1748

Mémoire sur la plus grande équation des planètes

Leonhard Euler

MÉMOIRE
SUR LA PLUS GRANDE ÉQUATION DES PLANETES,

PAR MR. EULER.

Traduit du Latin.

Ce que l'on enseigne en Astronomie sur l'equation du centre de chaque Planete, regarde les lieux heliocentriques, où ces Planetes seroient vües par un Spectateur placé au centre du Soleil. Car quelqu'inégalité qu'il paroisse y avoir dans la marche des Planetes pour nous qui habitons la Terre, & aux yeux desquels elles semblent aller, tantot plus vîte, tantot plus lentement, tantot s'arrêter comme immobiles au même point du Ciel, tantot même rebrousser chemin, & devenir retrogrades; cependant les Astronomes ont remarqué, que si les mouvemens des Planetes etoient observés du Soleil, ces inégalités disparoitroient presque entierement. Un spectateur placé dans cet Astre ne verroit jamais les Planetes immobiles ni retrogrades, mais elles auroient à ses yeux un cours perpetuel & direct suivant l'ordre des signes. Neanmoins ce mouvement ne seroit pas tout à fait uniforme, mais il y resteroit quelque inegalité tellement inhérente à la vîtesse, que la même Planete feroit obfervée allant, quelquefois plus vîte, quelquefois plus lentement ; & c'eft cette inegalité de mouvement que les Tables Aftronomiques ont coutume de défigner par *l'equation du Centre.*

II. Outre cela les Planetes, comme on les voit de la Terre, en raifon de leur diftance à notre égard, ne femblent presque fuivre aucune Loi certaine, quoiqu'il foit trés difficile de déterminer leurs diftànces par les feules obfervations. Mais fi l'on rapporte les mouvemens des Planetes au Soleil, & qu'on les repréfente tels qu'ils paroîtroient au fpectateur fuppofé dans le Soleil, alors il ne reftera presque plus d'anomalie dans les diftances. Car dans chaque révolution chaque Planete fera une fois dans la plus grande diftance du Soleil, & une fois dans la plus grande proximité ; lesquels deux points feront diametralement oppofés l'un à l'autre & immuables dans le Ciel. Alors les intervalles de tems, pendant lesquels la Planete parvient de la diftance la plus grande à la moindre, & retourne enfuite à la plus grande, feront conftamment égaux entr'eux. Le point du Ciel, dans lequel la Planete paroit le plus éloignée du Soleil, s'appelle fon *Aphelie*, & le point oppofé où elle eft le plus voifine du Soleil, fon *Peribélie.* Et le tems que la Planete partie de l'Aphelie ou du Perihélie, employe à y retourner, eft nommé fon *temps periodique.*

III. La diversite' des diftances de chaque Planete au Soleil conferve un rapport admirable & conftant avec l'inegalité de fon mouvement, tel qu'il eft vu du Soleil. Car lorsque la Planete eft plus eloignée du Soleil, elle va plus lentement, & quand elle s'approche davantage de cet Aftre, fa courfe eft plus rapide. C'eft ce qui a fait découvrir a Kepler cette belle Loi, que Newton a demontrée

montrée depuis par les Principes de la Méchanique, c'eſt que chaque Planete dans des tems égaux décrit autour du Soleil, non des angles égaux, mais des aires égales. Il en réſulte auſſi avec une évidence inconteſtable que les Planetes font leurs révolutions autour du Soleil dans des Ellipſes, dans un des foyers deſquelles le Soleil lui même eſt placé, & que l'inegalité du mouvement eſt tellement reglée, que dans cette ellipſe ſont conſtamment décrites en tems égaux des aires égales, qui ſont coupées par des lignes droites tirées de la Planete au Soleil.

IV. LA PREMIERE choſe qu'on infére de cette régle, c'eſt que plus il y a de difference entre la plus grande & la moindre diſtance de la même Planete au Soleil, plus ſon mouvement vu du Soleil paroit inégal. Au lieu que ſi une Planete conſervoit toujours la même diſtance à l'egard du Soleil, c'eſt à dire, qu'elle ſe mût dans un cercle dont le Soleil fut le centre, alors ſon mouvement ſeroit ſi égal, qu'en tems égaux elle décriroit non ſeulement des aires egales, mais auſſi des angles égaux. Dans ce cas donc on pourroit trés aiſément par le moyen de la regle de trois determiner la rélation du lieu d'une Planete au Soleil pour un tems quelconque. Mais comme cette condition n'a lieu dans aucune Planete, on a coutume de concevoir idealement à chaque Planete une autre Planete qui lui ſerve comme de compagne, & qui faſſe ſa revolution autour du Soleil dans le même tems periodique, mais avec un mouvement uniforme. On ſuppoſe de plus que cette Planete feinte paroit au même point du Ciel avec la véritable, lorsque celle-ci eſt à l'Aphelie ou au Perihélie. Apres donc que ces deux Planetes ont paſſé par l'aphelie, la Planete feinte paroitra aller plus vîte que la veritable; or celle cy augmentera inſenſiblement ſa vîteſſe jusqu'à ce qu'elle aura atteint la feinte au Perihélie. Alors elle la surpassera en vîtesse, & la laissera en arriere, jusqu'à ce qu'elles se rejoignent de nouveau à l'Aphelie. A l'exception donc de ces deux points, l'Aphelie & le Perihélie, ces deux Planetes seront perpetuellement separées l'une de l'autre ; & la difference entre le lieu de la Planete vraye & celui de la feinte est ce qu'on appelle l'equation du centre de la Planete, ou la Prostapherese. Comme il est donc facile d'assigner pour un tems quelconque le lieu de la Planete feinte, si outre cela l'equation, que les Tables Astronomiques fournissent, est connüe, on connoitra par là le lieu de la vraye Planete.

