1749

Recherches sur le mouvement des corps célestes en général

Leonhard Euler

Recherches sur le mouvement des corps celestes en general.

par Mr. Euler.

I.

Aprés la découverte des forces centrales, dont les Planetes principales sont poussées vers le Soleil, & les Satellites vers leurs principales, selon la raison renversée des quarrés des distances, le mouvement des Planetes n'est jugé irregulier, qu'entant qu'il ne suit pas exactement cette loi generale. En effet le mouvement d'une Planete seroit parfaitement régulier, s'il étoit conforme aux regles établies par Kepler; ou ce qui revient au même, si la force, par laquelle le mouvement de cette Planete est modifié, etoit dirigée constamment vers le centre du Soleil, & qu'elle fût proportionnelle réciproquement aux quarrés de sa distance au Soleil. Car alors, suivant les démonstrations de Neuton, cette Planete décriroit autour du Soleil une parfaite ellipse, dont l'un de ses foyers se trouveroit dans le centre du Soleil, & cette ellipse conserveroit éternellement la même situation, de sorte que, ni le plan où elle se trouve, ni la position de son axe, fût sujette à aucun changement.

II. C'est sur ce fondement, que Street a construit ses Tables Carolines, où non seulement les inegalités periodiques de chaque Planete sont calculées sur ce principe, mais aussi les orbites sont supposées immobiles dans le Ciel. Car il ne reconnoit aucun mouvement, ni dans le lieu des aphelies, ni dans celui des noeuds, par raport aux Etoiles fixes; & ce n'est qu'eu égard aux équinoxes, que ces points souffrent selon lui quelque changement. Mais depuis, les Astronomes ayant plus soigneusement examiné les orbites des Planetes, ils ont trouvé, que leurs aphelies aussi bien que leurs noeuds, changent un peu de place, même par rapport aux Etoiles fixes. Suivant ces recherches, l'aphelie de Mars est avancé depuis un Siecle de 33'. 20"; mais ses nœuds se trouvent reculés de 20' par rapport aux Etoiles fixes: or dans les autres Planetes ce changement est plus ou moins sensible.

III. Comme c'est une verité constatée, que, ni les aphelies des Planetes, ni leurs nœuds, ne seroient sujets à aucun changement, s'il n'y avoit pas d'autre force, qui agissoit sur les Planetes, que celle, qui étant dirigée vers le Soleil, décroit exactement dans la raison des quarrés des distances; il s'ensuit nécessairement, ou que cette force par laquelle chaque Planete est actuellement poussée, ne soit pas dirigée précisement vers le centre du Soleil, ou qu'elle ne suive pas exactement la raison réciproque des quarrés des distances, ou qu'il y ait d'autres forces outre celle-cy, qui troublent le mouvement des Planetes, en y causant ce changement observé dans leurs aphelies & nœuds. Or le mouvement des Satellites, & sur tout celui de la Lune, nous donnent à connoitre, quelles puissent être ces forces nouvelles, qui agissent sur les Planetes. Car la Lune étant principalement sollicitée vers le centre de la Terre, on comprend aisément, que cette force se doit étendre à une distance beaucoup plus grande, que celle de la Lune, & que peut-être les autres Planetes en peuvent sentir quelque effet, quand elles se trouvent prés de leur Perigée.

IV. Cependant, si nous suposons que cette force de la Terre, qui dans sa surface cause la pesanteur, décroit en raison quarrée des distances, elle deviendra si petite à la distance, où Mars ou Venus se peuvent aprocher, que son effet doit être absolument insensible. Mais il n'en est pas de même de la force dont les Satellites de Jupiter sont poussés vers lui; cette force étant pareillement diminuée selon

les

les quarrés des distances, demeure encore assez considerable dans la region de Saturne, pour en alterer le mouvement. Et réciproquement, la force avec laquelle Saturne attire ses Satellites, s'étend encore avec assez de vigueur jusqu' à l'orbite de Jupiter pour y pouvoir causer quelque dérangement. Le systeme de la gravitation universelle devient donc par là trés vraisemblable; que toutes les planetes ne sont pas seulement attirées vers le Soleil, mais qu'elles s'attirent aussi mutuellement les unes les autres, par des forces réciproquement proportionnelles aux quarrés de leurs distances: & que même le Soleil est attiré vers les Planetes par des forces semblables.

V. Par là on reconnoitra aisement, que la détermination du vrai mouvement des Planetes devient infiniment plus difficile, que dans la prémiere hypothese, où chaque Planéte n'a été poussée que par une seule force dirigée constamment vers le centre du Soleil, & réciproquement proportionnelle aux quarrés de ses distances. Car maintenant, pour bien déterminer le veritable mouvement d'une Planete, outre cette force qui tend vers le Soleil, on doit avoir égard aux forces, dont cette même Planéte est attirée vers chacune de toutes les autres. Or combien le calcul en doit devenir difficile & embarrassant, la seule theorie du mouvement de la Lune le declare suffisament; laquelle n'étant poussée que par deux forces, dont l'une est dirigée vers le centre de la Terre, & l'autre vers celui du Soleil, est pourtant sujette à tant d'inégalités, dont plusieurs sont encore tout à fait inconnuës. Mais la même recherche devient beaucoup plus difficile dans les autres Planetes, à cause de la grande variabilité qui régne dans leurs distances mutuelles.

VI. Mais quand même on seroit heureusement venu à bout de cette recherche, & qu'on eut trouvé moyen de déterminer exactement le mouvement d'autant de corps, qu'on voudra, qui s'attirent mutuellement selon la raison réciproque doublée des distances, j'ai encore bien des raisons de douter, si ce calcul seroit parfaitement d'accord avec les observations des Planetes. Car quelques recherches & réflexions que j'ai faites, tant sur l'origine de ces forces, que sur les dérangemens, qu'on remarque dans le mouvement de la Lune,

& des

& des Planetes ſuperieures, m'ont porté à croire, que les forces, dont on ſoutient, que les Planetes s'attirent les unes les autres, ne ſuivent pas exactement la raiſon réciproque des quarrés des diſtances, & il me ſemble presque, que l'aberration de cette raiſon croît avec les diſtances, puisque quelques inégalités periodiques, qu'on ne ſauroit attribuer à l'action des autres Planetes, ſe trouvent beaucoup plus grandes dans Saturne, que dans les autres Planetes. Et les Aſtronomes ont dejà remarqué que, les Planetes ſuperieures s'écartent plus ſenſiblement des Tables Aſtronomiques, que les inferieures.

VII. En effet, ceux mêmes qui maintiennent l'attraction univerſelle de la matiere à la derniere rigueur, ſeront obligés d'admettre une petite irregularité dans la loi des forces, dont les Planetes agisſent les unes ſur les autres. Car les partiſans de ce ſyſteme ne reconnoiſſent cette force d'attraction dans les corps celeſtes, qu'entant qu'ils ſont composés de matiére: or ils ſoutiennent que chaque particule de la matiére eſt douée d'une force d'attraction proportionnelle à ſa maſſe, & qui va en diminuant ſelon les quarrés des diſtances. Donc la force de gravité de la Terre, par exemple, ſur un point placé hors d'elle, n'eſt autre choſe que le réſultat de toutes les forces dont ce point eſt attiré, vers toutes les particules de la matiére, dont la Terre eſt compoſée. Mais, quoique la force de chaque particule ſoit ſuppoſée exactement ſuivre la raiſon renverſée des quarrés des diſtances; il n'en ſuit pas, que la force totale, qui en réſulte, ſe régle ſuivant la même raiſon; quelque figure qu'ait le corps entier. Neuton n'a demontré cette loi de forces, qu'au cas, où la Planete eſt ronde & compoſée de matiére homogéne, ou du moins de couches ſpheriques homogénes. Or dans le cas, où la figure de la Planete n'eſt pas ſpherique, il n'eſt pas difficile de prouver par le calcul, que la force réſultante de toutes les attractions des particules de la matiere, ne décroit plus dans la raiſon de quarrés de la diſtance, ni qu'elle eſt dirigée vers le centre de la Planete, ou vers quelqu'autre point fixe.

VIII. Puisque donc les corps des Planetes ne ſont ni ſpheriques, ni formés d'une matiére ſimilaire, on ne ſera plus ſurpris, ſi les

les forces, dont elles s'attirent mutuellement, ne se trouvent pas exactement réciproquement proportionnelles aux quarrés de leurs distances. Et même la force du Soleil ne suivra pas exactement cette loi, vû que, ni sa figure est probablement tout à fait spherique, ni la matiere, dont il est composé, homogene. Voilà donc une raison assez forte, pourquoi il sera permis de croire que la force, dont les Planetes sont poussées vers le Soleil, ne se régle pas parfaitement sur la raison renversée des quarrés des distances: & cette loi sera encore moins certaine, quand il s'agit des forces, dont les Planetes s'attirent mutuellement.

IX. Or nous allons découvrir encore une autre irregularité dans la force dont une Planete est poussée vers le Soleil. Une Planete n'est pas attirée vers le Soleil, qu'entant que chaque particule y est poussée par la gravitation. Donc pour connoitre la force entiére, qui agit sur la Planete, & par laquelle son mouvement est derangé; il faut déterminer la moienne direction de toutes les forces, dont les particules de la Planete seront sollicitées vers le Soleil, & de les réduire à une seule force selon la même direction. Or on trouvera, que si la figure de la Planete n'est ni spherique, ni sa matiere homogene, cette moienne direction ne passera plus par le centre de gravité, & que la force totale ne sera non plus proportionnelle aux quarrés de la distance réciproquement; quand même la force du Soleil sur chaque particule de la Planete suivroit cette loi. Par cette raison il sera fort vraisemblable que, ni les orbites des Planetes ne sont des ellipses parfaites, ni que leur mouvement se régle exactement sur les loix de Kepler, quand même on feroit abstraction des forces, dont les Planetes agissent les unes sur les autres.

X. L'autre circonstance, ou la direction de la force moienne, dont une Planete est poussée vers le Soleil, doit encore produire un effet, que les observations semblent verifier assez clairement: car une telle force tend à imprimer à la Planete un mouvement de rotation, ou, si elle en a un deja, à le déranger, en alterant l'axe de la rotation: & en effet il n'y a presque aucun doute, que la nutation de l'axe de la Terre ne provienne de ce que la moienne direction, dont la

Terre eſt ſollicitée tant vers le Soleil, que vers la Lune, ne paſſe point par ſon centre de gravité. Mais, quand même cette force ſeroit parfaitement connuë, il faudroit pourtant demeurer là, en ſe contentant de voir ſon effet en gros. Car les principes de la Mechanique ſont encore entierement inconnus, dont on a beſoin pour déterminer l'effet d'une force, dont la direction ne paſſe pas par le centre de gravité du corps qui en eſt pouſſé: ſurtout quand cette force tend à incliner l'axe, autour duquel le corps a déjà un mouvement de rotation.

XI. Ce ſont les raiſons tirées de la theorie pour prouver, que les forces, dont les Planetes, ou ſont tirées vers le Soleil, ou s'attirent mutuellement, ne ſuivent pas exactement la raiſon réciproque des quarrés des diſtances. Le parfait accord, qu'on remarque d'ailleurs entre cette theorie & les obſervations, ne contribue pas peu à confirmer cette concluſion; mais m'étant appliqué depuis longtems avec tout le ſoin poſſible à approfondir les inegalités dans le mouvement de la Lune, j'ai été encore davantage fortifié dans ce ſentiment. Car d'abord ayant ſuppoſé, que les forces tant de la Terre que du Soleil, qui agiſſent ſur la Lune, ſont parfaitement proportionelles réciproquement aux quarrés des diſtances, j'ai trouvé toujours le mouvement de l'apogée presque deux fois plus lent, que les obſervations le marquent; & quoique pluſieurs petits termes, que j'ai été obligé de negliger dans le calcul, puiſſent accelérer le mouvement de l'apogée, j'ai pourtant bien vu aprés pluſieurs recherches, qu'ils ne ſauroient de beaucoup prés ſuppléer à ce deffaut, & qu'il faut abſolument, que les forces, dont la Lune eſt actuellement ſollicitée, ſoient un peu differentes de celles, que j'avois ſuppoſées; car la moindre difference dans les forces ſollicitantes en produit une trés conſiderable dans le mouvement de l'apogée. J'ai remarqué auſſi une petite difference entre le mouvement de la ligne des nœuds, que le calcul donne, & celui que les obſervations ont donné à connoitre, qui vient ſans doute de la même ſource.

XII. Connoiſſant la quantité de la peſanteur à la ſurface de la Terre, j'en ai conclu la force abſolue, qui doit agir ſur la Lune, en ſuppoſant qu'elle décroit en raiſon doublée des diſtances. De

cette

cette force comparée au tems periodique de la Lune, j'ai déduit la distance moienne de la Lune à la Terre, & ensuite sa parallaxe horizontale à cette même distance. Mais cette parallaxe s'est trouvée un peu trop petite, de sorte que la Lune est moins eloignée de nous, que suivant la theorie, & partant la force, dont la Lune est poussée vers la Terre, plus petite, que j'avois supposé. Et cette difference doit être encore plus considerable, parce que je n'avois pas ajouté à la pesanteur naturelle ce qui en vertu de la force centrifuge en est retranché, de sorte que si j'avois fait cette addition nécessaire, la force seroit devenuë encore plus grande, & par conséquent aussi la distance moienne.

XIII. Outre cela, aprés avoir bien separé les inegalités dans le mouvement de la Lune, qui proviennent uniquement de la force de la Terre, des autres qui dépendent aussi de la force du Soleil; ces inegalités devroient etre parfaitement conformes aux régles de Kepler. Mais ayant examiné un grand nombre d'observations, j'ai remarqué, qu'il y faut absolument faire quelque changement, & que les équations, qui dépendent uniquement de l'excentricité & de l'anomalie moienne, ne peuvent etre calculées selon les régles ordinaires. Toutes ces raisons jointes ensemble paroissent donc prouver invinciblement, que les forces centripetes qu'on conçoit dans le Ciel, ne suivent pas exactement la loi établie par Neuton. Quelques recherches que j'ai faites sur le mouvement de Saturne, entant qu'il doit être troublé par la force de Jupiter, m'ont encore davantage confirmé dans ce sentiment; & je ne doute pas, que l'on ne trouvera la même chose, si l'on se donnera la peine d'examiner plus soigneusement le mouvement des autres Planetes.

