1748

Mémoire sur l'effet de la propagation successive de la lumière dans l'apparition tant des planètes que des comètes

Leonhard Euler

MÉMOIRE

SUR L'EFFET DE LA PROPAGATION SUCCESSIVE DE LA LUMIERE DANS L'APPARITION TANT DES PLANETES QUE DES COMETES.

PAR MR. EULER.

Traduit du Latin.

LA LUMIERE aussi bien que le son, ne venant point tout à coup de l'objet lumineux jusqu'à nous, mais la propagation du rayon de lumiere sorti du corps lumineux se faisant par intervalles donnés, & demandant qu'il s'ecoule, pendant qu'elle dure, un certain espace de tems, il s'ensuit de là que le Corps lumineux ne doit pas nous paroître toujours dans la meme direction où il paroitroit, si les rayons de lumiere parvenoient à nous tout à coup, & sans aucun retardement. Par cette raison la plupart du tems les Corps celestes ne seront point effectivement dans les endroits du Ciel où nous les contemplons, & la place de chaque Astre, aprés avoir été observée, a besoin d'une correction qui en détermine le véritable lieu. En effet de la même maniere que nous ne rapportons point à cause de la refraction les Astres aux points du Ciel dans lesquels ils paroissent; pareillement la propagation successive de la lumiere demande une correction qui détermine le vrai lieu de chaque Astre dans le

 Ciel.

Ciel. Mr. *Bradley* ayant découvert le premier cette correction pour les Etoiles fixes, Mr. *Clairaut* a continué de ſuivre ſes vuës avec ſa pénetration ordinaire; & j'ai auſſi propoſé, il y a pluſieurs années, à l'Academie de Petersbourg une Diſſertation ſur ce ſujet, dans laquelle j'ai déterminé non ſeulement l'aberration des lieux obſervés des Etoiles fixes, mais j'ai fait voir encore, comment la même correction peut etre appliquée aux Planetes. J'ai ſuppoſé dans cette Diſſertation que les Planetes ſe mouvoient autour du Soleil dans des cercles, & d'un mouvement uniforme, tant afin de rendre le calcul moins pénible, que principalement parce que je ſoupçonnois que l'excentricité des orbites des Planetes ne cauſeroit pas une différence ſenſible. Cependant contre mon attente la correction pour Mercure s'eſt trouvée ſi conſiderable, qu'on ne ſauroit douter, que l'excentricité de l'orbite de cette Planete, qui eſt trés grande, n'y apportât beaucoup de changement. Ainſi à l'egard des Cometes qui s'approchent beaucoup plus du Soleil que Mercure, cette correction peut devenir ſi grande, qu'à moins que d'y avoir egard, on ne ſauroit déterminer par les Obſervations l'orbite véritable de la Comete. C'eſt ce qui m'engage à traitter de nouveau le même ſujet dans cette Diſſertation, & à rechercher tant pour les Planetes, que pour les Cometes ſurtout, une correction dans laquelle l'excentricité ſoit compriſe. Car plus les Aſtronomes perfectionnent l'Art d'obſerver, & font paroitre de ſagacité à demêler les moindres inegalites, & plus il eſt néceſſaire de bien faire connoître toutes les corrections, dont les Obſervations ont beſoin.

II. Pour expoſer donc avec plus de clarté cetté aberration de l'apparition des Aſtres cauſée par la propagation ſucceſſive de la Lumiere, il faut conſiderer deux lieux de chaque Aſtre, dont j'appellerai

rai

rai l'un le lieu apparent, l'autre le lieu veritable. Le lieu apparent est le point du Ciel où l'on observe l'Astre actuellement placé, aprés avoir soustrait l'effet de la réfraction ; le lieu veritable est le point du Ciel, où le même Astre paroitroit, si les rayons en parvenoient jusqu'à nous dans un instant, & sans aucun retardement. En effet on voit aisément, que si les rayons de lumiere se propageoient tout à coup jusqu'aux plus grandes distances, l'apparition des Astres ne seroit derangée ni par leur mouvement, ni par celui de la Terre; & que tout Astre en tout tems nous seroit visible dans le même point du Ciel, où nous l'aurions vu si dans ce tems là, & l'Astre, & la Terre, avoient été en repos. Il est encore évident, que si l'Astre & la Terre etoient dans un repos effectif, avec quelque lenteur que les rayons de l'Astre arrivassent à nous, l'Astre seroit toujours visible au même endroit qui lui conviendroit, au cas que les rayons nous en fussent envoyés avec la plus grande rapidité possible. Ainsi dans le cas où l'on conçoit l'Astre & la Terre en repos, il n'y aura absolument aucune difference entre le lieu apparent de l'Astre & le veritable. Mais si la Terre, ou l'Astre, ou l'un & l'autre se meuvent, il est facile de comprendre que le lieu apparent differe du véritable d'une maniere proportionnée à la raison qu'il y a entre la vitesse de l'un ou de l'un & l'autre, & la vitesse de la lumiere, & suivant que les directions des mouvemens, tant de ces Corps mêmes que des rayons de lumiere, seront plus obliques entr'elles.