V. Les Astronomes appellent *Anomalie moyenne* la distance de la Planete feinte à l'Aphelie, ou l'angle sous lequel cette Planete dans l'eloignement de l'Aphelie, est vuë du Soleil. On peut la déterminer aisément par le tems qui s'est ecoulé depuis le passage de la Planete par l'Aphelie. L'Anomalie vraye c'est la distance de la Planete vraye à l'Aphelie, ou l'angle sous lequel cette Planete dans l'eloignement de l'Aphelie est vuë du Soleil. Quand donc la Planete s'avance de l'Aphelie au Perihélie, on trouve l'anomalie vraye en soustraisant l'equation du centre de l'anomalie moyenne ; au contraire lorsque la Planete retourne du Perihélie à l'Aphelie, il faut ajouter l'equation à l'anomalie moyenne pour avoir l'anomalie vraye. Alors on peut déterminer par l'anomalie moyenne ou par la vraye, la veritable distance de la Planete au Soleil ; & par conséquent si l'on determine le lieu de la Terre vu du Soleil pour le même tems, la Trigonometrie fournit le lieu où la Planete vuë de la Terre doit paroître, ou son lieu Geocentrique.

VI. L'equation du centre etant donc nulle, lorsque la Planete se trouve, ou au Perihélie, on à l'Aphelie, il faut necessairement

ment que cette equation croiſſe, lorsque la Planete s'avance en quittant ces lieux, & qu'enſuite elle décroiſſe de nouveau. Il y aura donc un lieu où cette équation ſera la plus grande. Il naît de là pluſieurs queſtions trés importantes en Aſtronomie: premierement qu'elle eſt pour chaque Planete la plus grande équation; & à quelle anomalie moyenne cette plus grande équation répond? Enſuite, comme la plus grande équation eſt déterminée par l'excentricité de l'orbite de la Planete, laquelle eſt la fraction qui a pour numerateur la diſtance des foyers de l'ellipſe, & pour dénominateur le grand Axe de l'ellipſe? Et réciproquement il faudra déterminer l'excentricité par la plus grande équation. Je vais donc examiner ces queſtions, dont la ſolution rigoureuſe n'exiſte encore nulle part.

VII. Soit donc la moitié de l'axe transverſe de l'orbite de chaque Planete $= a$, ce que l'on a coutume d'appeller auſſi en Aſtronomie la diſtance moyenne de la Planete au Soleil; & que l'excentricité ou la diſtance des foyers diviſée par l'axe transverſe, ſoit $= n$, laquelle evanouït, ſi l'orbite de la Planete ſe change en cercle, mais croit auſſi d'autant plus que cette orbite s'éloigne du cercle. Et ſi cela va à l'infini, en ſorte que l'orbite devienne une parabole, alors l'excentricité n deviendra egale à l'unité, mais dans les hyperboles elle ſurpaſſera l'unité. L'axe transverſe etant $= 2a$, la diſtance des foyers ſera $= 2an$, & la diſtance de l'un & l'autre foyer au centre $= an$. Par conſequent la diſtance de l'Aphelie au Soleil ſera $= a + an = a(1+n)$ & la diſtance du Perihélie au Soleil $= a - an = a(1-n)$. Alors le demi-axe conjugué ſera $= a\sqrt{(1-nn)}$ & la moitié du parametre $= a(1-nn)$.

VIII. Ces choses etant ſuppoſées, ſoit pour un tems donné depuis le paſſage de la Planete par l'Aphelie l'anomalie moyenne

 $= x$,

$= x$, & l'anomalie vraye qui y répond $= z$; l'equation du centre, comme nous l'avons vu, sera $= x - z$. Soit de plus la distance de la Planete au Soleil $= r$, pour exprimer le rapport entre l'anomalie moyenne & l'anomalie vraye, il faudra appeller au secours un nouvel angle tenant une espece de milieu entre x & z, que Kepler a nommé l'anomalie excentrique. Soit donc cette anomalie excentrique $= y$, & que par son moyen, en suivant la methode que j'ai amplement exposée ailleurs, on détermine tant l'anomalie moyenne x, que la véritable z, avec la distance r, en sorte que x soit $= y + n$ sin y; cos $z = \frac{n + \cos y}{1 + n \cos y}$; & $r = a\,(1 + n \cos y)$. Par conséquent on aura sin $z = \frac{\sin y \, \sqrt{(1 - nn)}}{1 + n \cos y}$ & tang $z = \frac{\sin y . \sqrt{(1 - nn)}}{n + \cos y}$; d'où par l'anomalie excentrique y, on trouve l'anomalie moyenne & vraye, & la distance de la Planete au Soleil. Avec ces formules il est aisé de calculer les Tables Astronomiques pour le mouvement des Planetes.

IX. Avant que de rechercher la plus grande équation, il sera à propos de resoudre la question suivante qui peut avoir quelque utilité en Astronomie.

Trouver l'anomalie moyenne & la vraye, auxquelles répond la distance de la Planete au Soleil, égale à la distance moyenne a.

Comme ici r doit etre $= a$, il faudra que cos $y = 0$, & par conséquent l'anomalie excentrique y sera $= 90°$. On tire donc de là l'anomalie moyenne $x = 90° + n$. Pour cet effet le sinus total ou le rayon etant supposé ici egal à l'unité, on doit chercher dans un un ſemblable cercle l'arc $= n$, & l'angle qui ſe meſure par cet arc, doit etre ajouté à $90°$. pour trouver l'anomalie moyenne cherchée x; ou bien, comme n eſt un nombre moindre que l'unité, il faut le traitter comme ſinus, & ſouſtraire 4, 6855749, de ſon logarithme; le nombre qui répond au logarithme qui reſte fournira l'angle n exprimé en ſecondes. Mais l'anomalie vraye z qui répond à cette anomalie excentrique $y = 90°$ ſera telle que coſ $z = n$, & $z =$ A coſ $n = 90° -$ A ſin n. Soit m l'angle dont le ſinus $= n$, & on aura $z = 90° - m$ & l'equation du centre dans ce cas ſera $= n + m$ $= n +$ A ſin n. C'eſt pourquoi ſi la diſtance de la Planete au Soleil r ſe trouve egale à la diſtance moyenne au Soleil, ce qui arrive quand la Planete eſt dans l'axe conjugué de l'orbite, alors l'anomalie moyenne x ſera $= 90° + n$, l'anomalie vraye $z = 90° -$ A ſin n, & l'equation $= n +$ A ſin n.