XIV. La theorie de l'Astronomie est donc encore beaucoup plus eloignée du degré de perfection, auquel on pourroit penser, qu'elle soit déjà portée. Car si les forces, dont le Soleil agit sur les Planetes, & celles-cy les unes sur les autres, étoient exactement en raison renversée des quarrés des distances, elles seroient connuës, & par conséquent la perfection de la theorie dependroit de la solution de ce probléme: *Que les forces, dont une Planéte est sollicitée, étant con-*

connuës, on determine le mouvement de cette Planete. Ce probleme tout difficile qu'il puisse être, appartient neantmoins à la Mecanique pure, & on pourroit esperer, qu'à l'aide de quelques nouvelles découvertes dans l'Analyse, on sauroit enfin parvenir à sa solution. Mais comme la loï même des forces, dont les Planetes sont sollicitées, n'est pas encore parfaitement connuë, ce n'est plus une affaire de l'Analyse seule : & il en faut bien davantage pour travailler à la perfection de l'Astronomie theorique. Et il semble même, qu'il n'y ait d'autre chemin de parvenir à ce but, que de s'imaginer plusieurs nouvelles hypotheses sur la loi des forces, & aprés y avoir appliqué le calcul, de chercher, combien chacune s'ecarte des observations, afin que d'un grand nombre d'erreurs, on puisse enfin conclurre la verité. Mais on conviendra aisément que pour cet effet, il nous manque encore quantité de choses, tant de l'Astronomie pratique que de l'Analyse ; & que sans le secours de plusieurs nouvelles decouvertes de l'une & l'autre science, on ne se puisse point flatter de faire de grands progrés.

XV. Je n'ai encore rien parlé de la résistence, que les Planetes souffrent selon toute apparence, en passant par l'ether. Ce fluide, quelque subtil qu'il puisse être, ne sauroit manquer d'opposer quelque résistence au mouvement des Planetes ; & je crois avoir déjà prouvé assez evidemment l'effet de cette résistence sur le mouvement de la terre. De là il s'ensuit, comme j'ai demontré ailleurs, que les tems periodiques des Planetes sont sujets à une diminution continuelle, & que leurs distances moïennes deviennent insensiblement plus petites. Cette circonstance rend la détermination des tems periodiques extrémement difficile ; puisqu'il n'est plus permis de comparer les observations modernes avec les anciennes, pour en conclurre le tems d'une revolution, sans avoir égard à la diminution même, qui peut avoir été causée dans cet intervalle de tems. Cependant parce que j'ai fait voir, que la position des apsides ne souffre aucun changement de cette résistence, & que l'excentricité n'en est presque point alterée : la recherche des forces, dont je viens de parler, ne sera pas beaucoup arretée de ce coté là. Enfin, quelque loi

que

que ces forces puissent suivre, elle differera si peu de la raison inverse doublée des distances, que dans le calcul on pourra sans faute regarder cette aberration comme infiniment petite, ce qui pourra beaucoup contribuer à vaincre les autres obstacles.

XVI. Les secours, que la Mecanique & l'Analyse doit fournir pour travailler à la recherche du vrai mouvement des Planetes, seront donc d'une autre nature, que si la loi des forces qui agissent sur les Planetes, etoit connue: & on aura besoin de problémes plus généralement conçus. Car, au lieu qu'auparavant on se pouvoit attacher uniquement à la raison inverse doublée des distances, on doit maintenant tacher de résoudre ces mêmes problemes plus généralement, en supposant la loi des forces quelconque. Dans cette vuë j'ai l'honneur de proposer les problemes suivans, où je chercherai de déterminer le mouvement d'une Planete, soit qu'elle soit sollicitée par une seule force dirigée vers un point fixe, ou par plusieurs selon des directions quelconques. Je rapporterai ces mouvemens toujours, comme on est accoutumé de le faire dans l'Astronomie, à un point fixe, comme au centre du Soleil, si la question roule sur une Planete principale, ou s'il s'agit d'un Satellite, au centre de sa Planete principale. Car quoique, ni le Soleil, ni aucune des Planetes ne soit en repos, on sait qu'on les peut toujours regarder dans un tel état, pourvu qu'on transporte, tant le mouvement que les forces, dont ce mouvement est troublé, dans un sens contraire sur les corps, dont on veut rechercher le mouvement. Car on ne demande pas dans l'Astronomie, tant le vrai mouvement des corps celestes, que le mouvement apparent, tel qu'il paroitroit à un spectateur placé dans un certain endroit, soit qu'il soit fixe, ou mobile.

XVII. Pour résoudre ces problemes, je me servirai d'une methode un peu differente de celle dont d'autres se sont servi, qui ont ecrit sur cette matiére. D'abord, on a taché de déterminer la veritable vitesse du corps, dont on cherchoit le mouvement pour chaque moment; & de cette vitesse comparée à l'espace parcouru on a conclu le lieu où il doit paroitre à chaque instant. Pour eviter cette opération assez embarrassante, & comme il n'est jamais question dans l'Aſtronomie de la viteſſe veritable des corps celeſtes, j'ai trouvé moyen de parvenir d'abord à une équation, entre le tems écoulé & le lieu apparent de la Planete, ce qui ne manque pas d'abréger trés conſidérablement cette recherche. Enſuite, comme presque tout ce qu'on deſire là deſſus, roule ſur des angles, je crois que la maniére dont je me ſervirai d'introduire dans le calcul ces angles mêmes, au lieu de leurs ſinus & coſinus, contribuera beaucoup à abréger le calcul, & à en tirer plus aiſément les concluſions, qu'on a uniquement en vuë dans l'Aſtronomie. Enfin, ſuivant ma methode, je ne ſuis pas obligé d'avoir égard à la courbure de la ligne, que le corps décrit, & par ce moyen j'evite quantité de recherches penibles, ſurtout quand le mouvement du corps ne ſe fait point dans le même plan. Ce grand avantage eſt renfermé dans le *Lemme* ſuivant, que je ferai préceder aux problemes, que je me ſuis propoſé de développer dans la ſuite de ce memoire.

LEMME.

Fig. I. XVIII. *Si un Corps en M eſt ſollicité par des forces quelconques, déterminer le changement inſtantané, que ces forces produiſent dans le mouvement du Corps.*

SOLUTION.

Qu'on rapporte le mouvement de ce Corps à un plan quelconque fixe CPQ, auquel on baiſſe du Corps M la perpendiculaire MQ. Et ayant pris à volonté ſur le Plan CPQ une droite CP pour l'axe, qu'on y tire du point Q la perpendiculaire QP; de ſorte qu'à chaque inſtant la poſition du Corps M ſoit determinée par les trois coordonnées orthogonales CP, PQ & PM, qui ſoient nommées:

$$CP = x;\ PQ = y;\ \&\ QM = z.$$

Soit enſuite t le tems, pendant lequel le Corps ſoit parvenu en M depuis un certain commencement fixé; & quelques que ſoyent les forces, qui agiſſent ſur le Corps M, on les pourra toujours réduire à ces trois directions conſtantes Mx, My & Mz. normales entr'elles, & paral-

paralleles reſpectivement aux directions des trois coordonnées CP, PQ & QM. Que ces forces abſolues ou motrices ſoient

$$Mx = X;\ My = Y\ \&\ Mz = Z.$$

& poſant la maſſe du Corps $= M$, ces mêmes forces acceleratrices ſeront :

$$Mx = \frac{X}{M};\ My = \frac{Y}{M}\ \&\ Mz = \frac{Z}{M}.$$

Cela poſé, prenant l'element du tems dt pour conſtant, le changement inſtantané du mouvement du Corps ſera exprimé par ces trois équations :

$$\text{I. } \frac{2ddx}{dt^2} = \frac{X}{M};\ \text{II. } \frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Y}{M};\ \text{III. } \frac{2ddz}{dt^2} = \frac{Z}{M}$$

d'où l'on pourra tirer pour chaque tems écoulé t les valeurs x, y, z, & par conſéquent l'endroit où le Corps ſe trouvera. C. Q. F. T.

COROLL. I.

XIX. La viteſſe du Corps ſuivant la direction Mx ſera $= \frac{dx}{dt}$, ſuivant $My = \frac{dy}{dt}$ & celle ſuivant $Mz = \frac{dz}{dt}$, & cela enſorte que les quarrés de ces formules ſavoir $\frac{dx^2}{dt^2}$; $\frac{dy^2}{dt^2}$; $\frac{dz^2}{dt^2}$ expriment les hauteurs mêmes, qui conviennent à ces viteſſes. Et c'eſt à cauſe de ce rapport, que les formules differentio-differentielles ſont multipliées par le nombre 2.

COROLL. 2.

XX. Si les forces X, Y, Z, qui agiſſent ſur le Corps M, evanouïſſent, on aura ces équations :

$$\text{I. } ddx = 0;\ \text{II. } ddy = 0;\ \&\ \text{III. } ddz = 0.$$

qui étant integrées à cauſe de dt conſtant, donnent

I.

$$\text{I. } \frac{dx}{dt} = a; \; II. \frac{dy}{dt} = b. \; \& \text{ III. } \frac{dz}{dt} = c.$$

& prenant encore les integrales on aura :

$$\text{I. } x = at + \alpha; \; \text{II. } y = bt + \beta; \; \& \text{ III. } z = ct + \gamma.$$

D'où l'on voit que la vitesse de ce Corps sera constante, & que la ligne, suivant laquelle le Corps se meut, sera droite ; tout comme la premiere loi de la Mecanique l'exige.

COROLL. 3.

XXI. Les formules données pour l'acceleration du Corps se rapportent à la direction des forces, que la figure représente, où chaque force tend à accelerer le Corps suivant la direction de la coordonnée, qui y répond. De là il est evident, que si une de ces trois forces agissoit dans un sens contraire, on n'auroit qu'à la traiter dans le calcul comme étant négative.

SCHOLIE.

XXII. Le fondement de ce lemme n'est autre chose que le principe connu de la Mecanique $du = pdt$, où p marque la puissance acceleratrice, & u la vitesse ; car ayant $u = \frac{ds}{dt}$ si ds est l'element de l'espace parcouru, on aura $du = \frac{dds}{dt}$ & partant $\frac{dds}{dt^2} = p$. Mais il faut encore quelques réfléxions pour voir, que ce principe s'étend également à chaque mouvement partial, où l'on réduit en pensée le mouvement réel ; & outre cela, ce lemme renferme en même tems tous les principes, dont on se sert communément pour déterminer les mouvemens curvilignes.

PROBLEME I.

Fig. 2. XXIII. *Un Corps M étant constamment poussé vers un point fixe C avec une force quelconque, déterminer son mouvement.*

SOLU-

SOLUTION.

Comme le mouvement de ce Corps se fera dans un plan, qui passe par le point C, ce plan soit représenté par le plan de la planche, dans lequel on prenne à plaisir une ligne fixe CA pour Axe. Que le Corps ait commencé son mouvement du point A, & aprés un tems écoulé $= t$, il soit parvenu en M, d'où ayant tiré la droite MC & sur CA la perpendiculaire MP, soit: $CP = x$; $PM = y$ & $CM = \sqrt{(xx + yy)} = r$, & que la force acceleratrice, dont le Corps en M est sollicité vers C selon MC, soit nommée $= V$; qui étant décomposée suivant les directions MP, MQ, donnera pour la direction MV parallele à l'axe CA la force $Mx = \frac{x}{r}.V$, & pour la direction MP la force $My = \frac{y}{r}.V$. Donc prenant l'élement du tems dt pour constant, on aura en vertu du Lemme précédent

$$\frac{2ddx}{dt^2} = -\frac{x}{r}.V, \& \frac{2ddy}{dt^2} = -\frac{y}{r}.V.$$

ou bien: $\frac{rddx}{x} = -\frac{1}{2}Vdt^2$ & $\frac{rddy}{y} = -\frac{1}{2}Vdt^2$

Mais les quantités x & y n'étant pas assez propres pour l'usage de l'Astronomie, introduisons en leur place l'angle ACM, qui soit $= \Phi$ & qui marque la distance, où la Planete paroitra depuis un point fixe au ciel A, étant vuë du point C. Ayant donc:
l'angle $ACM = \Phi$, la distance $CM = r$, la force Centripete en $M = V$, & le tems, que le Corps a mis pour décrire l'angle ACM, $= t$, & supposant le sinus total $= 1$, on aura

$$x = r \cos \Phi; \& y = r \sin \Phi.$$

d'où l'on tirera par la differentiation:

$$dx = dr \cos \Phi - rd\Phi \sin \Phi; dy = dr \sin \Phi + rd\Phi \cos \Phi$$

& encore:

$$ddx = ddr \cos\phi - 2dr\,d\phi \sin\phi - r\,dd\phi \sin\phi - r\,d\phi^2 \cos\phi$$

$$ddy = ddr \sin\phi + 2dr\,d\phi \cos\phi + r\,dd\phi \cos\phi - r\,d\phi^2 \sin\phi$$

Ces valeurs étant substituées donneront :

$$\frac{r\,ddx}{x} = ddr - 2dr\,d\phi \,\text{tang}\,\phi - r\,dd\phi \,\text{tang}\,\phi - r\,d\phi^2 = -\tfrac{1}{2} V dt^2$$

$$\frac{r\,ddy}{y} = ddr + 2dr\,d\phi \cot\phi + r\,dd\phi \cot\phi - r\,d\phi^2 = -\tfrac{1}{2} V dt^2$$

Otons l'une de ces équations de l'autre, & nous aurons :

$$(2dr\,d\phi + r\,dd\phi)\,(\text{tang}\,\phi + \cot\phi) = 0$$

ou bien $2dr\,d\phi + r\,dd\phi = 0$

Multiplions la premiere par $\cot\phi$ & la seconde par $\text{tang}\,\phi$, & nous aurons en les ajoutant ensemble :

$$(ddr - r\,d\phi^2)\,(\cot\phi + \text{tang}\,\phi) = -\tfrac{1}{2} V dt^2\,(\cot\phi + \text{tang}\,\phi)$$

ou bien $ddr - r\,d\phi^2 = -\tfrac{1}{2} V dt^2$.