III. Les Observations faites sur les Eclipses des Satellites de Jupiter ont mis les Astronomes en etat de conclurre que la vitesse des rayons de lumiere est si grande, qu'il ne leur faut qu'environ 8 minutes pour parcourir l'espace qui separe le Soleil de la Terre. Ainsi, en concevant que la Terre décrit autour du Soleil un Cercle, dont

le

le rayon soit $= c$, & qui soit égal à la distance moyenne de la Terre au Soleil, les rayons de lumiere se propagent en 8 minutes par l'espace c, & comme leur vitesse est censée perpetuellement uniforme, elles mettront environ 50 minutes à parcourir un espace egal à la circonference de ce Cercle, ou $\frac{710}{113} c$. Puis donc que la Terre décrit la circonference de ce Cercle dans une année de 365; 6 & 8′ ou dans un tems de 525968′ la vitesse des rayons de lumiere sera à la vitesse moyenne de la Terre, comme 10464 à 1. Ainsi en posant la vitesse moyenne de la Terre $= \alpha$, la vitesse des rayons de lumiere sera $= 10464\, \alpha$. Or les Etoiles fixes etant en repos, & les vitesses des Planetes & des Cometes pouvant etre comparées avec la vitesse moyenne de la Terre; cette proportion de la vitesse de la lumiere à la vîtesse moyenne de la Terre suffira, pour déterminer toutes les corrections nécessaires en Astronomie, entant qu'elles naissent de cette propagation successive de la Lumiere.

Fig. I. IV. Que la Terre ou le Spectateur A soit donc mû suivant la direction Aa avec une vitesse donnée, qui soit $= u$. Que l'Astre soit en repos en S, d'où les rayons soient envoyés de tous cotés avec la vitesse sus-exprimée, que nous poserons pour abreger $= k$, ensorte que $k = 10464\, \alpha$, & etant la vitesse moyenne de la Terre dans son orbite. Les rayons partis de S frapperont donc l'oeil du spectateur en A avec cette vitesse k suivant la direction SQ, mais comme l'oeil lui-même n'est pas en repos, mais qu'il avance avec une vitesse $= u$ suivant la direction Aa, l'effet des rayons en sera alteré, & ils ne représenteront point l'Astre, comme etant placé dans la direction AS, mais dans quelque autre direction As, dont il faudra juger par la composition du mouvement, comme on le fait à l'egard de la direction du coup dans la collision des corps. En

effet,

effet, lorsque le rayon frappe l'oeil ſuivant la direction $A\Sigma$, & que l'oeil avance en même tems ſuivant la direction Aa, le mouvement de l'oeil etant tranſporté au rayon dans la direction contraire $A\alpha$, le rayon affectera l'oeil, comme s'il venoit frapper cet organe en repos ſuivant les directions $A\Sigma$, & $A\alpha$. Qu'on prenne donc ſuivant les regles connües les droites $A\Sigma$ & $A\alpha$ en raiſon des vîteſſes de la lumiere & de l'oeil, ou comme k à u, en achevant le parallelogramme $A\alpha\sigma\Sigma$, la diagonale $A\sigma$ repréſentera tant la direction que la vîteſſe, avec laquelle les rayons partis de l'Aſtre S agiſſent ſur la vüe du ſpectateur en A. Ou bien, ce qui revient au même, qu'on prenne ſuivant la direction du mouvement du ſpectateur Aa la droite Aa qui ſoit à la diſtance AS, comme la vîteſſe du ſpectateur u à la vîteſſe de la lumiere k, en conſtruiſant le parallelogramme $ASsa$, la diagonale As donnera le lieu vû ou apparent de l'Aſtre. Or la direction AS repreſentera le lieu vrai de l'Aſtre, l'angle SAs ſera donc la difference entre le lieu apparent & le vrai.

