\right)^2}$$

$$\text{\&}\ u = \frac{n\,a\,b\,b\,h\,\theta\,p\left(1 + \sqrt{\frac{3\,g^3}{n\,c\,c\,h}}\right)^2}{3\,M\,b^3\,\theta + n\,a^3\,h\,p\left(1 + \sqrt{\frac{3\,g^3}{n\,c\,c\,h}}\right)^2}$$

XXVI. Puisque $g^3 = ff\,b$, les lettres g & b, s'en iront du calcul, au lieu desquelles il y entrera la quantité ff, qui marque une ſurface plane, qui ſouffre la même reſiſtance, que le vaiſſeau propoſé. De là nous aurons les valeurs ſuivantes:

$v =$

$$v = \frac{nabbh\theta p}{3Mb^3\theta + na^3hp\left(1+\frac{f}{c}\sqrt{\frac{3}{n}}\right)^2}$$

$$\& \; u = \frac{nabbh\theta p\left(1+\frac{f}{c}\sqrt{\frac{3}{n}}\right)^2}{3Mb^3\theta + na^3hp\left(1+\frac{f}{c}\sqrt{\frac{3}{n}}\right)^2}$$

Pour abreger ces formules posons:

$$\left(1+\frac{f}{c}\sqrt{\frac{3}{n}}\right)^2 = \left(1+\sqrt{\frac{3ff}{ncc}}\right)^2 = r; \; \& \; \frac{b}{a} = x,$$

& nous aurons:

$$v = \frac{nh\theta pxx}{3M\theta x^3 + nhpr}$$

$$\& \; u = \frac{nh\theta prxx}{3M\theta x^3 + nhpr}$$

Ici il faut remarquer, que comme np marque la somme des forces de tous les rameurs prises ensemble; ainsi ncc marquera la somme des surfaces de toutes les pales prises ensemble.

XXVII. Exprimons les forces M & p par le poids des volumes d'eau, & comme $M = g^3 = ffb$, soit de même $p = \gamma^3$, ou la force d'un rameur soit égale au poids d'un cube d'eau, dont un coté $= \gamma$: & cela posé nos expressions seront:

$$v = \frac{n\theta\gamma^3 xx}{3ff\theta x^3 + n\gamma^3 r} \; \&$$

$$u = \frac{n\theta\gamma^3 rxx}{3ff\theta x^3 + n\gamma^3 r}$$

Posons outre cela $\frac{3ff\theta}{n\gamma^3} = e$, pour avoir

$$v = \frac{\theta xx}{ex^3 + r} \; \& \; u = \frac{\theta rxx}{ex^3 + r}$$

d'où

d'où nous concluons, que puisque e, r & x ſont des nombres abſolus, ſi l'on exprime la hauteur ϑ en milliemes parties du pied de Rhin, le vaiſſeau acquerra une viteſſe par laquelle il parcourra dans une ſeconde

$$\tfrac{1}{4} \sqrt{\frac{\vartheta\, x\, x}{e\, x^3 + r}} \text{ pieds de Rhin.}$$

& puisque la viteſſe des bras des rameurs eſt $= \frac{a}{b} \sqrt{u} = \frac{1}{x} \sqrt{u}$, le point p des rames doit etre tiré par les rameurs avec une viteſſe, qui fait dans une ſeconde

$$\tfrac{1}{4} \sqrt{\frac{\vartheta\, r}{e\, x^3 + r}} \text{ pieds de Rhin.}$$

Or la force requiſe pour maintenir le vaiſſeau dans ſon mouvement etant $= \frac{M\, v}{h} = \frac{g^3\, v}{h} = ff\, v$, exprimée en volume d'eau, ſi nous la diviſons par $\frac{n}{3}$, nous trouverons la force qu'un rameur, pendant qu'il fend l'eau, apporte à pouſſer le vaiſſeau qui ſera $= \frac{3 ff\, v}{n} = \frac{\gamma^3\, e}{\vartheta}\, v = \frac{p\, e}{\vartheta}\, v$, puisque $p = \gamma^3$, & partant cette force actuelle d'un rameur ſera $= \frac{p\, e\, x\, x}{e\, x^3 + r}$.