De sorte que n'ayant plus dans le calcul, ni le sinus, ni le cosinus de l'angle ϕ, le mouvement du Corps proposé sera exprimé par les deux équations suivantes :

I. $2dr\,d\phi + r\,dd\phi = 0$

II. $ddr - r\,d\phi^2 = -\tfrac{1}{2} V dt^2$.

dont la premiére étant multipliée par r aura d'abord pour integrale.

$$rr\,d\phi = A\,dt$$

& partant $d\phi = \dfrac{A\,dt}{rr}$, laquelle valeur étant substituée dans l'autre équation donnera :

$$ddr - \frac{AA\,dt^2}{r^3} = -\tfrac{1}{2} V dt^2$$

Celle-cy étant multipliée par $2dr$ & integrée donnera

$$dr^2 + \frac{AA\,dt^2}{rr} = B\,dt^2 - dt^2 \int V dr$$

d'où l'on tirera :

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{(Brr - AA - rr\int V\,dr)}} \text{ \& partant}$$

$$d\varphi = \frac{A\,dr}{r\sqrt{(Brr - AA - rr\int V\,dr)}}.$$

Donc, si la force centrale V depend uniquement de la distance CM $= r$, on pourra pour chaque distance r déterminer tant le tems t que l'angle ACM $= \varphi$; & partant réciproquement on sera en état à chaque tems t d'assigner tant l'angle ACM $= \varphi$, que la distance CM $= r$. Car soit $\int V\,dr = R$, & R sera une fonction de r; & le mouvement du Corps sera exprimé par ces deux équations :

$$\text{I. } dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{(Brr - AA - rrR)}}.\quad \text{II. } d\varphi = \frac{A\,dr.}{r\sqrt{(Brr - AA - rrR)}}$$

C. Q. F. T.

Coroll. 1.

XXIV. L'équation trouvée par la premiere integration $rr\,d\varphi = A\,dt$ montre d'abord la description uniforme des aires autour du point fixe C. Car posant l'aire ACM $= S$, on aura $dS = \frac{1}{2}rr\,d\varphi$, & partant $dS = \frac{1}{2}A\,dt$, d'où l'on tire $S = \frac{1}{2}At$; ce qui donne à connoitre, que l'aire ACM $=$ S & toujours proportionelle au tems t, dans lequel elle est décrite.

Coroll. 2.

XXV. Le Corps sera le plus ou le moins éloigné du point C, où la Planete se trouvera dans son aphelie, ou dans son perihelie, toutes les fois que $\frac{dr}{dt}$ sera $= o$; ce qui arrive quand $Brr - AA - rrR = o$: Donc les racines réelles de cette équation donneront, ou la plus grande, ou la plus petite distance de la Planete au Soleil.

Scholie.

XXVI. Pour avoir une idée précise du tems que la Planete met à parcourir un espace quelconque de son orbite, elle seroit tirée de trop loin, ſi l'on vouloit la comparer avec les mouvemens, qui ſont cauſés par la peſanteur naturelle ſur la ſurface de la terre: car alors on devroit connoître le vrai rapport, que tient la force centrale V à la gravité, & encore la diſtance r en pieds, ce qui ſeroit pour la plûpart impoſſible. On fera donc mieux de comparer les mouvemens des Corps celeſtes avec le mouvement de la Terre autour du Soleil; en ſuppoſant même que la Terre décrive à la diſtance moienne un cercle parfait avec un mouvement uniforme; & alors on n'aura qu'à connoitre les rapports des forces celeſtes à la force, dont la Terre eſt pouſſée au Soleil, & des diſtances à la diſtance moienne de la terre au Soleil. Soit donc la diſtance moïenne de la terre au Soleil $= a$; la force acceleratrice dont la Terre eſt ſollicitée vers le Soleil $= \Pi$, & ſuppoſons que la Terre décrive autour du Soleil un angle $= \omega$ dans le tems t. Dans ce cas nous aurons donc $V = \Pi$; $r = a$; & $\Phi = \omega$; & puisque l'angle ω eſt proportionnel au tems t, le differentiel $d\omega$ ſera pareillement conſtant, & $dd\omega = 0$. Or la ſeconde équation $ddr - rd\Phi^2 = -\frac{1}{2}V dt^2$ ſe changera en cette forme: $-ad\omega^2 = -\frac{1}{2}\Pi dt^2$, d'où nous tirons

$$\frac{1}{2}dt^2 = \frac{ad\omega^2}{\Pi} \;\&\; dt = d\omega \sqrt{\frac{2a}{\Pi}}.$$

C'eſt pourquoi ſi nous mettons $\frac{ad\omega^2}{\Pi}$ à la place de $\frac{1}{2}dt^2$, nous introduirons au lieu du tems t l'angle ω, & par ce moien nous connoitrons, de combien une Planete quelconque avance, pendant que la Terre décrit ſelon ſon mouvement moyen l'angle ω; meſure qui ſemble la plus convenable pour l'uſage de l'Aſtronomie. Pour cet effet, on doit exprimer la diſtance r par la diſtance a, & on n'aura qu'à chercher le rapport de la force V à la force Π, qu'on peut regarder comme connue. Car de quelque maniere que dépendent les forces celeſtes des diſtances, on pourra toujours determiner le rapport entre Π & V, en ſachant le rapport entre les diſtances a & r.

COROLL.

COROLL. 3.

XXVII. Si l'expresſion de la force V eſt une fonction quelconque de la diſtance R, il peut arriver, que l'orbite du corps A M ſoit un cercle ayant ſon centre dans le point C, & le mouvement ſera uniforme. Car poſant la diſtance r conſtante, le raport $\frac{d\Phi}{dt}$ ſera auſſi conſtant, de même que la force V. Et partant la ſeconde équation differentio-differentielle donnera $r\,d\Phi^2 = \frac{1}{2}V\,dt^2 = \frac{aV\,d\omega^2}{\Pi}$: & par conſéquent $\frac{d\Phi}{d\omega} = \sqrt{\frac{aV}{r\Pi}}$.

COROLL. 4.

XXVIII. Dans ce cas donc le mouvement angulaire du Corps M autour de C ſera au mouvement angulaire de la Terre autour du Soleil comme $\sqrt{\frac{V}{r}}$ à $\sqrt{\frac{\Pi}{a}}$. Or dans le mouvemens uniforme, les tems periodiques étant réciproquement comme les mouvement angulaires, le tems periodique du corps M autour du centre C ſera au tems periodique de la Terre autour du Soleil comme $\sqrt{\frac{r}{V}}$ à $\sqrt{\frac{a}{\Pi}}$.

COROLL. 5.

XXIX. Donc, ſi pluſieurs corps ſe meuvent chacun dans un cercle autour d'un point fixe ſitué dans ſon centre, leurs tems periodiques ſeront entr'eux en raiſon compoſée ſousdoublée de la raiſon directe des rayons, & de la raiſon inverſe des forces centrales.

SCHOLIE.

XXX. Comme il n'eſt pas à propos, qu'on exprime le tems t & l'angle Φ par la diſtance r, on doit tacher de chercher la diſtance r exprimée par le tems t, & alors on déterminera l'angle Φ pareillement par le tems t à l'aide de l'équation $d\varphi = \frac{A\,dt}{rr}$. Pour cet effet il conviendra de déveloper le cas, où la force V est exactement en raison inverse du quarré de la distance, ce qui nous fournira des secours pour appliquer le calcul aux cas, où cette loi n'est observée qu'à peu prés.

PROBLEME. 2.

XXXI. *La force, dont le Corps* M *est poussé vers le point fixe C, etant réciproquement proportionelle au quarré de la distance* C M; *déterminer le mouvement de ce corps.*

SOLUTION.

Ayant nommé la distance $CM = r$, la force sera comme $\frac{1}{rr}$; Or la force dont la Terre est poussée vers le Soleil à la distance $= a$, étant posée $= \Pi$, si C etoit le centre du Soleil, & que la force fut réciproquement proportionnelle aux quarrés des distances, on auroit $V = \frac{aa}{rr}\Pi$: mais en cas que la force absolue du point C fut ou plus grande, ou plus petite, que celle du Soleil, nous mettrons:

$$V = \frac{\alpha aa}{rr}\Pi$$

de sorte qu'introduisant au lieu de $\frac{1}{2}dt^2$ le mouvement moïen de la Terre $\frac{a\,d\omega^2}{\Pi}$. nous ayons:

$$\tfrac{1}{2} V dt^2 = \frac{\alpha a^3}{\pi} d\omega^2$$

Par conséquent nommant comme ci-dessus l'angle $ACM = \varphi$, nous aurons ces deux équations:

I. $2\,dr\,d\Phi + r\,dd\Phi = 0$

II.

$$\text{II. } ddr - rd\phi^2 = -\frac{\alpha a^3}{rr} d\omega^2$$

de la premiere desquelles nous tirerons:

$$rrd\phi = \beta aad\omega$$

puisque l'element $d\omega$ est constant: & à cause de $rd\phi^2 = \frac{\beta\beta a^4 d\omega^2}{r^3}$, la seconde équation se changera en

$$ddr - \frac{\beta\beta a^4 d\omega^2}{r^3} + \frac{\alpha a^3 d\omega^2}{rr} = 0$$

qui etant multipliée par $2dr$ aura pour integrale

$$dr^2 + \frac{\beta\beta a^4 d\omega^2}{rr} - \frac{2\alpha a^3 d\omega^2}{r} = \gamma aad\omega^2$$

d'où nous obtiendrons:

$$d\omega = \frac{rdr}{a\sqrt{(\gamma rr + 2\alpha ar - \beta\beta aa)}}$$

Donc afin que le monvement soit réel, il faut que $\gamma rr + 2\alpha ar - \beta\beta aa > 0$ où bien que

$$rr > \frac{-2\alpha}{\gamma} ar + \frac{\beta\beta}{\gamma} aa; \text{ ou } rr = \frac{-2\alpha ar + \beta\beta aa + \gamma ff}{\gamma}$$

par conséquent il y aura:

$$r = \frac{-\alpha a}{\gamma} + \sqrt{\left(\frac{\alpha\alpha aa}{\gamma\gamma} + \frac{\beta\beta aa}{\gamma} + ff\right)}$$

ff marquant une quantité affirmative quelconque. Nous aurons donc ou

$$r > \frac{-\alpha a + a\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta\gamma)}}{\gamma} \text{ ou } r > \frac{-\alpha a - a\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta\gamma)}}{\gamma}$$

de là on voit, que γ doit etre une quantité negative. Posons donc $-\gamma$ au lieu de γ & nous aurons les limites de la distance r:

$$r > \frac{\alpha a - a\sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta\gamma)}}{\gamma} \; \& \; r < \frac{\alpha a + a\sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta\gamma)}}{\gamma}$$

& la

& la distance moienne sera $r = \frac{\alpha a}{\gamma}$. C'est pourquoi supposons $r = \frac{\alpha a}{\gamma} + a s$: & la formule trouvée pour $d\omega$ se changera en

$$d\omega = \left(\frac{\alpha}{\gamma} + s\right) ds : V\left(\frac{\alpha\alpha}{\gamma} - \beta\beta - \gamma s s\right)$$

Puisque $s s < \frac{\alpha\alpha}{\gamma\gamma} - \frac{\beta\beta}{\gamma}$ ou $\frac{\gamma\gamma s s}{\alpha\alpha - \beta\beta\gamma} < 1$; prenant 1 pour le sinus total, nous pourrons égaler $\frac{\gamma s}{\gamma(\alpha\alpha - \beta\beta\gamma)}$ à un sinus ou cosinus d'un certian angle. Soit cet angle $= v$, & posons $s = \frac{V(\alpha\alpha - \beta\beta\gamma)}{\gamma} \operatorname{cos} v$, pour avoir $r = \frac{\alpha a}{\gamma} + a V \frac{(\alpha\alpha - \beta\beta\gamma)}{\gamma} \operatorname{cos} v$ &

$$d\omega = \frac{\alpha\, dv + dv \operatorname{cos} v .\, V(\alpha\alpha - \beta\beta\gamma)}{\gamma V\gamma}.$$

& partant $\omega = \frac{\alpha v + \operatorname{sin} v .\, V(\alpha\alpha - \beta\beta\gamma)}{\gamma V\gamma} + \text{Const.}$

Pour eviter les expressions trop embarrassantes des quantités constantes arbitraires, faisons $\frac{\alpha a}{\gamma} = c$ et $\frac{a V(\alpha\alpha - \beta\beta\gamma)}{\gamma} = c\, k$, pour avoir $r = c(1 + k \operatorname{cos} v)$. & on obtiendra $\omega = \frac{c v + c k \operatorname{sin} v}{a V\gamma}$. Pour rendre cette expression encore plus simple, au lieu de l'angle ω introduisons un autre ζ de sorte que $\zeta = \frac{a V\gamma}{c}\omega$, ou $\omega = \frac{c}{a V\gamma}.\zeta$; ou parceque $\gamma = \frac{\alpha a}{c}$. on aura $\omega = \frac{c V c}{a V\alpha a}.\zeta$ & $\alpha\, d\omega^2 = \frac{c^3\, d\zeta^2}{a^3}$: & l'element $d\zeta$ sera egalement constant; Par conséquent comme les équations differentio-differentielles auront cette forme;

I.

I. $2\,dr\,d\Phi + r\,dd\Phi = 0$

II. $ddr - r\,d\Phi^2 + \frac{r^\circ\,d\zeta^2}{rr} = 0$

les valeurs integrales se trouveront en sorte. Premiérement qu'on cherche un angle v tel que

$$\zeta = v + k \text{ si. } v, \text{ ou } d\zeta = dv\,(1 + k \operatorname{cos} v)$$

& alors on aura $r = c\,(1 + k \operatorname{cos} v)$, & à cause de $\frac{b}{\sqrt{\gamma}} = \frac{c}{a}\sqrt{(1 - kk)}$ on trouvera

$$rr\,d\Phi = cc\,d\zeta\,\sqrt{(1 - kk)} \;\&\; d\Phi = \frac{d\zeta\,\sqrt{(1 - kk)}}{(1 + k \operatorname{cos} v)^2}$$

ou bien $d\Phi = \frac{dv\,\sqrt{(1 - kk)}}{1 + k \operatorname{cos} v}$: lesquelles formules renferment la plus simple maniere de déterminer le mouvement du Corps M ou du point C. C. Q. F. T.

COROLL. 1.

XXXII. Si la lettre k etoit $= 0$, on auroit $d\zeta = dv$; $r = c$, & $d\varphi = dv$; donc dans ce cas le Corps décrira autour du centre C un cercle, & son mouvement sera uniforme.