§. V. Si le lieu vrai de l'Aſtre eſt donné, ou la direction AS, on en pourra déduire aiſément le lieu apparent ou la direction As. Car qu'on ſuppoſe l'angle $SAa = p$, & qu'on exprime les lignes AS, Aa par les valeurs proportionelles k & u, à cauſe du coſ. $ASs = -\operatorname{coſ} p$. on aura $As = \sqrt{(kk + uu + 2ku \operatorname{coſ} p)}$ & puisque $As : Ss = \operatorname{ſin} ASs : \operatorname{ſin} SAs$, il en réſultera $\operatorname{ſin} SAs =$

$$\frac{u \operatorname{ſin} p}{\sqrt{(kk + uu + 2ku \operatorname{coſ} p)}} : \& \operatorname{coſ} SAs = \frac{k + u \operatorname{coſ} p}{\sqrt{(k^2 + u^2 + 2ku \operatorname{coſ} p)}}$$

& par conſequent $\operatorname{tang} SAs = \frac{u \operatorname{ſin} p}{k + u \operatorname{coſ} p}$. Mais la vîteſſe k etant, comme nous l'avons vu, fort grande par rapport à la vîteſſe u, la tangente de cet angle SAs deviendra ſi petite qu'on pourra la prendre

prendre avec assurance pour la mesure de l'angle même; & par cette raison encore la fraction $\frac{u \sin p}{k}$ fournira l'indication la plus prochaine de la valeur de l'angle SAs. Ainsi en connoissant le lieu vrai AS de l'Astre S on trouvera son lieu apparent As, par la soustraction faite à l'angle donné SAa de l'angle SAs, dont la tangente trouvée est $= \frac{u \sin p}{k + u \cos p}$. Au contraire si le lieu apparent As de l'Astre est donné, on déterminera son lieu vrai de cette maniere. Qu'on pose l'angle connu $sAa = q$, qui etant égal à l'angle AsS donnera $AS : \sin q = Ss : \sin SAs$, d'où résulte $\sin SAs = \frac{u \sin q}{k}$. Donc l'angle observé $sAa = q$ doit etre augmenté de l'angle SAs, dont le sinus est $= \frac{u \sin q}{k}$, pour avoir le vrai lieu AS, ou l'Astre paroîtroit, si la vîtesse de la lumiere etoit infinie.

VI. La Terre ayant un double mouvement, le diurne & l'annuel, il faudroit par conséquent employer une double correction pour chercher le vrai lieu de chaque Astre. Mais puisque la vîtesse du mouvement diurne, même sous l'equateur, est presque 60 fois plus petite que la vîtesse du mouvement annuel, on s'apercevra aisement que l'aberration, qui résulte du mouvement diurne, sera si petite qu'il sera permis de la negliger par raport à l'autre, qui vient du mouvement annuel, & ne monte que trés rarement à une minute: de sorte que la premiere ne sauroit presque jamais monter à une seconde. Or comme dans les observations on néglige les tierces, cette correction peut etre omise à bon droit. Ainsi je ne considererai que le seul mouvement annuel de la Terre, & les formules trouvées ci-