XXVIII. Voyons préſentement, par quelles operations on pourra commodément parvenir à la connoiſſance de la viteſſe d'un vaiſſeau, qui eſt pouſſé par un nombre donné de rameurs. Pour cet effet je propoſerai en abrégé les diverſes choſes desquelles cette recherche dépend, en omettant celles qui ne ſe trouvent plus dans les dernieres formules, quoique je fuſſe obligé d'y avoir égard au commencement du calcul. Premierement donc, pour ce qui regarde les rameurs, il faut connoitre

1. Leur nombre que je poſe $= n$.

2. La force dont un rameur commence à tirer la rame, avant qu'elle soit déjà mise en mouvement: Cette force a été supposée $=$ au poids p, ou au poids d'un volume d'eau $= \gamma^3$. Cette valeur depend de l'application de chaque rameur, & est par consequent fort variable. On la pourra estimer de 48 jusqu'à 60 livres: & comme un pied cubique d'eau pese 72 livres, en exprimant γ en pieds, la valeur de γ^3 sera de $\frac{2}{3}$ jusqu'à $\frac{5}{6}$ pieds cubiques.

3. La plus grande vitesse dont un rameur est capable de tirer la rame, quand il n'a aucune resistance à vaincre que je suppose duë à la hauteur $= \vartheta$. Cette hauteur ϑ sera à peu pres égale à un pied, d'où résulte une vitesse, qui fait environ 8 pieds dans une seconde.

Ensuite pour la rame nous avons à considerer:

4. La raison qu'il y a entre la partie de la rame qui sort hors du vaisseau, & l'autre qui se trouve dans le vaisseau, ces deux parties etant separées par le point d'appuy c. La longueur de la partie exterieure se conte du point c jusqu' au centre de la pale b, & j'ai nommé $cb = b$. La longueur de la partie interieure doit etre prise depuis le point d'appuy c jusqu' au point a, où l'on conçoit appliquée la force moyenne de plusieurs rameurs, qui travaillent à la même rame: j'ai nommé cette longueur $ca = a$. Or il n'y entre dans le calcul que le rapport entre ces deux parties, que j'ai posé $\frac{b}{a} = \frac{cb}{ca} = x$.

La surface de chaque pale, que je pose $= cc$, s'il n'y a qu'un rameur, qui la tire: ou s'il y a plusieurs, il faut diviser la surface de la pale par le nombre des rameurs qui s'appliquent à une rame, & la partie résultante sera la valeur de cc. Ou on ajoutera les surfaces de toutes les pales dans une somme, qui étant divisée par le nombre de tous les rameurs donnera la valeur de cc. Mr. Chazelles donne une description d'une Galere, dans les Memoires de l'Acad. Royale de Paris pour l'an. 1702. où le nombre des rameurs étoit 260, & toutes les pales rassemblées dans une somme

somme faisoient 130 pieds quarrés; dans ce cas donc la valeur de cc étoit $\frac{1}{4}$ pied quarré.

Du vaisseau même on n'a qu' à considerer:

6. Sa resistance, que je mesure par une surface plane $= ff$, laquelle frappant l'eau directement avec la vitesse du vaisseau, essuye la meme resistance. Si le vaisseau avoit une figure prismatique, la section de la partie submergée, faite perpendiculairement à la quille, donneroit la valeur de ff. Mais les façons, dont les vaisseaux sont presque terminés en pointe vers la prouë, diminuent considerablement cette valeur de ff, desorte qu' ordinairement ff est plusieurs fois plus petite, que la plus large section de la partie submergée, faite perpendiculairement à la quille.

XXIX. Ces six choses, dont dépend la determination de la vitesse du vaisseau, etant connuës, qu'on en tire les valeurs suivantes:

$$r = \left(1 + \sqrt{\frac{3ff}{ncc}}\right)^2; \ \& \ e = \frac{3ff\vartheta}{n\gamma^3}.$$

& alors la vitesse du vaisseau sera

de $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\vartheta xx}{ex^3 + r}}$ pieds dans une seconde; supposé qu'on exprime la hauteur ϑ en milliemes parties du pied de Rhin. Si donc la hauteur ϑ est estimée de 1, 024 pieds de Rhin, ou à peu pres à un pied de Paris, le vaisseau parcourra dans une seconde:

$$8\sqrt{\frac{xx}{ex^3 + r}} \text{ pieds de Rhin.}$$

où les lettres e, r, & x, marquent des nombres absolus, & la force d'un rameur, pendant qu'il tire la rame par l'eau, laquelle est employée au mouvement du vaisseau, sera $= \frac{pexx}{ex^3 + r}$.