COROLL. 2.

XXXIII. Or si la lettre k n'est pas $= 0$, la distance CM $= r$ sera variable; & sa plus grande distance proviendra $r = c\,(1 + k)$, & la plus petite $r = c\,(1 - k)$, dont celle là répond à l'angle $v = 0$, & celle cy à l'angle $v = 180°$. Mais la distance moyenne $r = c$ répondra à l'angle $v = 90°$, ou $v = 270°$. Or la lettre k étant proportionnelle à la difference entre la distance moyenne & la plus grande ou plus petite, sera l'excentricité de l'orbite.

COROLL. 3.

XXXIV. L'angle ζ etant proportionnel au tems, puisqu'il devient $= 0$, si $v = 0$, prend son commencement de l'endroit A, où la distance est la plus grande; par consequent cet angle ζ exprimera l'anomalie moïenne de la planete M. Et si l'angle v devient $= 180°$, l'anomalie moïenne ζ sera aussi $= 180$, & alors la distance M C sera la plus petite.

COROLL. 4.

XXXV. Comme l'anomalie moyenne ζ est proportionnelle au tems ecoulé, depuis que la Planete a passé par son aphelie A, l'angle ζ sera connu; & de là on trouvera l'angle v par le moien de cetté équation $\zeta = v + k \, \text{si}\, v$, dont le calcul ne sera pas difficile, si l'on fait se servir des approximations. Or ayant trouvé l'angle v, on aura d'abord la distance $CM = r = c\,(1 + k \cos v)$, ou plutot son rapport à la distance moïenne c.

COROLL. 5.

XXXVI. Or pour trouver l'angle $ACM = \varphi$, que le Corps a actuellement décrit depuis un lieu fixe A, on doit considerer l'équation $d\,\Phi = \frac{dv\,\sqrt{(1-kk)}}{1 + k\cos v}$, dont l'integrale se trouvera $\cos(\varphi - A)$ $= \frac{k + \cos v}{1 + k \cos v}$. D'où il s'ensuit, que si $v = 0$, il y a $\cos(\varphi - A)$ $= 1$ & partant $\varphi = A$. Mais si $v = 180°$, pour le perihelie, on aura $\cos(\varphi - A) = -1$, ou $\varphi = A + 180°$. d'où l'on voit que le perihelie est eloigné de $180°$ de l'aphelie.

SCHOLIE.

XXXVII. Si l'excentricité k est fort petite, il sera plus commode de chercher l'integrale de $\frac{dv\,\sqrt{(1-kk)}}{1 + k\cos v}$ par le moyen des series; en faisant

$\frac{1}{1+k\cos v}$

$$\frac{1}{1+k\cos v}=1-k\cos v+k^2\cos v^2-k^3\cos v^3+k^4\cos v^4-k^5\cos v^5+\&c.$$

Mais pour eviter les puiſſances du coſ v, il ſera convenable pour l'uſage de l'Aſtronomie, de les convertir en coſinus des angles multiples de v ſuivant ces formules.

$$\begin{aligned}
\cos v &= \cos v\\
\cos v^2 &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2v\\
\cos v^3 &= \tfrac{3}{4}\cos v+\tfrac{1}{4}\cos 3v\\
\cos v^4 &= \tfrac{3}{8}+\tfrac{4}{8}\cos 2v+\tfrac{1}{8}\cos 4v\\
\cos v^5 &= \tfrac{10}{16}\cos v+\tfrac{5}{16}\cos 3v+\tfrac{1}{16}\cos 5v\\
\cos v^6 &= \tfrac{10}{32}+\tfrac{15}{32}\cos 2v+\tfrac{6}{32}\cos 4v+\tfrac{1}{32}\cos 6v\\
&\quad\&c.
\end{aligned}$$

& de là on tirera cette équation

$$\begin{array}{llllll}
\dfrac{1}{1+k\cos v}=1 & -k\cos v & +\tfrac{1}{2}k^2\cos 2v & -\tfrac{1}{4}k^3\cos 3v & +\tfrac{1}{8}k^4\cos 4v\\
+\tfrac{1}{2}kk & -\tfrac{3}{4}k^3 & +\tfrac{4}{8}k^4 & -\tfrac{5}{16}k^5 & +\tfrac{6}{32}k^6\\
+\tfrac{3}{8}k^4 & -\tfrac{10}{16}k^5 & +\tfrac{15}{32}k^6 & & \\
+\tfrac{10}{32}k^6 & & \&c. & &
\end{array}$$

Puisque le coëfficient de chaque terme eſt une ſerie infinie, poſons pour abreger

$$\frac{1}{1+k\cos v}=A-B\cos v+C\cos 2v-D\cos 3v+E\cos 4v-\&c.$$

& on verra d'abord que

$$A=1+\tfrac{1}{2}kk+\tfrac{3}{8}k^4+\tfrac{10}{32}k^6+\&c.=\frac{1}{\sqrt{(1-kk)}}.$$

mais pour trouver les autres coëfficients, multiplions de part & d'autre par $1+k\cos v$, & puiſque $\cos v.\cos nv=\tfrac{1}{2}\cos(n-1)v+\tfrac{1}{2}\cos(n+1)v$ nous aurons:

$$
\begin{array}{l}
1 = A - B\cos v + C\cos 2v - D\cos 3v + E\cos 4v - F\cos 5v + \&c. \\
\quad -\tfrac{1}{2}Bk + Ak \quad - \tfrac{1}{2}Bk \quad + \tfrac{1}{2}Ck \quad - \tfrac{1}{2}Dk \quad + \tfrac{1}{2}Ek \\
\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}Ck - \tfrac{1}{2}Dk \quad + \tfrac{1}{2}Ek \quad - \tfrac{1}{2}Fk \quad + \tfrac{1}{2}Gk\ \&c.
\end{array}
$$

& partant il en résultera.

$$B = \frac{2(A-1)}{k};\ C = \frac{2(B-Ak)}{k};\ D = \frac{2C-Bk}{k};\ E = \frac{2D-Ck}{k}$$

Donc posant $\frac{1-V(1-kk)}{k} = f$, on trouvera

$$\frac{V(1-kk)}{1+k\cos v} = 1 - 2f\cos v + 2ff\cos 2v - 2f^3\cos 3v + 2f^4\cos 4v - \&c.$$

& prenant l'integrale $\Phi = \int \frac{dv\,V(1-kk)}{1+k\cos v}$, on aura

$$\Phi = A + v - 2f\,\mathrm{si}\,v + \tfrac{1}{2}ff\,\mathrm{si}\,2v - \tfrac{2}{3}f^3\,\mathrm{si}\,3v + \tfrac{2}{4}f^4\,\mathrm{si}\,4v - \tfrac{2}{5}f^5\,\mathrm{si}\,5v - \&c.$$

ou puisque $v = z - k\,ff\,v$ on aura

$$\Phi = A + z - (2f+k)\,\mathrm{si}\,v + \tfrac{2}{2}ff\,\mathrm{si}\,2v - \tfrac{2}{3}f^3\,\mathrm{si}\,3v - \tfrac{2}{4}f^4\,\mathrm{si}\,4v - \tfrac{2}{5}f^5\,\mathrm{si}\,5v\ \&c.$$

COROLL. 6.

XXXVIII. La premiere partie de cette expresſion $A + z$ repreſente la longitude moyenne de la Planete dans ſon orbite, & elle montreroit ſon vrai lieu, ſi l'excentricité k evanouïſſoit: auquel cas la Planete décriroit un cercle d'un mouvement uniforme. Et puisque l'accroiſſement de la longitude moyenne eſt egal à l'accroiſſement de l'anomalie moyenne, c'eſt un ſigne, que le point A, d'où l'on conte l'anomalie moyenne eſt immobile; & partant auſſi la ligne des abſides.

COROLL. 7.

XXXIX. Les autres termes de l'expresſion trouvée

$$-(2f+k)\,\mathrm{si}\,v + \tfrac{2}{2}ff\,\mathrm{si}\,2v - \tfrac{2}{3}f^3\,\mathrm{si}\,3v + \tfrac{2}{4}f^4\,\mathrm{si}\,4v - \tfrac{2}{5}f^5\,\mathrm{si}\,5v + \&c.$$

comprennent l'inégalité du mouvement, ou la difference entre la longitude moyenne & la longitude vraie; & qu'on nomme dans l'Aſtronomie la *Proſtapbereſe*, ou l'equation elliptique. Cette équation donc conſiſte d'une infinité de parties, dont la prémiére eſt proportionnelle au ſinus de de l'angle v, la feconde au finus du double de cet angle, la troifiéme au finus du triple angle, & ainfi de fuite.

COROLL. 8.

XL. Or pourvûque l'excentricité k ne foit pas trop grande, les coëfficients de ces termes décroiffent fi fubitement, que trois ou quatre termes fuffifent pour la plus grande précifion, qu'on peut fouhaiter dans l'Aftronomie. Et c'eft pour cette raifon, que cette maniere de déterminer la valeur de l'angle φ, quoiqu'elle renferme une ferie infinie, eft preferable à la premiére (§. 36), où l'integration a reusfi parfaitement.

COROLL. 9.

XLI. Pour les valeurs de ces coëfficiens, fi k eft un nombre affez petit, puisque

$$\sqrt{(1-kk)} = 1 - \tfrac{1}{2}k^2 - \frac{1.1}{2.4}k^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6}k^6 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}k^8 - \&c.$$

nous aurons

$$f = \tfrac{1}{2}k + \frac{1.1}{2.4}k^3 + \frac{1.1.3}{2.4.6}k^5 + \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}k^7 + \&c.$$

& partant les coëfficiens feront.

Celui de

$$\begin{array}{l|l}
-\,\mathrm{fi}\,v & 2f + k = 2k + \tfrac{1}{4}k^3 + \frac{1.3}{4.6}k^5 + \frac{1.3.5}{4.6.8}k^7 + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10}k^9 + \&c. \\
+\,\mathrm{fi}\,2v & \tfrac{2}{2}ff = \tfrac{1}{4}k^2 + \frac{1.3}{4.6}k^4 + \frac{1.3.5}{4.6.8}k^6 + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10}k^8 + \&c. \\
-\,\mathrm{fi}\,3v & \tfrac{2}{3}f^3 = \tfrac{1}{12}k^3 + \frac{1.3}{6.8}k^5 + \frac{1.3.5}{4.8.10}k^7 + \frac{1.3.5.7}{4.6.10.12}k^9 + \&c. \\
+\,\mathrm{fi}\,4v & \tfrac{2}{4}f^4 = \frac{1}{32}k^4 + \frac{1}{32}k^6 + \frac{7}{256}k^8
\end{array}$$

COROLL. 10.

XLII. Mais ayant déterminé, ou connu d'ailleurs la valeur de f. on aura $k = \frac{2f}{1 + ff}$, & par là il ſera plus aiſé de déterminer les coëfficiens de la formule

$$\Phi = A + \zeta - (2f + k)\ \text{ſi} + \tfrac{2}{2}\, v f^2\ \text{ſi}\, 2v - \tfrac{2}{3} f^3\ \text{ſi}\, 3v + \tfrac{2}{4} f^4\ \text{ſi}\, 4v + \&c.$$

où la loi de la progresſion ſaute d'abord aux yeux.

COROLL. 11.

XLIII. Toute cette recherche revient donc principalement à l'angle v, qu'on doit déduire de l'anomalie moyenne ζ par le moyen de cette équation: $\zeta = v + k$ ſi v. D'où ayant déjà connu cet angle v à peuprés, on aura plus exactement $v = \zeta - k$ ſi v; qu'on mette alors cette nouvelle valeur de v dans le terme k ſi v, & on trouvera encore une plus exacte pour v; de ſorte qu'on pourra par un calcul aſſez facile déterminer, pour chaque anomalie moyenne ζ, la vraie valeur de l'angle v, que je nomme l'anomalie excentrique.

SCHOLIE.

XLIV. Ayant ainſi découvert la forme la plus commode des quantités integrales, qui déterminent le mouvement d'un corps ſollicité vers un centre en raiſon réciproque des quarrés de ces diſtances; on pourra emploier des formules ſemblables pour déterminer le mouvement, lorsque la force centripete eſt d'une autre nature, pourvu quelle ne differe que fort peu de cette loi: & que l'excentricité de l'orbite ne ſoit pas trop grande; ce qui ſuffit tant pour les Planetes principales que pour les Satellites.

PROBLEME 3.

XLV. *Lorsque la force, dont le Corps* M *eſt pouſſé vers le point* C *conſideré comme fixe, n'eſt qu'à peu prés proportionnelle réciproque-*

ment

ment aux quarrés de ses distances, trouver le mouvement de ce Corps, supposé que son orbite ne differe pas beaucoup d'un cercle.

SOLUTION.