dessus

deſſus fourniront aiſément les lieux vrais, tant du Soleil que des Etoiles fixes. Et d'abórd je chercherai la correction pour les Etoiles fixes placées dans l'Ecliptique, lesquelles n'ayant aucune latitude, & la propagation ſucceſſive de la lumiere ne pouvant leur en donner, la correction ſe rapportera à la ſeule longitude. Que la Terre ſe meuve dans l'orbite Elliptique AT autour du Soleil placé dans l'un de ſes foyers C, que A ſoit le perihélie, & T le lieu de la Terre d'où l'Etoile fixe S placée dans le plan de l'Ecliptique eſt obſervée. Qu'on ſuppoſe la vîteſſe de la Terre en $T = u$, par laquelle elle avance ſuivant la direction de la tangente Tt. Si donc le lieu vrai TS de l'Etoile fixe eſt donné, & que l'angle STt ſoit ſuppoſé $= p$, la tangente de l'angle STs ſera $= \frac{u \sin p}{k + u \cos p}$, & ainſi il faudra ajouter cet angle STs à la vraye longitude TS de l'Etoile, pour en tirer ſa longitude apparente Ts. Mais ſi c'eſt la longitude apparente Ts qui ſoit donnée, & que l'angle sTt ſoit ſuppoſe $= q$, la correction STs doit etre ſouſtraite de la longitude apparente, pour avoir la longitude vraye TS, & on aura ſin $STs = \frac{u \sin q}{k}$. Si donc la Terre décrivoit un cercle autour du Soleil, l'angle CTt feroit perpetuellement droit, & ſa vîteſſe u deviendroit $= \alpha$. Et en poſant l'angle $CTS = r$, qui réſulte ſi l'on ſouſtrait la longitude de l'Etoile de la longitude du Soleil, l'angle STt ſera $= p = r - 90°$ & par conſequent $\sin p = - \cos r$ & $\cos p = \sin r$. Ce qui donne la tangente de l'angle $STs = \frac{-\alpha \cos r}{k + \alpha \sin r}$. Mais ſi r déſigne l'angle apparent CTs, on trouvera le ſinus de la correction ou de l'angle $STs = \frac{-\alpha \cos r}{k}$. *Fig.* II.

VII. Si la Terre ſe mouvoit donc dans un cercle autour du Soleil, il faudroit corriger de la maniere ſuivante les longitudes obſervées des Etoiles fixes qui ſont placées dans l'Ecliptique. Qu'on ſouſtraiſe la longitude obſervée T*s* de l'Etoile de la longitude du Soleil, & que la difference ſoit ſuppoſée $= r$, laquelle etant trouvée, & le ſinus de l'angle ST*s* etant $= \frac{-\alpha \operatorname{cof} r}{k}$, il faut ſouſtraire de la longitude obſervée T*s* l'angle dont le ſinus eſt $\frac{-\alpha \operatorname{cof} r}{k}$, ou, ce qui revient au même, y ajouter l'angle dont le ſinus eſt $\frac{\alpha \operatorname{cof} r}{k}$. Il paroit par là que ſi l'angle r eſt ou 0^s, ou 1^s, ou 2^s, ou 9^s, ou 10^s, ou 11^s, la longitude apparente doit augmenter, mais que dans les autres ſignes 3^s, 4^s, 5^s, 6^s, 7^s, 8^s, elle doit diminuer. Or cette correction, puiſque nous trouvons $k = 10464\,\alpha$, ſera toujours fort petite, en ſorte que cet angle peut etre cenſé égal au ſinus même. Comme donc $\frac{\alpha \operatorname{cof} r}{k}$ eſt $= \frac{\operatorname{cof} r}{10464}$, il faut d'abord ſouſtraire du logarithme du coſinus de l'angle r, $l\, 10464 = 4{,}0196977$, & l'on aura par ce moyen le logarithme du ſinus de l'angle cherché, qui etant égal à l'angle même, ſi l'on ſouſtrait encore $4{,}6855749$, le nombre qui répond au logarithme reſtant donnera la correction exprimée en ſecondes. Ou bien que du logarithme $\operatorname{cof} r$, on ſouſtraiſe dabord $8{,}7052726$, & l'on aura le logarithme du nombre des ſecondes, qui fourniſſent la correction deſirée. Ainſi une Etoile fixe etant obſervée en conjonction avec le Soleil, de maniere que l'angle r ſoit $= 0$ ſa longitude doit augmenter preſque de $20''$. De là il

s'enſuit

s'ensuit que la longitude observée du Soleil sera perpetuellement moindre que la veritable, & cela de 20″, puisque le Soleil doit etre regardé comme une étoile fixe. C'est pourquoi si les Tables Solaires marquoient le lieu vrai du Soleil, où cet Astre paroîtroit si les rayons parvenoient à nous sans retardement, on seroit obligé de soustraire constamment 20″ de ce lieu, pour remettre la Theorie d'accord avec les Observations. Mais si l'on observe une Etoile fixe en opposition avec le Soleil, sa longitude doit être diminuée de 20″, & par cette raison lorsqu'on voit une Etoile fixe en opposition avec le Soleil, elle sera encore eloignée de 40″ de sa vraye opposition, & ce n'est qu'au bout de quelque tems, c'est à dire, aprés 16′ 14″ qu'elle y parviendra. Mais c'est dans la conjonction & dans l'opposition que l'aberration est la plus grande, elle devient moindre dans les autres eloignemens, & evanouït tout à fait dans les quadratures. Ce sont donc ces derniers lieux qu'il faut choisir, quand on veut rechercher la parallaxe annuelle des Etoiles fixes.