X. J'ai fait précéder ce Problême, parce que dans ce cas l'equation $n +$ A ſin n ne differe preſque pas ſenſiblement de la plus grande équation, ſi l'excentricité n ſe trouve fort petite, ce qui arrive preſque dans toutes les Planetes. C'eſt dans cette ſource que j'ai puiſé la ſolution des Problêmes ſur la plus grande équation que j'ai joints à la Diſſertation ſur le mouvement des Planetes & ſur l'orbite du Soleil, dans le T. VII. des Mémoires de l'Acad. de Petersbourg. Car l'anomalie vraye, comme je l'ai montré dans cet endroit, pouvant etre exprimée par une ſerie infinie, de la maniere ſuivante,

$$z = y - n \sin y + \frac{1}{4} nn \sin 2y - \frac{1}{3.4} n^3 (\sin 3y + 3 \sin y) + \frac{1}{4.8.} n^4 (\sin 4y + 4 \sin 2y) - \frac{1}{5.16} n^5 (\sin 5y + 5 \sin 3y + 10 \sin y)$$

$10 \sin y) + \frac{1}{6.32} n^6 (\sin 6y + 6 \sin 4y + 15 \sin 2y)$ &c. Si n eſt une fraction fort petite, z ſera presque $= y - n \sin y$, & parce que x eſt $= + n \sin y$, l'equation ſera $= 2n \sin y$, qui ſera par conſéquent la plus grande, ſi y eſt $= 90°$, dans lequel cas r devient auſſi, comme nous l'avons vu $= a$. Cependant cette détermination, ſi l'excentricité de la Planete eſt un peu conſiderable, comme cela arrive en Mercure, s'eloignera un peu de la verité, mais ſurtout quand il ſera queſtion de déterminer le tems periodique de quelque Comete, & de renfermer le mouvement de la Comete dans des Tables à la façon des Planetes. Car alors cette détermination s'ecartera beaucoup de la verité ; & la plus grande équation ſera conſiderablement eloignée du lieu, où la diſtance de la Planete au Soleil eſt égale au demi-axe transverſe.

XI. Pour tous ces cas donc il faut déduire la plus grande équation par la methode même de *maximis* & *minimis*, plutot que de formules qui ne ſont vrayes qu'à peu près. Ainſi, comme pour déterminer l'anomalie moyenne & la vraye, il faut auparavant connoitre l'anomalie excentrique, je commencerai par le Problême ſuivant.

Etant donné l'excentricité d'une Planete n, *trouver l'anomalie excentrique, à laquelle répond la plus grande équation.*

Puisqu'en ſuppoſant l'anomalie moyenne $= x$, & l'anomalie vraye $= z$, l'equation du centre eſt $= x - z$, cette equation deviendra la plus grande, lorsque $dx - dz$ ſera $= o$, ou $dx = dz$. Or nommant l'anomalie excentrique $= y$, nous aurons comme nous l'avons vû ci-deſſus, $x = y + n \sin y$ & $\cos z = \frac{n + \cos y}{1 + n \cos y}$, d'où

d'où en differentiant résulte $dx = dy + n\,dy \cos y$ & $-dz \sin z = \frac{-dy \sin y + nn\,dy \sin y}{(1 + n \cos y)^2}$, ou bien, $dz \sin z = \frac{(1 - nn)\,dy \sin y}{(1 + n \cos y)^2}$.
Mais $\sin z$ eſt $= \frac{\sqrt{(1 - nn)} \sin y}{1 + n \cos y}$, & par conſequent nous aurons $dz = \frac{dy \sqrt{(1 - nn)}}{1 + n \cos y}$. Comme donc dx doit etre $= dz$, on aura cette équation $1 + n \cos y = \frac{\sqrt{(1 - nn)}}{1 + n \cos y}$, & ainſi $1 + n \cos y = \sqrt[4]{(1 - nn)}$ & $\cos y = \frac{\sqrt[4]{(1 - nn)} - 1}{n}$. Soit donc $y = 90° + \lambda$, & il y aura $\sin \lambda = \frac{1 - \sqrt[4]{(1 - nn)}}{n}$, ou $\sin \lambda = \frac{n}{(1 + \sqrt[4]{(1 - nn)})\,(1 + \sqrt{(1 - nn)})}$, par où il paroit que l'anomalie excentrique eſt un peu plus grande que dans le cas precedent, où elle etoit $y = 90°$.

XII. Soit donc comme auparavant $n = \sin m$, & on aura $\sqrt{(1 - nn)} = \cos m$, & à cauſe de l'excentricité l'angle m ſera donné. Donc nous aurons $\sin \lambda = \frac{1 - \sqrt{\cos m}}{\sin m}$, & $\cos \lambda = \frac{\sqrt{(2\sqrt{\cos m} - \cos m - \cos m^2)}}{\sin m}$. Mais ſi l'excentricité n ſe trouve beaucoup moindre que l'unité, comme cela arrive dans toutes les Planetes, on aura $\sqrt[4]{(1 - nn)} = 1 - \frac{1}{4} n^2 - \frac{1.3}{4.8} n^4 -$

$\frac{1.3.7}{4.8.12} n^6 - \frac{1.3.7.11}{4.8.12.16} n^8$ &c. Et par conséquent l'angle λ, par lequel l'anomalie excentrique y surpasse l'angle droit, s'exprimera de sorte que soit

$$\sin\lambda = \frac{1}{4} n + \frac{1.3}{4.8} n^3 + \frac{1.3.7}{4.8.12} n^5 + \frac{1.3.7.11}{4.8.12.16} n^7 + \&c.$$

& ainsi par l'excentricité donnée on trouve aisément l'angle λ, & par celui-ci l'anomalie excentrique $y = 90° + \lambda$. On infère encore de là le cosinus de cet angle λ.

$$\cos\lambda = 1 - \frac{1}{32} n^2 - \frac{49}{2048} n^4 - \frac{1233}{65536} n^6 - \&c.$$

XIII. L'anomalie excentrique y, à laquelle répond la plus grande équation etant présentement trouvée, on pourra déterminer par là l'anomalie moyenne & la vraye; mais il est expedient de les chercher chacune à part.