Nommant comme cy-dessus la distance C M $= r$, l'angle A C M $= \Phi$, la force M C $=$ V; la distance moyenne de la Terre au Soleil $= a$, la force dont la Terre est attirée au Soleil dans cette distance $= \Pi$, & l'angle infiniment petit $= d\,\omega$, que la Terre décrit autour du Soleil selon son mouvement moyen; & que nous introduisons au lieu de l'element du tems $d\,t$, en le supposant constant; nous aurons les deux équations suivantes:

$$\text{I. } 2\,dr\,d\Phi + r\,dd\Phi = 0$$

$$\text{II. } ddr - r\,d\Phi^2 + \frac{a\,V}{\Pi}\,d\omega^2 = 0.$$

Maintenant, puisque la force V n'est qu'à peu prés réciproquement proportionnelle au quarré de la distance r, supposons $\frac{a\,V}{\Pi} = \frac{m\,c^3}{rr}$ $+$ R. la lettre R marquant une fonction quelconque de r, dont la loi de l'attraction s'ecarte de la raison réciproque doublée des distances: & la seconde équation deviendra:

$$\text{II. } ddr - r\,d\Phi^2 + \frac{m\,c^3\,d\omega^2}{rr} + R\,d\omega^2 = 0.$$

& l'integrale de la premiere sera:

$$rr\,d\Phi = ncc\,d\omega$$

qui donne $d\Phi = \frac{ncc\,d\omega}{rr}$ & $r\,d\Phi^2 = \frac{nn\,c^4\,\omega^2}{r^3}$; laquelle valeur etant mise dans la seconde équation donnera

$$ddr - \frac{nn\,c^4\,d\omega^2}{r^3} + \frac{m\,c^3\,d\omega^2}{rr} + R\,d\omega^2 = 0.$$

où eliminant la consideration de l'element constant $d\omega$, nous representerons cette équation sous cette forme.

$$d.\frac{dr}{d\omega} - \frac{nnc^4 d\omega}{r^3} + \frac{mc^3 d\omega}{rr} + \mathrm{R}\, d\omega = 0.$$

A préſent pour faire uſage des formules trouvées cy-deſſus poſons

$$d\omega = \alpha\, dv\,(1 + k\cos v)$$

& puisqne r n'aura plus exactement la forme $c\,(1 + k\cos v)$ ſuppoſons:

$$r = c\,(1 + k\cos v + s)$$

où s ſera une quantité fort petite; d'où nous aurons:

$$dr = -\,ck\,dv\sin v + c\,ds \text{ \& partant}$$

$$0 = d.\frac{-kdv\sin v + ds}{dv\,(1+k\cos v)} + \alpha\alpha\, dv\,(1+k\cos v)\left\{\frac{m}{(1+k\cos v+s)^2} - \frac{nn}{(1+k\cos v+s)^3} + \frac{\mathrm{R}}{c}\right\}$$

qui puisque s eſt une quantité fort petite, ſe changera en cette forme:

$$0 = d.\frac{-kdv\sin v + ds}{dv(1+k\cos v)} + \alpha\alpha\, dv\left\{\begin{array}{l} +\dfrac{m}{1+k\cos v} - \dfrac{2ms}{(1+k\cos v)^2} + \dfrac{\mathrm{R}}{c}(1+k\cos v) \\ -\dfrac{nn}{(1+k\cos v)^2} + \dfrac{3nns}{(1+k\cos v)^3} \end{array}\right\}$$

Suppoſons maintenant l'element dv conſtant, & nous aurons en differentiant le premier membre,

$$0 = \frac{dds}{1+k\cos v} + \frac{kdsdv\sin v}{(1+k\cos v)^2} - \frac{kdv^2\cos v - k^2 dv^2}{(1+k\cos v)^2}$$

$$-\frac{2\alpha\alpha msdv^2}{(1+k\cos v)^2} + \frac{3\alpha\alpha nnsdv^2}{(1+k\cos v)^3} + \frac{\alpha\alpha mdv^2}{1+k\cos v} - \frac{\alpha\alpha nndv^2}{(1+k\cos v)^2}$$

$$+\frac{\alpha\alpha \mathrm{R}dv^2}{c}(1 + k\cos v)$$

ou multipliant par $(1+k\cos v)^2$:

$$0 = dds(1+k\cos v) + kdsdv\sin v - 2\alpha\alpha msdv^2 + \frac{3\alpha\alpha nnsdv^2}{1+k\cos v}$$

$$+\frac{\alpha\alpha}{}$$

$$+\frac{\alpha\alpha}{c}R\,dv^2(1+k\cos v)^3$$

$$-k\,dv^2\cos v - k^2\,dv^2 + \alpha\alpha m\,dv^2 + \alpha\alpha m k\,dv^2\cos v - \alpha\alpha nn\,dv^2$$

Maintenant tout revient à la forme que la quantité R peut avoir; où je ferai deux hypotheſes differentes.

I. Hypothese

soit $R = \frac{\mu c^{\nu+1}}{r^\nu}$, de ſorte que la force centrale totale soit

$$V = \frac{\Pi}{a}\left\{\frac{mc^3}{rr}+\frac{\mu c^{\nu+1}}{r^\nu}\right\}$$

& à cauſe de $r = c(1+k\cos v+s)$ nous aurons:

$$R = \frac{\mu c}{(1+k\cos v+s)^\nu}$$

& partant

$$\frac{R}{c}(1+k\cos v)^3 = \frac{\mu}{(1+k\cos v)^{\nu-3}} - \frac{\mu\nu s}{(1+k\cos v)^{\nu-2}} =$$

$$\mu+(3-\nu)\mu k\cos v+\tfrac{1}{2}(3-\nu)(2-\nu)\mu k^2\cos v^2+\tfrac{1}{6}(3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)k^3\cos v^3-\frac{\mu\nu s}{(1+k\cos v)^{\nu-2}}$$

Cette valeur ſubſtituée donnera:

$$o=\frac{dds}{dv^2}(1+k\cos v)+\frac{k\,ds}{dv}\sin v-2\alpha\alpha ms+\frac{3\alpha\alpha nns}{1+k\cos v}-\frac{\alpha\alpha\mu\nu s}{(1+k\cos v)^{\nu-2}}$$

$$-k\cos v-kk+\alpha\alpha m+\alpha\alpha mk\cos v-\alpha\alpha nn$$

$$+\alpha\alpha\mu+(3-\nu)\alpha\alpha\mu k\cos v+\tfrac{1}{2}(3-\nu)(2-\nu)\mu\alpha\alpha k^2\cos v^2+\tfrac{1}{6}(3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)\mu\alpha^2k^3\cos v^3$$

Cette équation devroit evanouïr en cas que $\mu = o$, & $s = o$, c'eſt pourquoi, puisque m eſt une quantité donnée, déterminons les conſtantes α & n enſorte, qu'autant de termes, qui ne contiennent pas s evanouïſſent, qu'il ſe pourra. Pour cet effet réduiſons ces termes de la façon ſuivante:

$$-kk+\alpha\alpha m-\alpha\alpha nn+\alpha\alpha\mu+\tfrac{1}{4}(3-\nu)(2-\nu)\mu\alpha\alpha kk$$

$-k\cos v + \alpha\alpha m k \cos v + (3-\nu)\alpha\alpha\mu k \cos v + \frac{1}{8}(3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)\mu\alpha^2 k^3 \cos v$

$+ \frac{1}{4}(3-\nu)(2-\nu)\mu\alpha\alpha k k \cos 2v$

$+ \frac{1}{24}(3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)\mu\alpha\alpha k^3 \cos 3v$

& faisons evanouïr les deux premieres lignes; ce qui donnera:

$\alpha\alpha n n = \alpha\alpha m - kk + \alpha\alpha\mu + \frac{1}{4}(3-\nu)(2-\nu)\mu\alpha\alpha kk$

$$\& \ \alpha\alpha = \frac{1}{m + (3-\nu)\mu + \frac{1}{8}(3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)\mu kk}$$

par consequent

$nn = m(1-kk) + \mu - \frac{1}{4}(3-\nu)(2+\nu)\mu kk - \frac{1}{8}(3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)\mu k^4$

Ayant trouvé ces valeurs pour α & n, la quantité s sera determinée par cette équation:

$$0 = \frac{dds}{\alpha\alpha dv^2}(1 + k\cos v) + \frac{kds}{\alpha^2 dv}\sin v - 2ms + \frac{3nns}{1+k\cos v} - \frac{\mu\nu s}{(1+k\cos v)^{\nu-2}}$$

$$+ \frac{1}{4}(3-\nu)(2-\nu)\mu kk\cos 2v + \frac{1}{24}(3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)\mu k^3 \cos 3v$$

soit pour cet effet:

$$s = A + B\cos v + C\cos 2v + D\cos 3v$$

$$\frac{ds}{dv} = -B\sin v - 2C\sin 2v - 3D\sin 3v$$

$$\frac{dds}{dv^2} = -B\cos v - 4C\cos 2v - 9D\cos 3v$$

Ces valeurs etant substituées donneront:

$$-\frac{B}{\alpha\alpha}\cos v - \frac{4C}{\alpha\alpha}\cos 2v - \frac{9D}{\alpha\alpha}\cos 3v$$

$$-\frac{Bk}{2\alpha\alpha} \quad -\frac{2Ck}{\alpha\alpha} \quad -\frac{Bk}{2\alpha\alpha} \qquad -\frac{2Ck}{\alpha\alpha}$$

$$-\frac{Bk}{2\alpha\alpha} - \frac{Ck}{\alpha\alpha} - \frac{9Dk}{2\alpha\alpha} \quad + \quad \frac{Ck}{\alpha\alpha}$$

$$+\frac{Bk}{2\alpha\alpha} \qquad -2mD$$

$-2mA$

$$\begin{array}{llll}
-2m\mathrm{A} & -2m\mathrm{B} & -\frac{3\mathrm{D}k}{2\alpha\alpha} & +3nn\mathrm{D} \\
+3nn\mathrm{A} & +3nn\mathrm{B} & -2m\mathrm{C} & -\frac{3}{2}nn\mathrm{C}k \\
-\frac{3}{2}nnk\mathrm{B} & -3nnk\mathrm{A} & +3nn\mathrm{C} & -\mu\nu\mathrm{D} \\
-\mu\nu\mathrm{A} & -\frac{3}{2}nnk\mathrm{C} & -\frac{3}{2}nnk\mathrm{B} & \\
 & -\mu\nu\mathrm{B} & -\frac{3}{2}nnk\mathrm{D} & +\frac{1}{24}(3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)\mu k^3 \\
 & & -\mu\nu\mathrm{C} & \\
 & & +\frac{1}{4}(3-\nu)(2-\nu)\mu kk &
\end{array}$$

Pour fatisfaire à ces équations foit:

$\mathrm{A} = \mathfrak{A}k^4$; $\mathrm{B} = \mathfrak{B}k^3$; $\mathrm{C} = \mathfrak{C}kk + \mathfrak{c}k^4$; $\mathrm{D} = \mathfrak{D}k^3$

& nous obtiendrons ces égalités:

$$(3nn - 2m - \mu\nu)\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{B}}{\alpha\alpha} + \tfrac{3}{2}nn\mathfrak{B}$$

$$-\frac{\mathfrak{B}}{\alpha\alpha} - \frac{3\mathfrak{C}}{\alpha\alpha} - 2m\mathfrak{B} + 3nn\mathfrak{B} - \mu\nu\mathfrak{B} - \tfrac{3}{2}nn\mathfrak{C} = 0$$

$$-\frac{4\mathfrak{C}}{\alpha\alpha} + (3nn - 2m - \mu\nu)\mathfrak{C} + \tfrac{1}{4}(3-\nu)(2-\nu)\mu = 0$$

$$-\frac{4\mathfrak{c}}{\alpha\alpha} - \frac{6\mathfrak{D}}{\alpha\alpha} + (3nn - 2m - \mu\nu)\mathfrak{c} - \tfrac{3}{2}nn\mathfrak{D} - \tfrac{3}{2}nn\mathfrak{B} = 0$$

$$\left(3nn - 2m - \mu\nu - \frac{9}{\alpha\alpha}\right)\mathfrak{D} - \frac{\mathfrak{C}}{\alpha\alpha} - \tfrac{3}{2}nn\mathfrak{C} + \tfrac{1}{24}(3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)\mu = 0$$

foit $\frac{1}{\alpha\alpha} = m + (3-\nu)\mu + \frac{1}{8}(3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)\mu kk = \mathrm{M}$

& nous trouverons:

$$\mathfrak{C} = \frac{(3-\nu)(2-\nu)\mu}{4(4\mathrm{M} - 3nn + 2m + \mu\nu)}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{-(3\mathrm{M} + \frac{3}{2}nn)\mathfrak{C}}{\mathrm{M} - 3nn + 2m + \mu\nu}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{(\mathrm{M} + \frac{3}{2}nn)\mathfrak{B}}{3nn - 2m - \mu\nu}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{-(M+\frac{3}{2}nn)\mathfrak{C} + \frac{1}{24}(3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)\mu}{9M-3nn+2m+\mu\nu}$$

$$\mathfrak{c} = \frac{-(6M+\frac{3}{2}nn)\mathfrak{D} - \frac{3}{2}nn\mathfrak{B}}{4M-3nn+2m+\mu\nu}$$

Mais puisque μ eſt une quantité extrememont petite, & k auſſi aſſés petit, il ſuffira dans ces formules de ſe ſervir de ces valeurs: $M = m$; $nn = m$: ce qui donnera

$$\mathfrak{C} = \frac{(3-\nu)(2-\nu)\mu}{12m}$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{3}{2kk}\mathfrak{C} = -\frac{(3-\nu)(2-\nu)\mu}{8kkm}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{5}{2}\mathfrak{B} = -\frac{5(3-\nu)(2-\nu)\mu}{16kkm}$$

$$\mathfrak{D} = -\frac{5}{16}\mathfrak{C} + \frac{1}{192m}(3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)\mu \text{ ou}$$

$$\mathfrak{D} = -\frac{5(2-\nu)(2-\nu)+(3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)\mu}{192m} = -\frac{(4+\nu)(3-\nu)(2-\nu)\mu^3}{192m}$$

$$\mathfrak{c} = -\frac{5}{2}\mathfrak{D} - \frac{1}{2}\mathfrak{B} = \frac{+5(4+\nu)(3-\nu)(2-\nu)\mu}{384m} + \frac{(3-\nu)(2-\nu)\mu}{16kkm}$$

Donc il y aura:

$$A = -\frac{5(3-\nu)(2-\nu)\mu kk}{16m};\ B = -\frac{(3-\nu)(2-\nu)\mu k}{8m};$$

$$C = \frac{7(3-\nu)(2-\nu)\mu kk}{48m} \ \&\ D = -\frac{(4+\nu)(3-\nu)(2-\nu)\mu k^3}{192m}$$

négligeant les termes qui contiennent k^4

ou puisqu'il ſera permis de negliger les termes, qui contiennent meme k^3, nous ſatisferons auſſi en faiſant $A = o, B = o$;

& $C = \frac{(3-\nu)(2-\nu)\mu kk)}{12m}$; de ſorte que nous ayons:

$s =$

$$s = \frac{(3-\nu)(2-\nu)\mu kk}{12m}\,\text{coſ}\,2v, \text{ \&c.}$$

$$r = c\left(1 + k\,\text{coſ}\,v + \frac{(3-\nu)(2-\nu)\mu kk}{12m}\,\text{coſ}\,2v\right)$$

$$d\omega = \alpha\,dv\,(1 + k\,\text{coſ}\,v) \text{ \&}$$

$$d\Phi = \frac{n\alpha\,dv\,(1 + k\,\text{coſ}\,v)}{\left(1 + k\,\text{coſ}\,v + \frac{(3-\nu)(2-\nu)\mu kk}{12m}\,\text{coſ}\,2v\right)^2} \text{ ou bien}$$

$$d\Phi = \frac{n\alpha\,dv}{1 + k\,\text{coſ}\,v} - \frac{\frac{n\alpha}{6m}(3-\nu)(2-\nu)\mu kk\,dv\,\text{coſ}\,2v}{(1 + k\,\text{coſ}\,v)^2}$$