VIII. Les choses iroient ainsi, si l'orbite de la Terre etoit un cercle parfait, dans le centre duquel le Soleil fut placé; mais comme l'ellipse que la Terre décrit est un peu excentrique, la correction qu'on vient de trouver en souffrira un changement à peine sensible. Cependant, afin de trouver la correction pour les Planetes & pour les Cometes, il est expédient d'accommoder ici le calcul à l'orbite elliptique de la Terre. Soit donc A le perihélie, & la distance $AC = a$, le demi parametre de l'orbite $= b$, l'anomalie vraye ou l'angle $ACT = v$, & la distance de la Terre au Soleil $CT = y$, on aura d'abord $y = \frac{ab}{a + (b-a)\cos v}$ ou $\cos v = \frac{a(b-y)}{(b-a)y}$. Par consequent la distance de l'Aphelie au Soleil, en posant $v = 180^{\circ}$ sera $= \frac{ab}{2a-b}$; de plus l'axe transverse $= \frac{2aa}{2a-b}$, & la distance des foyers $= \frac{2a\,(b-a)}{2a-b}$; donc la distance moyenne, qui est egale à la moitié de l'axe transverse sera $= \frac{aa}{2a-b}$, qui doit par consequent etre egale à la quantité c, de sorte que $\frac{aa}{2a-b} = c$. Si l'on se propose donc de chercher la correction pour les habitans des autres Planetes, alors il faudra tirer les valeurs des Lettres a & b de l'orbite vraye de chacune. Qu'on pose de plus l'angle ATC $= \varphi$ on trouvera par les coniques $\text{tang}\,\varphi = \frac{ab}{(b-a)\,y\,\sin v}$, & si la vîtesse de la Terre dans le lieu T est reputée $= u$ on aura $\alpha : u = \frac{1}{\sqrt{c}} : \frac{\sqrt{b}}{y \sin \varphi}$; & par consequent $u = \frac{\alpha \sqrt{bc}}{y \sin \varphi}$. Or $\sin \varphi = \frac{\alpha \sqrt{b}}{\sqrt{y\,(2aa-2ay+by)}}$, & ainsi la vîtesse de la Terre en T savoir $u = \frac{\alpha \sqrt{c\,(2aa-2ay+by)}}{\alpha \sqrt{y}}$, formule qui exprime egalement la vîtesse de toute Planete dans chaque point de son orbite. A l'egard de la Terre, comme $2a-b$ est $= \frac{aa}{c}$ cela donnera $u = \frac{\alpha \sqrt{(2c-y)}}{\sqrt{y}}$. Si l'on pose donc, comme auparavant, l'eloignement de l'Etoile fixe au Soleil, ou l'angle CTS $= r$, on aura STt $= r - 180 + \varphi = p$, & par consequent comme le sinus de l'angle STt a été trouvé $= \frac{u \sin p}{k}$

$\frac{n \text{ ſin } p}{k}$, il ſera $= \frac{-u \text{ ſin } (r + \Phi)}{k} = \frac{-\alpha \sqrt{bc}}{ky} \cdot \frac{\text{ſin } (r + \Phi)}{\text{ſin } \Phi}$
$= \frac{-\alpha \sqrt{bc}}{ky} \left(\text{coſ } r + \frac{\text{ſin } r}{\text{tang } \Phi} \right)$, & par conſequent l'angle
$STt = \frac{-\alpha \sqrt{bc}}{ky} \left(\text{coſ } r + \frac{(b-a) y \text{ ſin } r. \text{ ſin } r}{a\, b} \right)$.