Etant donnée l'excentricité n, *trouver l'anomalie moyenne, à laquelle répond la plus grande équation.*

L'anomalie excentrique pour ce cas etant $y = 90° + \lambda$ & $\sin\lambda = \frac{1-\sqrt[4]{(1-nn)}}{n}$ à cause de $x = y + n \sin y$, on aura $x = 90° + \lambda + n \cos\lambda$. Mais si nous voulons exprimer l'excés de cet angle au dessus de $90°$ par n, parce que λ est $= \sin\lambda + \frac{1}{6} \sin\lambda^3 + \frac{3}{40} \sin\lambda^5 +$ &c. on aura

$$\lambda = \frac{1}{4} n + \frac{37}{384} n^3 + \frac{2363}{40960} n^5 + \&c.$$

laquelle

laquelle valeur etant ſubſtituée à la place de λ & de coſ λ trouvé ci-deſſus, l'anomalie moyenne ſera

$$x = 90° + \frac{5}{4} n + \frac{25}{384} n^3 + \frac{1383}{40960} n^5 + \&c.$$

Mais ſi n n'eſt pas une quantité ſi petite que ces ſeries ſoient aſſez convergentes, alors il conviendra de ſe ſervir de l'expreſſion premierement trouvée $x = 90 + \lambda + n$ coſ λ, qui s'accommode aiſément au calcul.

XIV. Avant que la plus grande équation puiſſe etre determinée, il faut auſſi rechercher l'anomalie vraye.

Etant donnée l'Excentricité, trouver l'anomalie vraye, à laquelle répond la plus grande équation.

L'anomalie excentrique pour ce cas eſt trouvée $y = 90° + \lambda$, étant ſin $\lambda = \frac{1 - \sqrt[4]{(1 - nn)}}{n}$. Par conſequent en ſuppoſant l'anomalie vraye $= z$, on aura

$$\text{coſ}\, z = \frac{n + \text{coſ}\, y}{1 + n\, \text{coſ}\, y} = \frac{n + \text{coſ}\, y}{\sqrt[4]{(1 - nn)}} = \frac{n - \text{ſin}\, \lambda}{\sqrt[4]{(1 - nn)}}.$$

Lequel coſinus etant affirmatif fait voir que $z < 90°$. Soit donc $z = 90° - \mu$, & il ſera ſin $\mu = \frac{n - \text{ſin}\, \lambda}{\sqrt[4]{(1 - nn)}} = \frac{nn - 1 + \sqrt[4]{(1 - n^2)}}{n \sqrt[4]{(1 - nn)}}$ $= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sqrt[4]{(1 - nn)^3}$. Et de là par l'excentricité on trouvera l'angle μ. Mais ſi n eſt une fraction fort petite, on aura presque

$$\sqrt[4]{(1-nn)^3} = 1 - \frac{3}{4} n^2 - \frac{3.1}{4.8} n^4 - \frac{3.1.5}{4.8.12} n^6 - \frac{3.1.5.9}{4.8.12.16} n^8 - \&c.$$

d'où réfultera

$$\text{fin}\,\mu = \frac{3}{4} n + \frac{3}{32} n^3 + \frac{5}{128} n^5 + \frac{45}{2048} n^7 + \&c.$$

Et l'angle même μ fe déterminera par la formule : $\mu = \text{fin}\,\mu + \frac{1}{6}\,\text{fin}\,\mu^3 + \frac{3}{40}\,\text{fin}\,\mu^5 + \&c.$ Par conféquent on aura

$$\mu = \frac{3}{4} n + \frac{21}{128} n^3 + \frac{3409}{40960} n^5 + \&c.$$

XV. Si l'on fouftrait à préfent l'anomalie vraye de l'anomalie moyenne, il reftera la plus grande équation elle même.

Etant donnée l'Excentricité de l'orbite de la Planete, trouver fa plus grande équation.

Comme pour la plus grande équation on a trouvé l'anomalie moyenne

$$x = 90° + \lambda + n\,\text{cof}\,\lambda,\ \text{ayant trouvé fin}\,\lambda = \frac{1 - \sqrt[4]{(1-nn)}}{n}$$

& qu'on a auffi trouvé l'anomalie vraye

$$z = 90° - \mu,\ \&\ \text{fin}\,\mu = \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{(1-nn)^3}$$

la plus grande équation fera $= \lambda + \mu + n\,\text{cof}\,\lambda$. Mais fi dans le cas où n eft une fraction fort petite, on fouhaite feulement l'equation la plus grande qui approche le plus du vrai, il réfultera des formules trouvees ci-deffus :

$$2n + \frac{11}{48} n^3 + \frac{599}{5120} n^5 + \&c.$$

Mais

Mais quand la diſtance de la Planete au Soleil eſt égale au demi-axe transverſe, alors l'equation eſt $= n + A \sin n = 2n + \frac{1}{6}n^3 + \frac{3}{40}n^5 +$ &c. Ainſi la plus grande équation ſurpaſſe celle-ci d'une quantité $= \frac{1}{16}n^3 + \frac{43}{1024}n^5 +$ &c.

XVI. Puiſque nous avons trouvé $1 + n \cos y = \sqrt[4]{(1-nn)}$, la diſtance de la Planete au Soleil, lorsque ſon équation eſt la plus grande, ſera, $r = a \sqrt[4]{(1-nn)}$, diſtance qui eſt toujours moindre que la moitié de l'axe tranſverſe. De là donc on peut aiſément déterminer par l'excentricité, tant la plus grande équation, que l'anomalie moyenne & la diſtance de la Planete au Soleil, à laquelle elle répond. Mais ſi la plus grande équation eſt donnée, qui ſoit $= m$, & qu'on en veuïlle réciproquement chercher l'excentricité n, le Probleme devient trés difficile, & ne peut etre réſolu que par approximation. Car on arrive à cette équation $m = \lambda + \mu + n \cos\lambda$, par laquelle il faut trouver la valeur de la quantité n; & il n'y a point d'autre voye pour y reüſſir, qu'en prenant d'abord diverſes valeurs à la place de n, & en déduiſant de là l'équation la plus grande. On découvrira en effet par ce moyen dabord les bornes entre lesquelles la vraye valeur de n eſt renfermée; & en ſuivant la même route, on rendra ces limites toujours plus etroites, jusqu'à ce qu'enfin par la régle des interpolations on puiſſe en tirer la vraye valeur de l'excentricité n.

XVII. Mais si l'excentricité n'eſt pas fort grande, de maniere que les formules ſuperieures, les plus proches du vrai, puiſ-

 ſent

ſent etre employées ſans erreur, alors on pourra trouver directement l'excentricité par la plus grande équation donnée.