Donc ſuppoſant $\frac{1-\sqrt{(1-kk)}}{k} = f$ nous aurons

$$\Phi = C + \frac{n\alpha}{\sqrt{(1-kk)}}\left(v - 2f\,\text{ſi}\,v + \tfrac{2}{2}ff\,\text{ſi}\,2v - \tfrac{2}{3}f^3\,\text{ſi}\,3v + \text{\&c.}\right)$$
$$- \frac{n\alpha}{12m}(3-\nu)(2-\nu)\mu kk\,\text{ſi}\,2v$$

Or puiſque $\omega = \alpha v + \alpha k\,\text{ſi}\,v$, nous aurons

$$\Phi = C + \frac{n\omega}{\sqrt{(1-kk)}} - \frac{n\alpha}{\sqrt{(1-kk)}}(2f + k)\,\text{ſi}\,v + \frac{n\alpha ff}{\sqrt{(1-kk)}}k^2\,\text{ſi}\,2v - \text{\&}$$
$$- \frac{n\alpha}{12m}(3-\nu)(2-\nu)\mu kk\,\text{ſi}\,2v.$$

donc negligeant les termes, qui renferment les inegalités du mouvement; le mouvement moyen de ce corps ſera $= \frac{n\omega}{\sqrt{(1-kk)}}$; & le mouvement de l'anomalie moyenne $= \frac{\omega}{\alpha}$: donc le mouvement moyen ſera au mouvement moyen de l'anomalie, comme

$\frac{\alpha n}{\sqrt{(1-kk)}}$ à 1: & par consequent le mouvement de la ligne des absides sera au mouvement moyen comme $1-\frac{\sqrt{(1-kk)}}{\alpha n}$ à 1: ou pendant une revolution entiere du corps M autour de C, la ligne des absides avancera d'un angle $=(1-\frac{\sqrt{(1-kk)}}{\alpha n})\,360^\circ$. Or des valeurs trouvées cy-dessus nous aurons

$$\frac{1-kk}{\alpha\alpha nn}=\frac{m(1-kk)+(3-\nu)\,\mu\,(1-kk)+\frac{1}{6}(3-\nu)\,(2-\nu)\,(1-\nu)\,\mu kk}{m(1-kk)+\mu-\frac{1}{4}(3-\nu)\,(2+\nu)\,\mu kk}$$

ou divisant par approximation:

$\frac{1-kk}{\alpha\alpha nn}=1-\frac{\mu(\nu-2)}{m}$ assés prés & $\frac{\sqrt{(1-kk)}}{\alpha n}=1-\frac{\mu(\nu-2)}{2m}$

& partant dans une révolution la ligne des absides avancera d'un angle $=\frac{\mu(\nu-2)}{m}\,180^\circ$.

L'inegalité du mouvement, ou l'équation à ajouter à la longitude moyenne sera

$$-(1+\frac{\mu(\nu-2)}{2m})(2f+k)\,\mathrm{si}\,v+(1+\frac{\mu(\nu-2)}{2m})ff\,\mathrm{si}\,2v-\tfrac{2}{3}f^3\,\mathrm{si}\,3v+\&c.$$
$$-\frac{(3-\nu)\,(2-\nu)\,\mu kk}{12m}\,\mathrm{si}\,2v$$

d'où l'on voit, combien ce mouvement s'ecarte de celui qui a été determiné dans la propos. precedente.

II. Hypothese

Soit $\frac{aV}{\Pi}=\frac{mc^{3+\mu}}{r^{2+\mu}}$, òu μ marque une fraction extremement

petite:

petite: & partant on aura

$$\frac{a\,V}{\Pi} = \frac{mc^3}{r^2}\left(\frac{c}{r}\right)^{\mu} = \frac{mc^3}{r^2}\left(1 + \mu\, l\frac{c}{r} + \tfrac{1}{2}\mu\mu\left(l\frac{c}{r}\right)^2 + \&c.\right)$$

& par conféquent

$$R = \frac{m\mu c^3}{rr}\, l\,\frac{c}{r} + \frac{m\mu\mu c^3}{2rr}\left(l\frac{c}{r}\right)^2 + \&c.$$

ou bien

$$R = -\frac{\mu m c}{(1+k\,\mathrm{cof}\,v+s)^2}\left(l(1+k\,\mathrm{cof}\,v+s)\tfrac{1}{2}\mu\left(l(1+k\,\mathrm{cof}\,v+s)\right)^2+\&c\right)$$

mais puisque μ & k font des quautités fort petites on pourra fuppofer $l\,(1 + k\,\mathrm{cof}\,v + s) = k\,\mathrm{cof}\,v + s$ & partant

$$R = -\frac{\mu m c k\,\mathrm{cof}\,v - \mu m c s}{(1+k\,\mathrm{cof}\,v+s)^2} = -\frac{\mu m c k\,\mathrm{cof}\,v - \mu m c s}{(1+k\,\mathrm{cof}\,v)^2} + \frac{2\mu m c k s\,\mathrm{cof}\,v}{(1+k\,\mathrm{cof}\,k)^3}$$

ou $\dfrac{R\,(1+k\,\mathrm{cof}\,v)^3}{c} = -\mu m k\,\mathrm{cof}\,v - \mu m k k\,\mathrm{cof}\,v^2 - \mu m s + \mu m k s\,\mathrm{cof}\,v$

& l'equation trouvée fe changera en cette forme.

$$\begin{aligned} o = {} & \frac{dds}{dv^2}(1+k\,\mathrm{cof}\,v) + \frac{kds}{dv}\,\mathrm{fi}\,v - 2\alpha\alpha m s + \frac{3\alpha\alpha n^2 s}{1+k\,\mathrm{cof}\,v} \\ & \qquad\qquad - \alpha\alpha\mu m s + \alpha\alpha\mu m k s\,\mathrm{cof}\,v \\ & - kk + \alpha\alpha m - \alpha\alpha n n - \tfrac{1}{2}\alpha\alpha\mu m k k \\ & - k\,\mathrm{cof}\,v + \alpha\alpha m k\,\mathrm{cof}\,v - \alpha\alpha\mu m k\,\mathrm{cof}\,v \\ & - \tfrac{1}{2}\alpha\alpha\mu m k k\,\mathrm{cof}\,2v \end{aligned}$$

où nous ferons:

$\alpha\alpha n n = \alpha\alpha m - kk - \frac{1}{2}\alpha\alpha\mu m k k$ &

$$\frac{1}{\alpha\alpha} = m - \mu m$$

donc $n n = m(1 - kk) + \mu m k k - \frac{1}{2}\mu m k k$

& l'equation fuperieure en negligeant les termes trop petits deviendra etant divifée par $\alpha\alpha$:

$m\,(1-\mu)$

$$m(1-\mu)\frac{dds}{dv^2} + ms - \mu ms - \tfrac{1}{2}\mu mkk \operatorname{cof} 2v = 0$$

Donc posant $s = Akk \operatorname{cof} 2v$ on aura

$$-4A(1-\mu) + A(1-\mu) - \tfrac{1}{2}\mu = 0$$

ou $A = -\frac{\mu}{3(1-\mu)}$ & partant

$$s = -\frac{\mu kk}{3(1-\mu)} \operatorname{cof} 2v$$

$$r = c\left(1 + k \operatorname{cof} v - \frac{\mu kk}{3(1-\mu)} \operatorname{cof} 2v\right)$$

$$\omega = \alpha v + \alpha k \operatorname{fi} v$$

$$d\Phi = \frac{n\alpha dv(1 + k \operatorname{cof} v)}{\left(1 + k \operatorname{cof} v - \frac{\mu kk}{3(1-\mu)} \operatorname{cof} 2v\right)^2}$$

ou $d\Phi = \frac{n\alpha dv}{1 + k \operatorname{cof} v} + \frac{2n\alpha\mu kk}{3(1-\mu)} dv \operatorname{cof} 2v$ & en integrant

posant $f = \frac{1 - \sqrt{(1-kk)}}{k}$

$$\Phi = C + \frac{n\alpha}{\sqrt{(1-kk)}}(v - 2f \operatorname{fi} v + ff \operatorname{fi} 2v - \&c.) + \frac{n\alpha\mu kk \operatorname{fi} 2v}{3(1-\mu)} \text{ ou}$$

$$\Phi = C + \frac{n\omega}{\sqrt{(1-kk)}} - \frac{n\alpha}{\sqrt{(1-kk)}}(2f+k)\operatorname{fi} v + \frac{n\alpha ff}{\sqrt{(1-kk)}} \operatorname{fi} 2v + \frac{n\alpha\mu kk}{3(1-\mu)} \operatorname{fi} 2v$$

Donc le mouvement moyen est au mouvement de l'anomalie moyenne comme $\frac{n\alpha}{\sqrt{(1-kk)}}$ à 1, & le mouvement de la ligne des

absides

abſides étant au mouvement moyen comme $1 - \frac{V(1-kk)}{\alpha n}$ à 1. puisque

$$\frac{1-kk}{\alpha\alpha nn} = \frac{1-kk-\mu+\mu kk}{1-kk+\frac{1}{2}\mu kk} = 1 - \mu$$

cette raiſon ſera comme $\frac{1}{2}\mu$ à 1, & par conſéquent pendant une révolution entiére la ligne des abſides avancera d'un angle $= \mu . 180°$. Et l'inegalité du mouvement, ou la proſtapherese ſera

$$-(1+\tfrac{1}{2}\mu)(2f+k)\,\mathrm{fi}\,v + (1+\tfrac{1}{2}\mu)\,ff\,\mathrm{fi}\,2v - \tfrac{2}{3}f^3\,\mathrm{fi}\,3v \;\&\; + \frac{\mu(1+\frac{1}{2}\mu)}{3(1-\mu)}\,kk\,\mathrm{fi}\,2v$$

de ſorte que dans l'une ou l'autre hypotheſe on eſt en etat de connoitre le mouvement aſſés exactement. C. Q. F. T.

AUTRE SOLUTION.

Aprés être parvenu a cette équation :

$$d.\frac{dr}{d\omega} - \frac{nnc^4\,d\omega}{r^3} + \frac{mc^3\,d\omega}{rr} + R\,d\omega = 0$$

ayant déja trouvé $d\Phi = \frac{ncc\,d\omega}{rr}$, au lieu de ſuppoſer $d\omega = \alpha dv\,(1 + \mathrm{coſ}\,v)$, mettons pour rendre les expresſions de $d\omega$ & de r plus ſemblables :

$$d\omega = \alpha dv\,(1 + k\,\mathrm{coſ}\,v + s)$$

$$\&\; r = c\,(1 + k\,\mathrm{coſ}\,v + s)$$

ou $d\omega = \frac{\alpha r dv}{c}$; ce qui donne $\frac{dr}{d\omega} = \frac{cdr}{\alpha r dv}$, & ſuppoſant dv conſtant, $d.\frac{dr}{d\omega} = \frac{crddr - cdr^2}{\alpha rrdv}$, & les équations trouvées ſe changeront en :

$$d\Phi = \frac{\alpha ncdv}{r} = \frac{\alpha ndv}{1 + k\,\mathrm{coſ}\,v + s}$$

 crddr

$$\frac{crddr - cdr^2}{\alpha rrdv} - \frac{\alpha nnc^3 dv}{rr} + \frac{\alpha mc^2 dv}{r} + \frac{\alpha Rrdv}{c} = 0$$

ou $\frac{rddr - dr^2}{\alpha^2 dv^2} - nnc^2 + mcr + \frac{Rr^3}{cc} = 0$

Or ayant posé $r = c\,(1 + k \operatorname{cof} v + s)$ nous aurons :

$$dr = c\,(ds - kdv \operatorname{fi} v)$$

$$\&\ ddr = c\,(dds - kdv^2 \operatorname{cof} v)$$

Donc :

$rddr - dr^2 = cc\,(dds + kdds \operatorname{cof} v + sdds - ds^2 + 2kdsdv \operatorname{fi} v - kdv^2 \operatorname{cof} v - ksdv^2 \operatorname{cof} v - k^2 dv^2)$

& faisant la substitution on aura :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dds}{\alpha^2 dv^2} + \frac{kdds \operatorname{cof} v}{\alpha^2 dv^2} + \frac{sdds}{\alpha^2 dv^2} - \frac{ds^2}{\alpha^2 dv^2} + \frac{2kds \operatorname{fi} v}{\alpha^2 dv} - \frac{ks \operatorname{cof} v}{\alpha} + ms \\ \quad - \frac{kk}{\alpha\alpha} - nn + m + \frac{R}{c}(1 + k \operatorname{cof} v + s)^3 \\ \quad - \frac{k \operatorname{cof} v}{\alpha\alpha} + mk \operatorname{cof} v. \end{array}\right\} = 0.$$

Puisque R & s font par l'hypothese des quantités fort petites, quelque forme qu'ait la lettre R, on parviendra toujours à une telle expresfion

$$\frac{R}{c}(1 + k \operatorname{cof} v + s)^3 = A + Bc^1 \operatorname{cof} v + Cc^2 \operatorname{cof} 2v + Dc^3 \operatorname{cof} 3v .. + S$$

où S marque une fonction quelconque de s.

Faisons donc :

$$nn = m - \frac{kk}{\alpha\alpha} + A \ \&\ \frac{1}{\alpha\alpha} = m + B$$

ce qui donne $nn = m\,(1 - kk) + A - Bkk$

& l'equation qui refte à réfoudre fera :

$$0 = \frac{(m+B)dds(1 + k \operatorname{cof} v + s)}{dv^2} - \frac{(m+B)ds^2}{dv^2} + \frac{2(m+B)kds \operatorname{fi} v}{dv^2}$$

$$- mks \operatorname{cof} v - Bks \operatorname{cof} v + ms + (k^2 \operatorname{cof} 2v + Dk^3 v \operatorname{cof} \ldots + S)$$

de laquelle il ne fera pas difficile de trouver la valeur de S à peu prés, parceque tant s que k & S font des quantités fort petites.