XXX. Pour faire l'application de ces formules à la pratique je vais developer l'exemple, que Mr. Bernoulli rapporte dans son Hydrodynamique, pag. 299 d'une Galere, dont Mr. Chazelles a communiqué un recit dans les Memoires A. 1702. Il remarque d'abord que cette Galere etant tirée par le poids d'un pied cubique d'eau, parcourroit une espace de 2 pieds dans une seconde. Faisant l'application de la formule §. 9 à ce cas; qui étoit $P = \frac{Mv}{h}$; ou puisque $M = g^3 = ffb$, nous aurons $P = ffv$. Or P etant $=$ à un pied cubique d'eau, ou $P = 1$, & $\frac{1}{4} \sqrt{v} = 2$, nous aurons $v = 64$ milliemes parties d'un pied, ou $v = \frac{64}{1000}$, d'où l'equation $P = ffv$ se changera en $1 = \frac{64}{1000} ff$, de là nous connoissons la valeur de ff, mesure de la resistance, savoir $ff = \frac{1000}{64}$ pieds quarrés, & partant pour cette Galere je pourrai supposer qu'il y avoit $ff = 16$ pieds quarrés.

XXXI. Ensuite le nombre des rameurs étoit 260; d'où je tire $n = 260$; & la somme de toutes les pales ensemble egaloit 130 pieds quarrés, d'où nous aurons $cc = \frac{1}{2}$. La partie exterieure des rames etoit deux fois plus longue que l'interieure, ce qui donne $x = 2$. Et la galere mise ainsi en mouvement a parcouru chaque seconde un espace de $7\frac{1}{4}$ pieds de Paris, ou à peu prés $7\frac{1}{2}$ pieds de Rhin. La force p de chaque rameur n'est pas déterminée, mais nous la pourrons trouver de la vitesse du vaisseau. Car puisque $x = 2$ nous aurons d'abord cette equation; en supposant $\theta = 1$.

$$7\tfrac{1}{2} = 8 \sqrt{\frac{4}{8e + r}},$$

$$\text{ou } 8e + r = \frac{1024}{225} = 4,55.$$

De plus puisque $ff = 16$, $cc = \frac{1}{2}$; & $n = 260$, nous aurons $e = \frac{48}{260\gamma^3}$ & $r = \left(1 + \sqrt{\frac{48}{130}}\right)^2 = 2,5845$; donc $8e = 1,$

9655 &

9655 & $e = 0,2456 = \frac{24}{130\gamma^3}$: d'où nous obtiendrons $\gamma^3 = 0,752$ ou $\gamma^3 = \frac{3}{4}$ pied. cubique, de ſorte que la force abſoluë d'un rameur ait été $p = 54$ livres ; ce qui eſt un milieu entre les valeurs de 48 ℔ & 60 ℔, que j'ai miſes par eſtime. Deplus, la force d'un rameur, qui eſt actuellement emploiée à pouſſer le vaiſſeau, ſera d'environ 12 Livres. Mais prenant tous les rameurs enſemble, des 54 ℔ que chacun applique, il n'y a que 4 ℔, qui agiſſent ſur le mouvement du vaiſſeau.

XXXII. A l'avenir donc je pourrai avec aſſés de ſureté ſuppoſer $\gamma^3 = \frac{3}{4}$ & $\theta = 1$, d'où j'aurai $e = \frac{4ff}{n}$, pourvû que ff ſoit exprimée en pieds quarrés, & alors prenant $r = \left(1 + \sqrt{\frac{3ff}{ncc}}\right)^2$. la viteſſe du vaiſſeau ſera de $8\sqrt{\frac{\kappa x}{ex^3 + r}}$ pieds dans une ſeconde: & on peut être aſſuré, que par le moyen de cette formule on trouvera dans chaque cas propoſé aſſés exactement la viteſſe avec laquelle le vaiſſeau ſera mis en mouvement. De plus ſachant les elemens e, r, & x, dont dépend la viteſſe du vaiſſeau, on ſera en état de trouver les plus favorables diſpoſitions de ces elemens, afin que le mouvement du vaiſſeau devienne le plus rapide qu'il ſera poſſible; & c'eſt à cette recherche que je vais m'appliquer avant que de finir ce Memoire.