Etant donnée la plus grande équation trouver par ſon moyen l'excentricité de l'orbite de la Planete.

Soit la plus grande équation $= m$, & l'excentricité $= n$, on aura

$$m = 2n + \frac{11}{48}n^3 + \frac{599}{5120}n^5 + \&c.$$

d'où l'on tire par converſion

$$n = \frac{1}{2}m - \frac{11}{768}m^3 - \frac{587}{2^{16}.15}m^5 - \&c.$$

où il faut exprimer la plus grande équation m en parties de rayon, ce qui ſe fait en convertiſſant l'angle m en ſecondes, & en ajoutant au logarithme du nombre réſultant 4,6855749; car on aura ainſi le logarithme du nombre m. Mais l'anomalie moyenne x, à laquelle cette plus grande équation répond ſera

$$x = 90° + \frac{5}{8}m - \frac{5}{2^9.3}m^3 - \frac{1}{2^9.5}m^5 - \&c.$$

On approchera donc aſſez exactement de cette anomalie moyenne, ſi à 90 degrés l'on ajoute cinq huitiemes parties de la plus grande équation.

XVIII. Pour faciliter l'application de ces ſolutions au calcul Aſtronomique, prenons pour exemple l'orbite de Mercure, dont les Tables Aſtronomiques font l'excentricité $= \frac{797}{3871}$.

On aura donc

$$n = 0,20589 \; ; \quad l\,n = 9,3136351.$$

Si donc la diſtance de Mercure au Soleil eſt égale à ſon demi-axe tranſverſe, ou que l'on faſſe l'anomalie excentrique $= 90°$, l'anol'anomalie moyenne x deviendra $= 90^\circ + n$. D'où, pour trouver l'angle n.

de $l\,n$	$=$	9, 3136351
il faut souftr.		4, 6855749
à ce logarithme		4, 6280602
repond ce nombre	$=$	42468″
d'où n	$=$	11°, 47′, 48″

& ainfi l'anomalie moyenne $x = 3^s, 11^\circ, 47', 48''$. Mais l'anomalie vraye dans ce cas eft $z = 90^\circ - A\ \text{fin}\ n$. Or $A\ \text{fin}\ n = 11^\circ, 52', 54''$, d'où $z = 90^\circ - 11^\circ, 52'\ 54''$. Par là l'equation devient $= 23^\circ, 40', 42''$, ce qui eft presque deux minutes au deffous de la plus grande équation.

XIX. Mais pour trouver la plus grande équation, qu'on faffe le calcul fuivant

$l\,n^2 = 8, 6272702$	$l\,(1-nn) = 9, 9811883$
$n^2 = 0, 0423906$	$l\sqrt[4]{(1-nn)} = 9, 9952971$
$1-n^2 = 0, 9576093$	$\sqrt[4]{(1-nn)} = 0, 989229$

$$1-\sqrt[4]{(1-nn)} = 0,\ 010771$$

$$l\,(1-\sqrt[4]{(1-nn)}) = 8,\ 0322560$$

$$\text{fouftr.}\quad l\,n = 9,\ 3136351$$

$$l\ \text{fin}\ \lambda = 8,\ 7186209$$

$$\text{Donc}\quad \lambda = 2^\circ\ 59'\ 55''$$

Ainfi

Ainsi l'anomalie excentrique, à laquelle répond la plus grande équation est $y = 3^s, 2^\circ, 59', 55''$. De plus pour trouver l'anomalie moyenne

$$\begin{array}{rrl} \text{qu'on prenne} & l \cos\lambda = & 9,\ 9994050 \\ & l\, n = & \underline{9,\ 3136351} \\ & & 9,\ 3130401 \\ & \text{souftr.} & \underline{4,\ 6855749} \\ & & 4,\ 6274652 \\ \text{Donc} & n \cos\lambda = & 42409'' \\ \text{ou} & n \cos\lambda = & 11^\circ\ 46'\ 49'' \end{array}$$

L'anomalie moyenne à laquelle la plus grande équation répond, etant donc $x = 90^\circ + \lambda + n \cos\lambda$, on aura $x = 3^s, 14^\circ, 46', 44''$, à quoi l'on trouve aussi que répond dans les Tables la plus grande équation. De plus l'anomalie vraye est $z = 90^\circ - \mu$

$\sin\mu$ etant $= \dfrac{1 - \sqrt[4]{(1-nn)^3}}{n}$, d'où l'on déduit le calcul suivant

$$\begin{array}{rl} \text{Etant } l \sqrt[4]{(1-nn)} = & 9,\ 9952971 \\ \text{sera } l \sqrt[4]{(1-nn)^3} = & \underline{9,\ 9859913} \\ \&\ \sqrt[4]{(1-nn)^3} = & 0,\ 9680356 \\ 1 - \sqrt[4]{(1-nn)^3} = & \underline{0,\ 0319643} \\ l\,(1 - \sqrt[4]{(1-nn)^3}) = & 8,\ 5046652 \\ \text{souftr. } l\, n = & \underline{9,\ 3136351} \\ l \sin\mu = & 9,\ 1910301 \\ \text{Donc } \mu = & 8^\circ, 55'\ 52'' \\ \text{Ajout. } \lambda + n \cos\lambda = & \underline{14,\ 46,\ 44} \\ \text{La plus grande équation} = & 23^\circ, 42'\ 36'' \end{array}$$

laquelle

laquelle ne differe pas même d'une feconde de la plus grande équation reprefentée dans ces Tables, ce qui prouve qu'elles ont été calculées par la Theorie avec la derniere rigueur. Enfin comme le demi-axe tranfverfe de l'orbite de Mercure eft $= 38710 = a$, on aura

$$\begin{array}{rcr} l\,a & = & 4,\ 5878232 \\ l\sqrt[4]{(1-nn)} & = & 9,\ 9952971 \\ \hline l\,r & = & 4,\ 5831203 \end{array}$$

& r fera la diftance de Mercure au Soleil, où fon équation eft la plus grande.