Or

Or si S est donné par l'angle v, on parviendra toujours à une telle forme :

$$S = Mk^2 \cos 2v + Nk^3 \cos 3v \ \&c.$$

& partant nous aurons :

$$r = c\,(1 + k\cos v + Mk^2\cos 2v + Nk^3\cos 3v + \&c.)$$

$$\& \ d\omega = \alpha\, dv\,(1 + k\cos v + Mk^2\cos 2v + Nk^3\cos 3v + \&c.)$$

$$\text{donc } \omega = \alpha\,(v + k\sin v + \tfrac{1}{2}Mk^2\sin 2v + \tfrac{1}{3}Nk^3\sin 3v + \&c.)$$

où $\frac{\omega}{\alpha}$ marque l'anomalie moienne de la Planete M : qui etant nommée $= u$ on aura

$$u = \frac{\omega}{\alpha} = v + k\sin v + \tfrac{1}{2}Mk^2\sin 2v + \tfrac{1}{3}Nk^3\sin 3v + \&c.$$

Donc l'anomalie moienne u sera $= o$, où la Planete se trouvera à sa plus haute absîde, toutes les fois, que $v = o$, ou $360°$, ou $2.\,360°$ &c.

Depuis ayant $d\Phi = \dfrac{\alpha n\, dv}{1 + k\cos v + Mk^2\cos 2v + Nk^3\cos 3v \ \&c.}$

on en trouvera

$$\begin{aligned} d\Phi = \alpha n\, dv\,(1 - k\cos v + \tfrac{1}{2}\ & kk && - \tfrac{3}{4}\ k^3\cos v \\ + \tfrac{1}{2}\ & kk\cos 2v && - \tfrac{1}{4}\ k^3\cos 3v \\ -\ & Mkk\cos 2v && + Mk^3\cos v \quad \&c. \\ & && + Mk^3\cos 3v \\ & && - Nk^3\cos 3v \end{aligned}$$

& à peu prés

$$d\Phi = \alpha n dv\,\Big(\frac{1}{\sqrt{(1-kk)}} - k\cos v\,(1 + \tfrac{3}{4}k^2 - Mk^2) + kk\cos 2v\,(\tfrac{1}{2} - M)\Big)$$

Le mouvement moien sera donc $= \dfrac{\alpha n}{\sqrt{(1 - kk)}}\, v = \dfrac{n\omega}{\sqrt{(1 - kk)}}$

& le mouvement moien de cette Planete sera au mouvement de son anomalie comme $\dfrac{\alpha n}{\sqrt{(1 - kk)}}$ à 1, & le mouvement moyen sera au

 mouve-

mouvement de la ligne des abſides comme $\frac{\alpha n}{\sqrt{(1 - kk)}}$ à $\frac{\alpha n}{\sqrt{(1 - kk)}}$ --- 1, ou comme 1 à 1 ---- $\frac{\sqrt{(1 - kk)}}{\alpha n}$.
Mais $\frac{1}{\alpha\alpha nn} = \frac{m + B}{m(1-kk) + A - Bkk}$ & $\frac{1-kk}{\alpha\alpha nn} = \frac{m(1-kk) + B - Bkk}{m(1-kk) + A - Bkk}$ $= 1 + \frac{B - A}{m(1 - kk)}$, donc $\frac{\sqrt{(1 - kk)}}{\alpha n} = 1 - \frac{\frac{1}{2}(A - B)}{m(1 - kk)}$:
Par conſéquent le mouvement de la ligne des abſides ſera au mouvement moien comme $\frac{A - B}{2m(1 - kk)}$ à 1, & pendant une révolution entiere la ligne des abſides avancera d'un angle $= \frac{A - B}{m(1 - kk)} \cdot 180°$, cequi revient à la ſolution precedente. L'inegalité du mouvement ſe déterminera auſſi comme auparavant; mais la premiere ſolution a cet avantage ſur celle-cy, que l'angle v eſt plus aiſement trouvé par l'anomalie moienne u. C. Q. F. T.

Coroll. I.

XLVI. On voit par là que ſi $v = 3$ ou $V = \frac{\Pi}{a}\left(\frac{mc^3}{rr} + \frac{\mu c^4}{r^3}\right)$ on aura $\alpha\alpha = \frac{1}{m}$ & $nn = m(1 - kk) + \mu$, & $s = o$. Deſorte que $r = c(1 + k\operatorname{coſ} v)$; $d\omega = \frac{1}{\sqrt{m}} dv(1 + k\operatorname{coſ} v)$; $d\Phi = \frac{n\,d\omega}{(1 + k\operatorname{coſ} v)^2} = \frac{dk}{1 + k\operatorname{coſ} v}\sqrt{\left(1 - kk + \frac{\mu}{m}\right)}$. Dans ce cas donc le Corps ſe mouvra dans une ellipſe ſuivant les regles de Kepler, mais la ligne des abſides ne demeurera pas en repos.

Coroll.

COROLL. 2.

XLVII. Pour trouver le mouvement des abſides, on n'a qu'à conſiderer le mouvement moien de l'anomalie, qui ſera $= \omega \surd m$ puisque $\omega \surd m = v + k \operatorname{ſi} v$, Et le mouvement vrai etant $\varphi = v \surd \left(1 + \frac{\mu}{m(1 - kk)}\right) +$ &c. le mouvement moien ſera à celui de l'anomalie comme $\surd \left(1 + \frac{\mu}{m(1 - kk)}\right)$ à 1, & partant le mouvement moyen au mouvement des abſides, comme $\surd \left(1 + \frac{\mu}{m(1 - kk)}\right) - 1$ à 1, ou comme 1 à $\frac{1}{\surd \left(1 + \frac{\mu}{m(1 - kk)}\right) - 1}$, de ſorte que pendant une révolution la ligne des abſides avance d'un angle de $\frac{360}{\surd\left(1 + \frac{\mu}{m(1 + kk)}\right) - 1}$ degrés.

SCHOLIE 2.

XLVIII. Il feroit trop long de développer tout ce que les formules trouvées renferment ; & je me contente d'avoir montré le chemin pour parvenir à des formules, qui conduiſent à une telle connoiſſance du mouvement, qu'on deſire dans l'Aſtronomie. Car quoiqu'on puiſſe d'abord integrer l'équation : $ddr - \frac{nnc^4 d\omega^2}{r^3} + \frac{mc^3 d\omega^2}{rr} + R d\omega^2 = o$, en la multiplicant par dr; ſon integrale n'apportera presque aucun uſage au profit de l'Aſtronomie, vu que ce n'eſt pas la diſtance r qu'on peut regarder comme connue ; mais on doit plutot déterminer cette diſtance par l'angle ω, qui eſt proportionnel au mouvement moien. Pour cet effet la maniere d'approximer, dont je me suis servi, est bien préferable à la methode directe ; puisqu'elle nous met en état de déterminer tant la distance r, que l'angle φ par le seul angle ω, qui est connu. Et comme cela se fait par le moyen de l'anomalie excentrique v, on en pourra aisément construire des Tables telles, qu'on est dejà accoutumé d'avoir dans l'Astronomie; & qui donnent à connoitre le mouvement des Planetes aussi aisément, qu'on peut souhaiter.

Scholie 2.

XLIX. Aprés avoir déterminé les quantités constantes α & n, ensorte que les plus grands termes de l'équation se détruisent d'eux mêmes, & qu'il n'y reste que des termes extrémement petits, qui résultent de R, de sorte qu'il sera permis de negliger les puissances de la lettre inconnue s, comme aussi les termes, qui renferment des puissances de l'excentricité k; il ne sera plus difficile d'en découvrir la veritable valeur de cette lettre s. On se pourra servir ou de la methode indirecte, dont je me suis servi pour approcher à cette valeur, ou l'on pourra aussi employer avec succés la methode directe. L'equation à laquelle on parvient aura toujours cette forme:

$$o = \frac{dds}{dv^2}(1 + k\cos v) + \frac{kds}{dv^2}\sin v + \frac{s(1-2k\cos v-3kk)}{1+k\cos v} \cdot P$$

où P marque les termes connus, qui ne renferment pas la lettre s, puisque nous avons à peu pres $\alpha^2 m = 1$ & $\alpha^2 nn = 1 - kk$.

Supposons $s = \dfrac{t\sin v}{1+k\cos v}$ & nous aurons

$$ds = \frac{dt\sin v}{1+k\cos v} + \frac{t\,dv(\cos v + k)}{(1+k\cos v)^2}$$

$$dds = \frac{1+k\cos v}{ddt\sin v} + \frac{2dt\,dv(\cos v+k)}{(1+k\cos v)^2} - \frac{t\,dv^2\sin v(1-k\cos v-2kk)}{(1+k\cos v)^3}$$

Ces valeurs étant substituées, nous obtiendrons:

$ddt\sin v +$

$$ddt\,\text{si}\,v + \frac{dt(3k + 2\cos v - k\cos v^2)}{1 + k\cos v}\,dv = P\,dv^2$$

Multiplions par $\dfrac{\text{si}\,v}{(1 + k\cos v)^3}$ & l'integrale sera

$$\frac{dt\,\text{si}\,v^2}{(1 + k\cos v)^3} = dv\int\frac{P\,dv\,\text{si}\,v}{(1 + k\cos v)^3}\ \&\ dt = \frac{dv(1 + k\cos v)^3}{\text{si}\,v^2}\int\frac{P\,dv\,\text{si}\,v}{(1 + k\cos v)^3}$$

Delà on aura donc

$$t = \int\frac{dv(1 + k\cos v)^3}{\text{si}\,v^2}\int\frac{P\,dv\,\text{si}\,v}{(1 + k\cos v)^3}$$

& par conséquent $s = \dfrac{t\,\text{si}\,v}{1 + k\cos v}$

Desorte que la valeur de la lettre s se pourra exactement déterminer par l'anomalie excentrique v, qui est connue. Mais ayant montré ces artifices, je m'en vais donner tout court les solutions des problemes suivans, en me contentant de les reduire à des équations, qui semblent etre les plus propres pour l'Astronomie.

Scholie 3.

L. Puisque dans cette operation la valeur de s se trouve par une double integration, & que par conséquent il y entre deux quantités constantes arbitraires, il faut avertir comment ces quantités constantes doivent etre déterminées. Or ayant posé $r = c\,(1 + k\cos v + s)$ il est d'abord clair que l'expression trouvée pour s ne doit renfermer aucune quantité absolument constante, parcequ' elle augmenteroit ou diminueroit la distance moyenne c, qui est deja supposée connue: & par cette consideration on déterminera une des deux dites quantités constantes. En second lieu, il est clair que l'expression de s ne doit renfermer aucun terme de cette forme $b\cos v$, puisqu'un tel est deja supposé être compris dans $k\cos v$, où k marque l'excentricité de l'orbite, qu'on regarde comme connue: & par là on déterminera aussi l'autre constante arbitraire. Donc si aprés les deux integrations on trouve une telle expression pour $s = A + B\cos v$

$+ C$

$+ C \cos 2v + D \cos 3v +$ &c. on doit prendre telles valeurs pour les deux quantités constantes mentionnées, que les deux lettres A & B deviennent evanouïssantes: & cette même regle se doit observer dans les integrations, qu'on fera dans les problemes suivants. On voit aussi, que dans la seconde integration, qui donne s, on n'y doit pas ajouter de constante: ou que s ne doit pas renfermer de terme purement constant: car dans ce cas l'expression, qui résulteroit pour s, contiendroit un terme de cette forme $g \sin v$, qui marqueroit que l'angle v ne fut pas pris depuis l'aphelie: & cette condition doit étre remplie préferablement à la seconde; de sorte que celle-cy jointe à la premiére servira à déterminer les deux constantes.

Pour faire mieux sentir la préference de cette seconde condition sur la premiere, on n'a qu'à considerer, que l'excentricité k se détermine deja par l'equation $d\omega = \alpha\, dv\, (1 + k \cos v)$, qui exprime le rapport du mouvement de la Planete au mouvement moyen de la Terre: & partant il pourra bien arriver que dans l'expression de la distance $r = c\,(1 + C \cos v +$ &c.$)$ le coëfficient du terme $\cos v$ ne soit pas precisement égal à l'excentricité k, de sorte que l'expression integrale

$$s = A + B \cos v + C \cos 2v + D \cos 3v + \&c.$$

pourroit bien subsister, quand même il n'y auroit $B = o$, pourvu que $A = o$. Mais on voit bien, que s'il y entroit dans cette expression un terme, comme $H \sin v$, les deux termes par exemple $G \cos v + H \sin v$ seroient equivalens à un tel $L \cos (v + \delta)$, qui ne marqueroit autre chose que ce que l'anomalie v ne seroit pas contée depuis l'aphelie même, & cette difference ne changeroit rien dans le calcul. Pourvu donc qu'on ait egard à ces circonstances, on ne sera plus embarassé au sujet des quantités constantes, que la double integration entraine dans le calcul.

PROBLEME 4.

LI. *Un corps etant sollicité par des forces quelconques, dont les directions se trouvent pourtant toujours dans le même plan, où le corps se meut; déterminer le mouvement du corps.*

SOLUTION.

SOLUTION.