XXXIII. Or d'abord il eſt evident, que la diminution des valeurs e & r doivent contribuer à l'acceleration du vaiſſeau. La valeur de e étant $= \frac{4ff}{n}$, on voit que c'eſt la diminution de la reſiſtance ff & l'augmentation du nombre des rameurs, qui rendent le mouvement du vaiſſeau plus rapide. Les memes choſes ſervent auſſi à diminuer la valeur de r, de ſorte qu'elles contribuënt doublement à ce deſſein. Mais la valeur de r ſera auſſi diminuée, ſi l'on augmente la

 ſurface

ſurface des pales cc; & de là on tirera cette maxime, qu'on doit tacher de rendre les pales auſſi larges, que les autres circonſtances le permettront; deſorte que la manœuvre n'en devienne plus difficile. Il eſt bien vrai qu'une trop grande largeur ſeroit accompagnée de pluſieurs autres inconveniens, mais je ne doute pas, qu'on ne ſauroit tirer de cette conſideration encore quelque avantage pour accelerer le ſillage. Or combien on en pourroit gagner, je déterminerai dans la ſuite, aprés avoir découvert la plus avantageuſe valeur de x, ou du rapport qu'on doit mettre entre les parties des rames cb & ca.

XXXIV. Outre les valeurs de e & r, la viteſſe du vaiſſeau dépend principalement de la valeur x: car la viteſſe evanouït egalement tant ſi $x = o$, que ſi $x = \infty$: d'où l'on voit qu'il y a une certaine valeur de x, qui produit la plus grande viteſſe: & il ſera fort important de connoitre cette valeur. Pour cet effet on n'a qu'à égaler à zero le differentiel de $\frac{xx}{ex^3 + r}$, ce qui donnera $2rx = ex^4$, ou $x^3 = \frac{2r}{e}$ & $x = \sqrt[3]{\frac{2r}{e}}$. Voilà donc le plus avantageux rapport qu'on doit mettre entre les parties de la rame cb & ca; on le determinera par cette formule:

$$\frac{cb}{ca} = \sqrt[3]{\frac{2r}{e}}.$$

Ce rapport n'eſt pas donc conſtant, ou le meme dans tous les vaiſſeaux; mais il le faut déterminer pour chaque cas propoſé à part des valeurs des lettres r & e.

Ayant trouvé:

$$e = \frac{4ff}{n} \;\&\; r = \left(1 + \sqrt{\frac{3ff}{ncc}}\right)^2$$

on voit que ce plus avantageux rapport $\frac{cb}{ca} = x$ dépend premierement de la reſiſtance du vaiſſeau ff; ſecondement du nombre des rameurs

meurs n, & enfin de la largeur des pales. Dans la Galere conſiderée, nous avions à peu prés $e = \frac{1}{4}$ & $r = 2\frac{1}{2}$, d'où il s'enſuit $x = \sqrt[3]{20} = 2,71$ ou $x = 2\frac{5}{7}$. Donc le rapport entre cb & ca devroit etre $\frac{cb}{ca} = \frac{19}{7}$. Or ſuivant la deſcription, il y avoit $cf = 6$ pieds & $cg = 12$ pieds, & ſelon toute apparence la diſtance cb etoit $= 10$ pieds, & ca environ $= 4$ pieds, puisqu'il y avoit pluſieurs rameurs attachés à la meme rame; d'où l'on voit que le rapport dont on s'eſt ſervi dans cette Galere, ne differoit pas beaucoup de celui que la theorie nous donne à connoitre.