XX. Mais afin de pouvoir trouver réciproquement l'excentricité par la plus grande équation donnée, comme on ne fauroit y parvenir que par des interpolations, j'ai cru devoir placer ici la Table fuivante, dans laquelle on trouve pour chaques centiemes parties de l'unité, qui conftituënt l'excentricité, tant les plus grandes équations, que les anomalies excentriques & moyennes, auxquelles répondent les plus grandes équations. La derniere colomne fournit auffi le logarithme de la diftance de la Planete au Soleil, où fon équation eft la plus grande. En effet en fuppofant cette diftance $= r$, & le demi-axe tranfverfe $= a$, puisque $r = a\sqrt[4]{(1-nn)}$, la derniere colomne contient les logarithmes de la formule $\sqrt[4]{(1-nn)}$, qui etant ajoutés aux logarithmes de la diftance moyenne, donneront le logarithme de la diftance cherchée r.

XXI. Avec le secours donc de cette Table, etant donnée une excentricité quelconque, on trouvera par l'interpolation la plus grande équation qui lui convient. Ainfi l'excentricité pour l'orbite de la Terre etant $= 0,0169$, on trouve par la Table pour

	l'excentricité	la plus grande équation
	0, 0100	1°, 8′, 45″
	0, 0200	2, 17, 31
Differ.	0, 0100	1, 8, 46

Il n'y a qu'à soustraire à présent l'excentricité 0, 0100 de celle qui est proposée 0, 0169, pour avoir la difference 0, 0069, & il en résultera cette proportion:

$$100 : 1°, 8', 46'' = 69 : 47', 26''$$

En ajoutant cet angle trouvé 47′ 26″ à la moindre équation, 1°, 8′, 45″, on aura la plus grande équation de l'orbite de la Terre = 1°, 56′, 11″.

De même l'excentricité de Mars représentée dans les Tables est = 0, 092998. Qu'on tire donc de cette Table les deux excentricités les plus proches avec les plus grandes équations.

	Excentricités	La plus grande équation
	0, 090000	10, 19, 22
	0, 100000	11, 28, 20
Diff.	0, 010000	1, 8, 58

Or l'excentricité proposée surpasse la moindre 0, 090000 de 0, 002998, d'où résultera cette proportion

$$10000 : 1°, 8', 58'' = 2998 : 20', 40''.$$

Ajoutez cet angle 20′, 40″ à l'equation précedente, qui est 10, 19, 22, & l'on aura la plus grande équation de l'orbite de Mars = 10°, 40′ 2″ qui s'accorde parfaitement avec les Tables.

XXII. L 1

XXII. Le principal uſage de cette Table ſera pour déterminer l'excentricité lorsque plus grande équation eſt connüe; & même ſans ce ſecours la queſtion eſt abſolument inſoluble. Pour le prouver par un exemple, prenons la plus grande équation de Mercure, que les Tables marquent $23^{\circ}, 42' \; 40''$. Nous avons déja remarqué qu'elle s'accorde parfaitement avec l'excentricité fournie par les mêmes Tables. Qu'on prenne donc les deux plus grandes équations les plus prochaines;

	La plus grande équation.	L'Excentricité
	$23^{\circ}, \; 1', \; 32''$	0, 20
	24 , 11 , 19	0, 21
Diff.	1 , 9 , 47	0, 01

Enſuite que la moindre équation ſoit ſouſtraite de celle qui eſt propoſée

$$\begin{array}{r} 23^{\circ}, \; 42', \; 40'' \\ \underline{23', \; 1, \; 32} \\ 0, \; 41, \; 8 \end{array}$$

& qu'on faſſe cette proportion

$$1^{\circ}, 9', 47'' : 0,01 = 0^{\circ}, 41' \, 8'' : 0,0058944$$

ce nombre ajouté à la moindre excentricité 0, 20, donnera l'excentricité de l'orbite de Mercure $=$ 0, 2058944, qui ne diffère presque point de celle qui a été ſuppoſée, quoique nous ayons donné ici à la plus grande équation $4''$ de plus. En effet cette addition de $4''$ n'augmente que de 0, 0000094 le logarithme de l'excentricité, qui etoit auparavant $ln = 9,3136351$.

XXIII. Il faut remarquer ici que les deux parties λ & μ de $\lambda + \mu + n \cos \lambda$ croiſſant continuellement, par

 l'augmenl'augmentation de la valeur de l'excentricité n, la troisieme n cos λ a une plus grande valeur; puisque sa valeur evanouït tant dans le cas de $n = o$ que dans celui de $n = 1$. Pour trouver ce *maximum*, il faut faire attention à l'equation differentielle $dn \cos\lambda = n\, d\lambda \sin\lambda$. Or comme $\sin\lambda$ est $= \frac{1 - \sqrt[4]{(1-nn)}}{n}$, ou $n \sin\lambda = 1 - \sqrt[4]{(1-nn)}$, on aura $dn \sin\lambda + n\, d\lambda \cos\lambda = \frac{n\, dn}{2\sqrt[4]{(1-nn)}}$. Qu'on substituë ici la valeur precedente $d\lambda = \frac{dn \cos\lambda}{n \sin\lambda}$, & cela sera $\frac{1}{\sin\lambda} = \frac{n}{2\sqrt[4]{(1-nn)^3}}$ ou $2\sqrt[4]{(1-nn)^3} = 1 - \sqrt[4]{(1-nn)}$. Qu'on suppose $\sqrt[4]{(1-nn)} = p$, & $2p^3$ deviendra $= 1 - p$; laquelle équation etant resoluë par approximation, on trouvera $lp = 9,77067125$, où $p = 0,5897544$, d'où provient $n = 0,9375645$, & cette valeur la plus grande de n cos λ deviendra $= 48°, 18', 10'', 40'''$.

Enfin il est utile de remarquer ici, que l'excentricité etant $= 0,72388$, la plus grande équation sera exactement $= 90°$.