Puisque nous supposons, que les directions des forces sollicitantes se trouvent toujours dans le même plan, on voit d'abord, que pourvu que le corps ait une fois commencé son mouvement dans ce plan, il ne s'en écartera jamais. Que le plan de la Planche represente donc ce plan, où se fait le mouvement du corps par la ligne courbe A M: & qu'on rapporte ce mouvement au point fixe C, vers lequel soit dirigée constamment la force principale de celles qui agissent sur le corps; comme s'il s'agit d'une Planete principale, C sera le centre du Soleil; mais si la question roule sur quelque Satellite, on placera ce point C dans le centre de sa principale. Cela remarqué, supposons que le corps, aprés un tems $= t$, soit parvenu en M, & rapportons son lieu à la direction fixe C, nommant l'angle A C M $= \phi$, & la distance C M $= r$. Maintenant, de quelques forces que le corps en M soit sollicité, elles se reduiront toujours à deux, dont l'une agisse selon la direction M C, & l'autre selon la direction M Q perpendiculaire à M C: soit Fig. 3.

la force qui agit selon M C $=$ P

la force qui agit selon M Q $=$ Q

De plus, du point M tirons M P perpendiculaire & M V parallele à C A: & nommons les coordonnées

$$CP = x \quad \& \quad PM = y.$$

& nous aurons $x = r \cos \phi$ & $y = r \sin \phi$: suivant ces memes directions decomposons les deux forces P & Q & la force M C $=$ P donnera

suivant la direction M V une force $= P \cos \phi$

suivant la direction M P une force $= P \sin \phi$

De même la force M Q $=$ Q donnera

suivant la direction M v une force $= Q \sin \phi$

suivant la direction M P une force $= Q \cos \phi$

& partant le corps en M sera poussé de deux forces

suivant les directions constantes M V & M P; qui soient representées par les lignes M x & M y, & nous aurons la force M $x = $ P cos Φ — Q si Φ

la force M $y = $ P si Φ + Q cos Φ.

d'où le *lemme* proposé cy-dessus nous fournira ces deux équations :

$$\frac{2\,ddx}{dt^2} = -\,P \cos\Phi + Q \sin\Phi$$

$$\frac{2\,ddy}{dt^2} = -\,P \sin\Phi - Q \cos\Phi$$

d'où nous tirerons :

$$P = -\frac{2}{dt^2}\,(ddx \cos\Phi + ddy \sin\Phi) \;\&$$

$$Q = \frac{2}{dt^2}\,(ddx \sin\Phi - ddy \cos\Phi)$$

Or puisque $x = r \cos\Phi$ & $y = r \sin\Phi$, nous aurons
$dx = dr \cos\Phi - r\,d\Phi \sin\Phi$ & $dy = dr \sin\Phi + r\,d\Phi \cos\Phi$
& de là $ddx = ddr \cos\Phi - 2\,dr\,d\Phi \sin\Phi - r\,dd\Phi \sin\Phi - r\,d\Phi^2 \cos\Phi$
$ddy = ddr \sin\Phi + 2\,dr\,d\Phi \cos\Phi + r\,dd\Phi \cos\Phi - r\,d\Phi^2 \sin\Phi$
ces valeurs etant remises donneront :

$$P = -\frac{2}{dt^2}\,(ddr - r\,d\Phi^2)$$

$$\& \; Q = \frac{2}{dt^2}\,(-\,2\,dr\,d\Phi - r\,dd\Phi)$$

& partant la solution du probleme dépendra de ces deux équations :

$$\text{I.} \quad ddr - r\,d\Phi^2 = -\tfrac{1}{2} P\,dt^2$$

$$\text{II.} \quad 2\,dr\,d\Phi + r\,dd\Phi = -\tfrac{1}{2} Q\,dt^2$$

où l'element dt est supposé constant, au lieu duquel on pourra introduire le mouvement moyen du Soleil ω, en posant $\tfrac{1}{2}\,dt^2 = \frac{a\,d\omega^2}{\Pi}$: où a marque la distance moyenne de la Terre

au

au Soleil, & Π la force, dont la Terre eſt pouſſée vers le Soleil à cette même diſtance; & alors on aura ces deux équations;

$$\text{I.}\quad ddr - rd\Phi^2 + \frac{aPd\omega^2}{\Pi} = 0$$

$$\text{II.}\quad 2drd\Phi + rdd\Phi + \frac{aQd\omega^2}{\Pi} = 0$$

C. Q. F. T.

Scholie.

LII. La ſolution des ces équations dépend principalement de la nature des fonctions P & Q, dont les forces, qui agiſſent ſur le corps, ſont exprimées. Mais en général il ne ſe préſente rien de remarquable à developper au ſujet de ces équations. Cependant, ſi nous connoisſions d'ailleurs déjà le mouvement du corps M, à l'aide de ces formules nous pourrions réciproquement déterminer les forces, dont ce corps ſera ſollicité; ce qui ne manquera pas d'apporter un grand avantage dans l'Aſtronomie, quand on ſe trouvera en etat de déduire des obſervations les petites irregularités, auxquelles le mouvement des Planetes eſt ſujet, pour en connoitre, combien les forces, qui agiſſent actuellement ſur les Planetes, ſont differentes de celles qu'on ſuppoſe dans la Theorie.

Probleme 5.

LIII. *Un corps en M etant ſollicité par des forces quelconques, dont la principale ſoit dirigée vers le point C, déterminer ſon mouvement.* Fig. 4.

Solution.

Puisque le mouvement de ce corps ne ſe fera point dans un même plan, qu'on choiſiſſe à volonté un plan, qui paſſe par le point C, auquel on rapporte le mouvement de ce corps: & ce plan ſoit repreſenté par celui de la Planche: auquel on baiſſe du point M la perpendiculaire M R, & ayant pris dans ce même plan une ligne

fixe

fixe C A pour axe, & y ayant mené de R la perpendiculaire R P, qu'on nomme les trois coordonnées: C P $= x$; P R $= y$ & R M $= z$. Outre cela soit la distance raccourcie C R $= r$, & l'angle A C R $= \phi$; d'où nous tirons $x = r \cos \phi$ & $y = r \sin \phi$. Ensuite les forces, qui agissent sur le corps en M, se reduiront à une, dont la direction est perpendiculaire au plan A C R, & à d'autres, dont les directions se trouveront dans ce plan même, ou plutot dans un plan qui passant par M lui est parallele. Ces dernieres forces pourront outre cela être réduites à deux directions, dont l'une sera R C, & l'autre R Q perpendiculaire à R C, de sorte que nous n'aurons que trois forces à considerer, savoir: Mz, R C & R Q: que nous nommerons:

la force R C $=$ P
la force R Q $=$ Q
la force M R $=$ R.

Les deux premieres forces étant dans le plan A C R, auquel nous rapportons le mouvement, nous en tirerons les mêmes équations, que nous avons trouvées dans la solution du probleme precedent. Et partant si au lieu de l'élement du tems dt, nous introduisons le mouvement moyen du Soleil, qui soit $= d\omega$: & que nous posions la distance moyenne de la terre au Soleil $= a$ & la force du Soleil sur la Terre $= \Pi$, nous aurons ces deux équations; en supposant $d\omega$ constant:

$$\text{I. } ddr - r\,d\phi^2 + \frac{a\,P\,d\omega^2}{\Pi} = 0$$

$$\text{II. } 2\,dr\,d\phi + r\,dd\phi + \frac{a\,Q\,d\omega^2}{\Pi} = 0.$$

Or la troisiéme force R donnera cette équation

$$\frac{2\,ddz}{dt^2} = -\,R \text{ ou } ddz + \frac{a\,R\,d\omega^2}{\Pi} = 0:$$

qui exprime pour chaque instant la distance du corps M au plan A C R. Pour mieux connoitre l'obliquité de ce mouvement, pendant

dant que le corps passe par l'element M m, concevons un plan qui passe cet element M m & le point C, pour avoir le plan, dans lequel le corps se meut dans cet instant. Soit C Ω l'intersection de ce plan avec le plan A C R, & C Ω nous representera la ligne des noeuds. De plus, ayant tiré du point R sur C Ω la perpendiculaire R S, & outre cela la ligne M S, l'angle M S R representera l'inclinaison du plan C S M, dans lequel le corps M se meut actuellement dans cet instant, au plan fixe A C R: soit donc, pour appliquer le calcul à la situation de ce plan:

l'angle A C $\Omega = \pi$

& l'inclinaison, ou l'angle, R S M $= \varrho$.

De là nous aurons l'angle Ω C R $= \Phi - \pi$, & partant R S $= r$ si $(\Phi - \pi)$ & C S $= r$ cos $(\Phi - \pi)$. Ensuite la consideration de l'angle R S M $= \varrho$ donnant R M $=$ R S tang ϱ, nous fournira cette équation:

$$z = r \operatorname{si}(\Phi - \pi) \operatorname{tang} \varrho$$

d'où nous tirons par la differentiation;

$$dz = dr \operatorname{si}(\Phi - \pi) \operatorname{tang} \varrho + r(d\Phi - d\pi) \operatorname{cos}(\Phi - \pi) \operatorname{tang} \varrho + \frac{r d\varrho \operatorname{si}(\Phi - \pi)}{\operatorname{cos} \varrho^2}$$

Mais il faut considerer, que pendant que le corps se meut par l'element M m, tant la ligne des noeuds C Ω que l'inclinaison R S M demeure invariable, & partant, la valeur de dz doit etre juste, quand même on supposeroit π & ϱ constantes; de sorte que nous ayons:

$$dz = dr \operatorname{si}(\Phi - \pi) \operatorname{tang} \varrho + r\, d\Phi \operatorname{cos}(\Phi - \pi) \operatorname{tang} \varrho$$

& par conséquent:

$$r\, d\pi \operatorname{cos}(\Phi - \pi) \operatorname{tang} \varrho = \frac{r\, d\varrho \operatorname{si}(\Phi - \pi)}{\operatorname{cos} \varrho^2} \text{ ou } d\varrho = \frac{d\pi \operatorname{si} \varrho \operatorname{cos} \varrho}{\operatorname{tang}(\Phi - \pi)}.$$

$$\text{\& portant } d.\operatorname{tang} \varrho = \frac{d\varrho}{\operatorname{cos} \varrho^2} = \frac{d\pi \operatorname{tang} \varrho}{\operatorname{tang}(\Phi - \pi)}.$$

Cherchons maintenant aussi la valeur du differentio-differentiel ddz, & nous trouverons selon les régles

$$ddz = \text{tang}\,\varrho\, d.\,(dr\,\text{fi}\,(\Phi-\pi) + rd\Phi\,\text{cof}\,(\Phi-\pi))$$
$$+ (dr\,\text{fi}\,(\Phi-\pi) + rd\Phi\,\text{cof}\,(\Phi-\pi))\; d.\,\text{tang}\,\varrho$$

c'eſt à dire

$$ddz = \text{tang}\,\varrho \left(\begin{array}{c} ddr\,\text{fi}\,(\Phi-\pi) + dr\,(d\Phi - d\pi)\,\text{cof}\,(\Phi-\pi) \\ + rdd\Phi\,\text{cof}\,(\Phi-\pi) + drd\Phi\,\text{cof}\,(\Phi-\pi) - rd\Phi\,(d\Phi - d\pi)\,\text{fi}\,(\Phi-\pi) \end{array} \right)$$
$$+ drd\pi\,\text{cof}\,(\Phi-\pi) + \frac{rd\Phi d\pi\,\text{cof}\,(\Phi-\pi)}{\text{tang}\,(\Phi-\pi)}$$

laquelle expreſſion ſe réduit en cette forme

$$ddz = \text{tang}\,\varrho\,(ddr\,\text{fi}\,(\Phi-\pi) + 2\,drd\Phi\,\text{cof}\,(\Phi-\pi) + rdd\Phi\,\text{cof}\,(\Phi-\pi))$$
$$- rd\Phi^2\,\text{fi}\,(\Phi-\pi) + \frac{rd\Phi d\pi}{\text{fi}\,(\Phi-\pi)}$$

Mais ici je remarque d'abord les mêmes formules, qui ſe trouvent dans les deux premiéres équations; mettant donc

$$ddr - rd\Phi^2 = -\frac{a\,\text{P}\,d\omega^2}{\Pi}$$

$$\&\; 2\,drd\Phi + rdd\Phi = -\frac{a\,\text{Q}\,d\omega^2}{\Pi}$$

nous aurons:

$$ddz = \text{tang}\,\varrho \left(\frac{-a\,\text{P}\,d\omega^2}{\Pi}\,\text{fi}\,(\Phi-\pi) - \frac{a\,\text{Q}\,d\omega^2}{\Pi}\,\text{cof}\,(\Phi-\pi) + \frac{rd\Phi d\pi}{\text{fi}\,(\Phi-\pi)} \right)$$

& puiſque $ddz + \frac{a\,\text{R}\,d\omega^2}{\Pi} = 0$, il en réſultera cette équation:

$$\frac{a\,\text{R}\,d\omega^2}{\Pi\,\text{tang}\,\varrho} - \frac{a\,\text{P}\,d\omega^2}{\Pi}\,\text{fi}\,(\Phi-\pi) - \frac{a\,\text{Q}\,d\omega^2}{\Pi}\,\text{cof}\,(\Phi-\pi) + \frac{rd\Phi d\pi}{\text{fi}\,(\Phi-\pi)} = 0$$

& partant

$$d\pi = \frac{a\,d\omega^2\,\text{fi}\,(\Phi-\pi)}{\Pi\,r\,d\Phi} \left(\text{P}\,\text{fi}\,(\Phi-\pi) + \text{Q}\,\text{cof}\,(\Phi-\pi) - \frac{\text{R}}{\text{tang}\,\varrho} \right)$$

& à cauſe de $d.\,\text{tang}\,\varrho = \frac{d\pi\,\text{tang}\,\varrho}{\text{tang}\,(\Phi-\pi)}$ ou $d.\,l\,\text{tang}\,\varrho = \frac{d\pi}{\text{tang}\,(\Phi-\pi)}$

nous

nous aurons

$$d.l\,\text{tang}\,\varrho = \frac{a\,d\omega^2 \,\text{cof}(\varphi-\pi)}{\Pi\, r\, d\varphi}\left(\text{P}\,\text{fi}(\varphi-\pi)+\text{Q}\,\text{cof}(\varphi-\pi)-\frac{\text{R}}{\text{tang}\,\varrho}\right)$$

Donc, par le moyen de ces deux dernieres équations, nous fommes en état de déterminer pour chaque tems propofé, tant la fituation de la ligne des noeuds, que l'inclinaifon de l'orbite de la Planete au plan fixe A C R. C. Q. F. T.

Coroll.

LIV. Ce probleme demande donc, outre les deux équations, auxquelles le probleme precedent a été reduit, encore la folution de ces deux équations:

$$d\pi = \frac{a\,d\omega^2 \,\text{fi}(\varphi-\pi)}{\Pi\, r\, d\varphi}\left(\text{P}\,\text{fi}(\varphi-\pi)+\text{Q}\,\text{cof}(\varphi-\pi)-\frac{\text{R}}{\text{tang}\,\varrho}\right)$$

$$d.l\,\text{tang}\,\varrho = \frac{a\,d\omega^2 \,\text{cof}(\varphi-\pi)}{\Pi\, r\, d\varphi}\left(\text{P}\,\text{fi}(\varphi-\pi)+\text{Q}\,\text{cof}(\varphi-\pi)-\frac{\text{R}}{\text{tang}\,\varrho}\right)$$

desquelles il ne fera pas difficile de trouver par voye d'approximation les valeurs de π & de ϱ; pourvuqu' on ait deja déterminé le rapport entre r, φ & ω par les deux prémieres équations.