XXXV. Comme la plus avantageuſe valeur de $x = \sqrt[3]{\frac{2r}{e}}$ eſt un *maximum*, il n'eſt pas neceſſaire qu'on l'obſerve dans la pratique ſi rigoureuſement; car ſoit qu'on prenne x un peu plus grand, ou un peu plus petit, la difference qui en naît dans la viteſſe du vaiſſeau, ſera imperceptible. Or ſuppoſant comme nous venons de trouver:

$$x = \sqrt[3]{\frac{2r}{e}} \ \& \ x^3 = \frac{2r}{e}$$

la veritable viteſſe du vaiſſeau ſera telle, qu'il parcourra chaque ſeconde un eſpace de

$$8 \sqrt[3]{\frac{2r}{e}} : \sqrt{3r} = \frac{8}{\sqrt{3r}} \sqrt[3]{\frac{2r}{e}} \text{ pieds de Rhin.}$$

Ou cet eſpace ſera de $\frac{5,81933}{\sqrt[6]{eer}}$ pieds par ſecondes, ſuppoſant $e = \frac{4ff}{n}$ & $r = \left(1 + \sqrt{\frac{3ff}{ncc}}\right)^2$, où ff doit etre exprimée en pieds quarrés. Et partant ſi nous ſubſtituons ces valeurs, le vaiſſeau parcourra chaque ſeconde un eſpace de

$$\frac{5,81933}{\sqrt[3]{\frac{4ff}{n}\left(1+\sqrt{\frac{3ff}{ncc}}\right)}}$$ pieds de Rhin,

qui eſt la plus grande viteſſe, dont ce vaiſſeau eſt ſusceptible, & qu'on obtient, ſi l'on fait

$$x=\frac{c}{c}\frac{b}{a}=\sqrt[3]{\frac{n\left(1+\sqrt{\frac{3ff}{ncc}}\right)^2}{2ff}}.$$

XXXVI. Ayant vû que dans l'exemple allegué il y avoit $cc=\frac{1}{2}$ puisqu'il eſt avantageux d'augmenter la largeur des pales, ſuppoſons qu'il ſoit poſſible de faire $cc=\frac{3}{4}$, & alors on doit diſpoſer les rames, enſorte qu'on obtienne

$$x=\frac{c}{c}\frac{b}{a}=\sqrt[3]{\frac{n\left(1+\sqrt{\frac{4ff}{n}}\right)^2}{2ff}}$$

& la plus grande viteſſe, dont le vaiſſeau fillera par cette diſpoſition ſera,

de $$\frac{5,81933}{\sqrt[3]{\frac{4ff}{n}\left(1+\sqrt{\frac{4ff}{n}}\right)}}$$ pieds par ſeconde.

Par là on voit que, tant la proportion entre les parties des rames, que la viteſſe du vaiſſeau, dépend uniquement du rapport $\frac{ff}{n}$, qu'il y a entre la reſiſtance ff, qui doit être exprimée en pieds quarrés, & le nombre des rameurs: de ſorte que dés qu'on connoit ce rapport $\frac{ff}{n}$, on eſt en état de déterminer la plus avantageuſe diſpoſition des rames, ou le rapport $x=\frac{c}{c}\frac{b}{a}$, & la viteſſe meme, qui par ce moyen ſera imprimée au vaiſſeau.

XXXVII. Dans

XXXVII. Dans l'exemple calculé cy-dessus, la valeur de la resistance absolue etoit $ff = 16$, & le nombre des rameurs $n = 260$, ainsi la valeur de la fraction $\frac{ff}{n}$ etoit à peu prés $= \frac{1}{16}$, ou $n = 16\,ff$ Supposons qu'il soit généralement $n = m\,ff$, ou $\frac{ff}{n} = \frac{1}{m}$, & nous aurons ces expressions:

$$x = \frac{c\,b}{c\,a} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\,m\left(1 + 2\sqrt{\frac{1}{m}}\right)^2}$$

& le vaisseau décrira par son mouvement chaque seconde un espace de

$$\frac{5,81933}{\sqrt[3]{\frac{4}{m}\left(1 + 2\sqrt{\frac{1}{m}}\right)}} \text{ pieds de Rhin.}$$

De ces formules je construirai la table suivante, où la premiere colomne marque le nombre des rameurs exprimé par ff, qui est l'aire d'une surface plane, dont la resistance est la meme, que celle du vaisseau, & ff est supposé etre donné en pieds quarrés. La seconde colomne represente le rapport des parties de chaque rame $b\,c : a\,c$, ou la valeur de la fraction $\frac{b\,c}{a\,c}$, exprimée en fractions decimales. La troisieme colomne contient la vitesse du vaisseau, ou marque combien de pieds le vaisseau parcourra dans une seconde. La quatrieme colomne indique le chemin parcouru dans une heure, pareillement en pieds du Rhin. Voici la table que j'ai calculée, la resistance du vaisseau étant egale à la resistence d'une surface plane $= ff$ donnée en pieds quarrés.