Excen-

Excentricité. n	Plus grande equation $\lambda + \mu + n \cos\lambda$	Anomalie excentrique $3^s + \lambda$ λ	Anomalie moyenne $3^s + \lambda + n \cos\lambda$ $\lambda + n \cos\lambda$	Log. dist. au Soleil $l a + l \sqrt[4]{(1-nn)}$ $l \sqrt[4]{(1-nn)}$	$n \cos\lambda$	μ
0, 00	0, 0, 0	0, 0, 0	0, 0, 0	0,0000000	0, 0, 0	0, 0, 0
0, 01	1, 8,45	0, 8, 36	0, 42, 59	9,9999891	0, 34,23	0,25,47
0, 02	2,17,31	0, 17, 12	1, 25, 58	9,9999565	1, 8,46	0,51,34
0, 03	3,26,17	0, 25, 48	2, 8, 56	9,9999022	1,43, 8	1,17,22
0, 04	4,35, 4	0, 34, 24	2, 51, 54	9,9998261	2,17,30	1,43,10
0, 05	5,43,52	0, 43, 1	3, 34, 53	9,9997282	2,51,52	2, 8,59
0, 06	6,52,41	0, 51, 38	4, 17, 52	9,9996084	3,26,14	2,34,49
0, 07	8, 1,32	1, 0, 16	5, 0, 52	9,9994667	4, 0,36	3, 0,40
0, 08	9,10,26	1, 8, 55	5, 43, 53	9,9993029	4,34,57	3,26,33
0, 09	10,19,22	1, 17, 35	6, 26, 54	9,9991170	5, 9,19	3,52,28
0, 10	11,28,20	1, 26, 16	7, 9, 56	9,9989088	5,43,40	4,18,24
0, 11	12,37,21	1, 34, 59	7, 52, 59	9,9986782	6,18, 0	4,44,22
0, 12	13,46,26	1, 43, 43	8, 36, 3	9,9984252	6,52,20	5,10,23
0, 13	14,55,34	1, 52, 28	9, 19, 8	9,9981494	7,26,40	5,36,26
0, 14	16, 4,46	2, 1, 15	10, 2, 14	9,9978508	8, 0,59	6, 2,32
0, 15	17, 4, 1	2, 10, 3	10, 45, 20	9,9975292	8,35,17	6,28,41
0, 16	18,23,21	2, 18, 53	11, 28, 28	9,9971843	9, 9,35	6,54,53
0, 17	19,32,45	2, 27, 45	12, 11, 37	9,9968160	9,43,52	7,21, 8
0, 18	20,42,15	2, 36, 39	12, 54, 48	9,9964240	10,18, 9	7,47,27
0, 19	21,51,51	2, 45, 36	13, 38, 1	9,9960080	10,52,25	8,13,50
0, 20	23, 1,32	2, 54, 35	14, 21, 15	9,9955678	11,26,40	8,40,17
0, 21	24,11,19	3, 3, 37	15, 4, 31	9,9951031	12, 0,54	9, 6,48
0, 22	25,21,12	3, 12, 41	15, 47, 48	9,9946136	12,35, 7	9,33,24
0, 23	26,31,13	3, 21, 49	16, 31, 8	9,9942135	13, 9,19	10, 0, 5
0, 24	27,41,20	3, 31, 0	17, 14, 30	9,9935588	13,43,30	10,26,50
0, 25	28,51,35	3, 40, 14	17, 57, 54	9,9929928	14,17,40	10,53,41

n	$\lambda + \mu + n \cos\lambda$	λ	$\lambda + n \cos\lambda$	$l\sqrt[4]{(1-nn)}$	$n \cos\lambda$	μ
0, 25	28,51,35	3, 40, 14	17, 57, 54	9,9929928	14,17,40	10,53,41
0, 26	30, 1,57	3, 49, 31	18, 41, 20	9,9924006	14,51,49	11,20,37
0, 27	31,12,28	3, 58, 52	19, 24, 49	9,9917816	15,25,57	11,47,40
0, 28	32,23, 7	4, 8, 16	20, 8, 19	9,9911356	16, 0, 3	12,14,48
0, 29	33,33,57	4, 17, 45	20, 51, 53	9,9904620	16,34, 8	12,42, 4
0, 30	34,44,57	4, 27, 18	21, 35, 30	9,9897603	17, 8,12	13, 9,27
0, 31	35,56, 6	4, 36, 55	22, 19, 9	9,9890301	17,42,14	13,36,56
0, 32	37, 7,24	4, 46, 36	23, 2,51	9,9882707	18,16,15	14, 4,33
0, 33	38,18,55	4, 56, 22	23, 46, 36	9,9874816	18,50,14	14,32,19
0, 34	39,30,37	5, 6, 13	24, 30, 24	9,9866622	19,24,11	15, 0,12
0, 35	40,42,30	5, 16, 9	25, 14, 16	9,9858118	19,58, 7	15,28,14
0, 36	41,54,35	5, 26, 10	25, 58, 11	9,9849297	20,32, 1	15,56,24
0, 37	43, 6,53	5, 36, 17	26, 42, 10	9,9840153	21, 5,53	16,24,43
0, 38	44,19,25	5, 46, 30	27, 26, 13	9,9830677	21,39,43	16,53,12
0, 39	45,32,12	5, 56, 50	28, 10, 20	9,9820861	22,13,30	17,21,52
0, 40	46,45,13	6, 7, 16	28, 54, 31	9,9810698	22,47,15	17,50,42
0, 41	47,58,28	6, 17, 48	29, 38, 46	6,9800178	23,20,58	18,19,42
0, 42	49,12, 0	6, 28, 28	30, 23, 69	9,9789291	23,54,38	18,48,54
0, 43	50,25,49	6, 39, 15	31, 7, 31	9,9778027	24,28,16	19,18,18
0, 44	51,39,55	6, 50, 10	31, 52, 1	9,9766376	25, 1,51	19,47,54
0, 45	52,54,19	7, 1, 12	32, 36, 35	9,9754327	25,35,22	20,17,43
0, 46	54, 9, 0	7, 12, 23	33, 21, 14	9,9741866	26, 8,51	20,47,45
0, 47	55,24, 2	7, 23, 43	34, 6, 0	9,9728983	26,42,17	21,18, 2
0, 48	56,39,26	7, 35, 13	34, 50, 53	9,9715663	27,15,40	21,48,33
0, 49	57,55,10	7, 46, 52	35, 35, 51	9,9701891	27,48,59	22,19,19
0, 50	59,11,15	7, 58, 40	36, 20, 54	9,9687653	28,22,14	22,50,21