IX. Pour faciliter encore davantage l'uſage de cette formule, outre la diſtance moyenne de la Terre au Soleil $c = \frac{aa}{2a-b}$, employons l'excentricité, qui eſt la diſtance des foyers diviſée par l'axe transverſe $= \frac{b-a}{a}$; que l'on ſuppoſe cette fraction $\frac{b-a}{a} = n$, & l'on aura la diſtance du Perihélie au Soleil $a = c\ (1-n)$, la diſtance de l'aphelie au Soleil $= c\ (1+n)$ & le demi parametre $b = c\ (1-nn)$. Par conſequent ſi l'on ſuppoſe la diſtance de l'Aphelie au Soleil $=$ A, on aura $b = \frac{Aa}{c}$, d'où il eſt facile de déduire par les tables le demi parametre b pour chaque Planete. De plus y ſera $= \frac{(1-nn)c}{1+n \text{ coſ } v} = \frac{b}{1+n \text{ coſ } v}$; d'ou réſulte $\frac{\sqrt{bc}}{y} = \frac{1+n \text{ coſ } v}{\sqrt{(1-nn)}}$ & $\frac{(b-a)\, y \text{ ſin } v. \text{ ſin } r}{ab} = \frac{n \text{ ſin } v. \text{ ſin } r}{1+n \text{ coſ } v}$.
Par ce moyen on aura le ſinus de la correction ou de l'angle STs $= \frac{-\alpha}{k\sqrt{(1-nn)}} \left(\text{coſ } r + n \text{ coſ } (r-v) \right)$. Si nous tirons donc la droite CO paralléle à Ts, l'angle BCO ſera $= r-v$, & ainſi $r-v$ deſignera la diſtance apparente de l'Etoile à l'aphelie de l'orbite

l'orbite B, laquelle distance, comme elle est connuë, soit posée $= \theta$, & il en résultera $\sin STs = \frac{-\alpha}{k\sqrt{(1-nn)}}\left(\cos r + n \cos\theta\right)$ ou $\sin STs = \frac{-\alpha\sqrt{c}}{k\sqrt{b}}\left(\cos r + n \cos\theta\right)$ où $\frac{\alpha}{k}$ est $= \frac{1}{10464}$ & $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = \frac{c}{\sqrt{Aa}}$. Il y a donc pour orbite de la Terre $l\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} =$ 0, 0000125 & $n = 0, 01692$ & $l\,n = 8, 228400$. Ainsi puisqu'on doit ajouter au lieu de l'Etoile observé dans l'Ecliptique l'angle dont le sinus est $= \frac{\alpha\sqrt{c}}{k\sqrt{b}}$ $(\cos r + n \cos\theta)$ la correction sera la plus grande, si les deux angles r & θ evanouïssent, ou s'ils deviennent tous deux égaux à deux angles droits. Dans le premier cas l'Etoile sera observée dans l'Aphelie de la Terre placée dans son Perihélie, & par conséquent en conjonction avec le Soleil; dans lequel cas on doit donc ajouter à la longitude observée l'angle dont le sinus est $=$ $\frac{(1+n)\sqrt{c}}{10464\sqrt{b}}$, angle qui est de 20″ 3‴, au lieu qu'auparavant on l'avoit trouvé de 19″ 43‴. La difference dans la quantité de la correction qui procéde de l'excentricité de l'orbite de la Terre, ne parvenant donc jamais à une seconde, on peut en toute sureté regarder l'orbite de la Terre comme circulaire; & par la même raison la correction fournie ci-dessus pour les Etoiles fixes observées dans l'Ecliptique pourra etre employée sans erreur.

X. La formule trouvée $\frac{\alpha\sqrt{b}}{k\sqrt{c}}$ $(\cos r + n \cos\theta)$ met aussi en etat de déterminer quelle aberration les habitans des autres Planetes & par conséquent ceux des Cometes, doivent remarquer à