Nombre des Rameurs.	Rapport entre bc & ac ou la valeur de $\frac{bc}{ac}$.	Espace parcouru daus une seconde en pieds de Rhin.	Espace parcouru dans une heure en Pieds de Rhin.
0 ff	1, 2599	0, 0000	0
¼ ff	1, 4620	1, 3505	4862
½ ff	1, 5417	1, 8600	6696
1 ff	1, 6510	2, 5814	9151
2 ff	1, 7997	3, 4430	12395
3 ff	1, 9096	4, 0935	14737
4 ff	2, 0000	4, 6188	16628
5 ff	2, 0779	5, 0662	18237
6 ff	2, 1472	5, 4596	19654
7 ff	2, 2098	5, 8128	20926
8 ff	2, 2674	6, 1348	22085
9 ff	2, 3208	6, 4315	23154
10 ff	2, 3708	6, 7076	24148
11 ff	2, 4178	6, 9660	25078
12 ff	2, 4623	7, 2100	25956
13 ff	2, 5044	7, 4403	26785
14 ff	2, 5449	7, 6602	27577
15 ff	2, 5836	7, 8692	28329
16 ff	2, 6208	8, 0698	29051
17 ff	2, 6564	8, 2617	29742
18 ff	2, 6909	8, 4470	30409
19 ff	2, 7242	8, 6247	31049
20 ff	2, 7565	8, 7974	31670
21 ff	2, 7877	8, 9637	32269
22 ff	2, 8181	9, 1253	32857
23 ff	2, 8477	9, 2817	33414
24 ff	2, 8765	9, 4339	33962
25 ff	2, 9044	9, 5820	34495
26 ff	2, 9317	9, 7262	35014
27 ff	2, 9584	9, 8666	35520
28 ff	2, 9485	10, 0036	36013
29 ff	3, 0099	10, 1372	36494
30 ff	3, 0350	10, 2682	36966
10000 ff	17, 3270	78, 4610	282460

XXXVIII. Cette

XXXVIII. Cette table peut donner lieu à plusieurs réflexions curieuses. Premierement on voit, qu'afin que le vaisseau obtienne le mouvement le plus vite, qui est possible par les mêmes forces, la partie exterieure des rames doit toujours être plus longue que la partie interieure; condition que l'experience a donnée à connoitre, & qui se pratique generalement. En second lieu nous voyons, que plus le mouvement du vaisseau doit être rapide, plus grande doit etre aussi la raison entre la partie exterieure des rames & l'interieure; car si le vaisseau doit achever chaque heure un espace de 16600 pieds, la partie exterieure des rames doit etre deux fois plus longue que l'interieure: & pour que l'espace parcouru dans une heure soit de 36500 pieds, la partie exterieure doit etre trois fois plus longue. De plus on voit, que la vitesse du vaisseau ne suit pas la raison du nombre des rameurs, ni celle des racines quarrées: car, pour rendre la vitesse du vaisseau deux fois plus grande, le nombre des rameurs doit etre plus que quatre fois plus grand. La vitesse de 16628 pieds par heure demande le nombre des rameurs $= 4\,ff$, mais la vitesse double de 33256 pieds par heure demande un nombre de rameurs presque $= 23\,ff$, qui est presque 6 fois plus grand. Enfin on reconnoit, que plus la vitesse est grande, plus elle augmente lentement en augmentant le nombre des rameurs: & quoiqu'un nombre infini de rameurs doive produire une vitesse infiniment grande, pourtant un nombre prodigieux de rameurs comme de $10000\,ff$ ne produit qu'une mediocre vitesse, savoir de 282460 pieds par heure, qui ne feroit que 10 fois plus grande, que si le nombre des rameurs n'etoit que $= ff$. Or dans ce cas de $10000\,ff$ rameurs, la partie exterieure des rames devroit etre environ $17\frac{1}{3}$ fois plus longue que la partie interieure.