n	$\lambda + \mu + n \cos \lambda$	λ	$\lambda + n \cos \lambda$	$l\sqrt[4]{(1-nn)}$	$n \cos \lambda$	μ
0, 50	59, 11, 15	7, 58, 40	36, 20, 54	9,9687653	28, 22, 14	22, 50, 21
0, 51	60, 27, 44	8, 10, 39	37, 6, 4	9,9672932	28, 55, 25	23, 21, 40
0, 52	61, 44, 36	8, 22, 49	37, 51, 21	9,9657712	29, 28, 32	23, 53, 15
0, 53	63, 1, 56	8, 35, 12	38, 36, 47	9,9641973	30, 1, 35	24, 25, 9
0, 54	64, 19, 41	8, 37, 47	39, 12, 20	9,9625696	30, 34, 33	24, 57, 21
0, 55	65, 37, 52	8, 50, 34	39, 58, 0	9,9608860	31, 7, 26	25, 29, 52
0, 56	66, 56, 30	9, 13, 33	40, 53, 47	9,9591443	31, 40, 14	26, 2, 43
0, 57	68, 15, 42	9, 26, 49	41, 39, 46	9,9573420	32, 12, 57	26, 35, 56
0, 58	69, 35, 25	9, 40, 18	42, 25, 52	9,9554766	32, 45, 34	27, 9, 33
0, 59	70, 55, 43	9, 54, 2	43, 12, 6	9,9535452	33, 18, 4	27, 43, 37
0, 60	72, 16, 32	10, 8, 2	43, 58, 30	9,9515450	33, 50, 28	28, 18, 2
0, 61	73, 37, 58	10, 22, 20	44, 45, 5	9,9494726	34, 22, 45	28, 52, 53
0, 62	75, 0, 4	10, 36, 58	45, 31, 53	9,9473246	34, 54, 55	29, 28, 11
0, 63	76, 22, 51	10, 51, 55	46, 18, 52	9,9450973	35, 25, 57	30, 3, 59
0, 64	77, 46, 18	11, 7, 11	47, 6, 2	9,9427866	35, 58, 51	30, 40, 16
0, 65	79, 10, 28	11, 22, 49	47, 53, 25	9,9403880	36, 30, 36	31, 17, 3
0, 66	80, 35, 30	11, 38, 51	48, 41, 2	9,9378967	37, 2, 11	31, 54, 28
0, 67	82, 1, 18	11, 55, 16	49, 28, 53	9,9353076	37, 33, 37	32, 32, 25
0, 68	83, 27, 53	12, 12, 6	50, 16, 57	9,9326148	38, 4, 51	33, 10, 56
0, 69	84, 55, 28	12, 29, 25	51, 5, 19	9,9298121	38, 35, 54	33, 50, 9
0, 70	86, 24, 2	12, 47, 13	51, 53, 57	9,9268925	39, 6, 44	34, 30, 5
0, 71	87, 53, 37	13, 5, 32	52, 42, 53	9,9238485	39, 37, 21	35, 10, 44
0, 72	89, 24, 21	13, 24, 26	53, 32, 9	9,9206716	40, 7, 43	35, 52, 12
0, 73	90, 56, 15	13, 43, 56	54, 21, 45	9,9173525	40, 37, 49	36, 34, 30
0, 74	92, 29, 23	14, 4, 5	55, 11, 42	9,9138806	41, 7, 37	37, 17, 41
0, 75	94, 3, 53	14, 24, 55	56, 2, 3	9,9102445	41, 37, 8	38, 1, 50

n	$\lambda + \mu + n \cos \lambda$	λ	$\lambda + n \cos \lambda$	$l \sqrt[4]{(1-nn)}$	$n \cos \lambda$	μ
0.75	94. 3.53	14.24.55	56. 2. 3	9.9102445	41.37. 8	38. 1.50
0.76	95.39.51	14.46.32	56.52.50	9.9064310	42. 6.18	38.47. 1
0.77	97.17.19	15. 8.57	57.44. 2	9.9024253	42.35. 5	39.33.17
0.78	98.56.26	15.32.15	58.35.41	9.8982107	43. 3.26	40.20.45
0.79	100.37.21	15.56.31	59.27.51	9.8937681	43.31.20	41. 9.30
0.80	102.20.17	16.21.53	60.20.39	9.8890756	43.58.46	41.59.38
0.81	104. 5.23	16.48.26	61.14. 4	9.8841080	44.25.38	42.51.19
0.82	105.52.41	17.16.16	62. 8. 7	9.8788360	44.51.51	43.44.40
0.83	107.42.42	17.45.33	63. 2.53	9.8732250	45.17.20	44.39.49
0.84	109.45.27	18.16.27	63.58.28	9.8672344	45.42. 1	45.46.59
0.85	111.31.31	18.49.14	64.55. 5	9.8608157	46. 5.51	46.36.26
0.86	113.31.59	19.24. 1	65.52.38	9.8539102	46.28.37	47.38.21
0.87	115.34.16	20. 1. 8	66.51.16	9.8464462	46.50. 8	48 43. 0
0.88	117.42.10	20.41. 1	67.51.14	9.8383348	47.10.13	49.50.56
0.89	119.55.28	21.24. 3	68.52.41	9.8294636	47.28.38	51. 2.47
0.90	122.14.47	22.10.54	69.55.53	9.8196884	47.44.59	52.18.54
0.91	124.41.47	23. 2.12	71. 1. 5	9.8088189	47.58.53	53.39.42
0.92	127.15.18	23.59. 7	72. 8.42	9.7965978	48. 9.35	55. 6.36
0.93	130. 0.21	25. 2.51	73.19.17	9.7826638	48.16.26	56.41. 4
0.94	132.59.48	26.15.49	74.33.48	9.7664882	48.17.59	58.25. 0
0.95	136.13.59	27.40.23	75.52.40	9.7472511	48.12.17	60.20.19
0.96	139.50.41	29.22.17	77.18.18	9.7235790	47.56. 1	62.32.23
0.97	144. 1.57	31.30.30	78.53.24	9.6928969	47.22.54	65. 8.33
0.98	149. 8.43	34.25. 1	80.44.15	9.6494238	46.19.14	68,24.28
0.99	156.10.30	39. 6.11	83. 7.14	9.5747133	44. 1. 3	73. 3.16
1.00	180 0. 0	90. 0 0	90. 0. 0	$-\infty$	0. 0. 0	90. 0. 0
9375645	132.13.33	25.56.55	74.15. $5\frac{2}{3}$	9.7706712$\frac{1}{2}$	48.18.10$\frac{2}{3}$ maximum.	57.58.27$\frac{2}{3}$

OBSER-