cause

caufe de la propagation fucceffive de la lumiere. Car fi l'on fuppofe que toute autre Planete du premier ordre ait la diftance moyenne au Soleil $= C$, la vîteffe moyenne $= A$, & le parametre $= 2b$, on trouvera le finus de l'angle d'aberration $= \frac{A\sqrt{C}}{k\sqrt{b}}\left(\text{cof}\, r + n\, \text{cof}\, \theta\right)$. Or. $A\sqrt{C}$ eft $= \alpha\sqrt{c}$, parce que les vîteffes moyennes font en raifon réciproque fousdoublée des diftances moyennes. C'eft pourquoi fi c défigne, comme il l'a fait jusqu'à préfent, la diftance moyenne de la Terre au Soleil, qu'on expofe ordinairement dans les Tables Aftronomiques par 100000, & que le demi parametre de la Planete en queftion foit $= b$, & l'excentricité $= n$, le finus de la correction, qui doit étre ajoutée à la longitude de toute Etoile fixe obfervée dans le meme plan de l'Orbite de la Planete, fera $= \frac{\sqrt{c}}{10464\sqrt{b}}(\text{cof}\, r + n\, \text{cof}\, \theta)$, où r marque la diftance de l'Etoile fixe au Soleil, & θ fa diftance du lieu de l'Aphelie. Il paroit par là que pour les Planetes fuperieures, dont le demi-coté droit b eft plus grand que celui de la Terre, la correction doit étre beaucoup moindre, & que les Planetes inferieures auront au contraire une plus grande correction. Mais la plus grande correction fera conftamment, quand, la Planete étant dans fon Perihélie, on obferve l'Etoile fixe, ou en conjonction, ou en oppofition avec le Soleil. Dans ces cas donc on aura cof $r =$ cof $\theta = \pm 1$. & le finus de la correction fera $= \frac{(1+n)\sqrt{c}}{10464\sqrt{b}}$. Soit la diftance du perihélie au Soleil $= a$, la diftance de l'Aphelie $= A$, & la diftance moyenne $= C$, b fera $= \frac{Aa}{C}$ & $1 + n = \frac{A}{C}$; lesquelles diftances feront le le ſinus de correction $= \frac{\sqrt{Ac}}{10464\sqrt{aC}}$. Qu'on prenne pour exemple l'orbite de Mercure, lequel etant dans ſon Perihélie, & la longitude de l'Etoile fixe obſervée en conjonction ou en oppoſition avec le Soleil, differera de la vraye d'un angle qu'on determine ainſi

$$
\begin{array}{rrl}
 & lA = & 4,\ 669131 \\
 & lc = & \underline{5,\ 000000} \\
 & lAc = & 9,\ 669131 \\
 & laC = & \underline{9,\ 075527} \\
\text{div. par } 2 & & \underline{0,\ 593604} \\
 & & 0,\ 296802 \\
\text{ſouſtr.} & & \underline{8,\ 705273} \\
 & & 1,\ 591529
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
la = & 4,\ 487704 \\
lC = & \underline{4,\ 587823} \\
 & 9,\ 075527
\end{array}
$$

La correction eſt donc 39″ 2‴

XI. A L'EGARD des Cometes, qui s'approchent beaucoup du Soleil, lorsqu'elles ſont dans le Perihélie, ſi leurs habitans obſervent une Etoile fixe en conjonction ou en oppoſition avec le Soleil, l'aberration doit étre encore plus grande. Car premiérement, comme on ſuppoſe qu'elles décrivent des Paraboles autour du Soleil, n ſera $= 1$, ce qui donnera à l'autre facteur $1 + n$ une plus grande valeur que dans les Planetes. Outre cela le demi-parametre b qui devient $= 2a$, ſera fort petit. Ainſi il y aura une trés grande correction, quand la Cométe ſera au Perihélie, & l'Etoile fixe y etant obſervée en oppoſition ou en conjonction avec le Soleil, elle ſera $= \frac{2\sqrt{c}}{10464\sqrt{2a}} = \frac{\sqrt{2c}}{10464\sqrt{a}}$. Donc dans la Comete de 1680, cette correction devoit etre fort conſiderable, puiſque de

toutes

toutes les Cometes, c'est celle qui s'est le plus approchée du Soleil; car *la* etoit = 2,8172032, ce qui donne

l 2 *c* =	5, 301030
l a =	2, 817203
div. par 2	2, 483827
	1, 241914
	8, 705273
	2, 536641

La correction etoit donc = 344″ = 5′ 44″.

Pour la derniere Comete de 1744. j'ai trouvé *la* = 4, 346783, & ainsi l'aberration d'une l'Etoile fixe observée en conjonction ou en opposition avec le Soleil, de la Comete située dans son Perihélie, devoit être 59″. Le lieu de la Terre observé de cette Comete dans son Perihélie devoit donc être dans la même aberration du lieu vrai, parce que dans ce tems là le Soleil, la Comete & la Terre etoient posés presque directement, & ainsi le cas rapporté ci-dessus avoit lieu. Mais cette correction ne procede que du mouvement de la Comete, & si l'on ajoute au calcul le mouvement de la Terre, cette aberration devra augmenter ou diminuer de 20″, suivant que le mouvement de la Terre & de la Comète auront la même direction, ou une direction contraire. Dans ce cas, comme l'un & l'autre mouvement vu du Soleil est direct, il faudroit soustraire 20″, si les deux mouvemens etoient dans le même plan; mais lorsque cela n'a pas lieu, il y a une autre route à suivre pour trouver la correction qui résulte des deux mouvemens, comme je le montrerai dans la suite.