XXXIX. Par le moyen de cette table on est aussi en etat de construire & d'arranger un vaisseau, ensorte qu'il devient capable de faire un chemin donné par heure. Si l'on veut conter le chemin par milles d'Allemagne, il faut remarquer, qu'une telle mile contient 23640 pieds de Rhin. Et partant afin que le vaisseau fasse une mille d'Allemagne par heure, le nombre des rameurs doit etre $= 9\frac{1}{2}\,ff$;

& les

& les rames doivent etre partagées, ensorte que $\frac{bc}{ac} = 2\frac{1}{3}$ ou que $ac : bc = 3 : 7$. Mais que le vaisseau fasse $1\frac{1}{2}$ milles par heure ou 35460 pieds, il faut un nombre de rameurs $= 27\,ff$, & bc doit etre presque 3 fois plus longue que ab. Donc la Galere considerée cy-dessus, où il étoit $ff = 16$, parcourra par heure une mille d'Allemagne, si elle est poussée par 152 Rameurs: mais si l'on vouloit qu'elle fit $1\frac{1}{2}$ milles d'Allemagne, on y devroit mettre 432 Rameurs. Et partant si cette Galere n'est pas capable de recevoir un si grand nombre de rameurs, il sera impossible qu'elle acheve $1\frac{1}{2}$ mile par heure. Car il faut remarquer, que plus on y place de rameurs, à cause de leur poids la Galere s'enfoncera plus dans l'eau, & sa resistance, & partant la valeur de ff, deviendroit plus grande. Par cette raison il sera tout à fait impossible de disposer une Galere, tellement qu'elle soit capable de parcourir deux milles d'Allemagne par heure, puisqu'il faloit pour cet effet un nombre de rameurs $= 54\,ff$, si ce n'etoit qu'on pût trouver moyen de diminuer la resistance trés considerablement; or il semble que d'autres circonstances, auxquelles il faut avoir égard, ne permettent pas une si grande diminution.

XL. Pour mieux voir, combien la rigoureuse observation de la proportion trouvée entre les parties ac & bc de chaque rame, contribuë à l'acceleration du vaisseau, je considererai le cas, où le nombre des rameurs est $= 16\,ff$, & la vitesse du vaisseau de 29051 pieds par heure, si l'on fait usage de la plus avantageuse disposition des rames $\frac{bc}{ac} = x = 2{,}6208$; & je chercherai la vitesse, que ce même vaisseau acquerroit, si l'on ne mettoit que $x = 2$. Dans ce cas la vitesse du vaisseau seroit de $\frac{16}{V(8c + r)}$ pieds dans une seconde, & partant de $\frac{57600}{V(8c + r)}$ pieds par heure. Or pour ce cas

nous

nous aurons $e = \frac{4ff}{n} = \frac{1}{4}$ & $r = (1 + \sqrt{\frac{1}{4}})^2 = \frac{9}{4}$ à cause de $cc = \frac{3}{4}$: donc $8e + r = 2 + \frac{9}{4} = \frac{17}{4}$, & la vitesse du vaisseau sera $= \frac{115200}{\sqrt{17}} = 27940$ pieds par heure. Par conséquent, si au lieu de la proportion la plus avantageuse entre les parties des rames $\frac{bc}{ac} = 2,6208$, on faisoit $\frac{bc}{ac} = 2$, on perdroit dans la vitesse du vaisseau 1111 pieds par heure, ce qui seroit une perte dejà asses considerable. Puisque j'ai remarqué que la valeur des pales $cc = \frac{3}{4}$ pieds quarrés est plus avantageuse que si l'on faisoit $cc = \frac{1}{2}$, je calculerai encore la vitesse du même vaisseau pour cette valeur $cc = \frac{1}{2}$ en supposant $x = 2$. Dans ce cas la valeur de e reste $= \frac{1}{4}$, mais on aura $r = (1 + \sqrt{\frac{3}{8}})^2 = 2,5997$, & la vitesse du vaisseau sera de 26856 pieds par heure. Donc cette diminution des pales causeroit encore une perte de 1084 pieds par heure; d'où il est clair combien il est important d'augmenter la grandeur des pales, autant qu'il sera possible.