XII. Je n'ai consideré jusqu'à présent que les Etoiles fixes qui sont situées dans le plan de l'Ecliptique, & j'ai determiné la difference entre leurs lieux vrais & leurs lieux apparens; à present je vais rechercher la correction des autres Etoiles fixes, qui sont placées hors du plan de l'Ecliptique. Comme non seulement la longitude, mais aussi la latitude des Etoiles fixes, peut etre alterée par la propagation successive de la lumiere, il faut examiner chacun de ces changemens à part. Pour proceder à cet examen je supposerai l'Orbite de la Terre circulaire, parce que j'ai déja fait voir que son excentricité ne cause aucune difference sensible. Soit donc C le Soleil placé au centre de l'orbite de la Terre, & T le lieu de la Terre. Qu'on pose, comme auparavant la distance $CT = c$, la vîtesse de la Terre suivant la direction $Tt = \alpha$, & la vîtesse de la lumiere $= k$, ou $k = 10464\ \alpha$. Qu'une Etoile fixe soit hors du plan de l'Ecliptique en S, & que de ce point on fasse tomber sur le plan de l'Ecliptique la perpendiculaire SR; si la lumiere parvenoit à nous en un instant, la direction de la droite TR fourniroit la longitude vraye de l'Etoile, & l'angle STR la latitude vraye, que je supposerai septentrionale, comme la Figure la représente. Qu'on méne à present, suivant les régles exposées ci-dessus la droite Ss paralléle à Tt, qui soit à TS comme α à k, la droite Ts sera le lieu apparent de l'Etoile. Qu'on fasse pareillement tomber de s sur le plan de l'Ecliptique la perpendiculaire sr, & l'on aura $sr = SR$ & $Rr = Ss$. Ainsi la droite Tr fournira la longitude apparente de l'Etoile, & l'angle sTr sa latitude apparente.

Fig. III.

XIII. Cela posé, disons l'angle $CTr = r$, qui résulte de l'operation par laquelle on soustrait la longitude de l'Etoile observée de la longitude du Soleil; & sa latitude apparente, ou l'angle $sTr = p$; alors l'angle rTt sera $= RrT = r - 90°$, d'où $\sin RrT = -\cos r$ & $\cos RrT = \sin r$. Qu'on suppose $TS = kz$, on aura $Ss = Rr = \alpha z$. De plus que $Ts = y$, on aura $rs = RS = y \sin p$, & $Tr = y \cos p$.

Le

Le triangle TRS donnera $TR^2 = k^2 z^2 - y^2 \sin p^2$, & par le triangle RrT on aura $TR^2 = y^2 \cos p^2 + \alpha^2 z^2 - 2\alpha y z \sin r \cos p$; d'où réſulte $(k^2 - \alpha^2) zz = y^2 - 2\alpha y z \sin r \cos p$. Comme donc $\sin RTr = \frac{Rr \sin TrR}{TR} = \frac{-\alpha z \cos r}{\sqrt{(k^2 z^2 - y^2 \sin p^2)}}$, cette expreſſion deviendra trop compliquée pour qu'on puiſſe s'en ſervir commodément dans le calcul. C'eſt pourquoi ſuppoſons que ce ne ſoit pas le lieu apparent de l'Etoile, qu'on propoſe, mais le lieu vrai pour en déduire l'apparent. Car comme la correction eſt trés petite, elle ne variera point, ſoit qu'on la détermine par le lieu vrai, ou par le lieu apparent. Ainſi ſi nous ſavons aſſigner le lieu apparent de l'Etoile par ſon lieu vrai, nous pourrons réciproquement déduire le lieu vrai du lieu apparent. Et même cela conviendra mieux aux uſages Aſtronomiques; car ſi l'on ſuppoſe que les lieux de toutes les Etoiles fixes ſont rapportés de la maniere la plus exacte dans les Tables, on pourra déterminer leurs lieux apparens pour quelque tems que ce ſoit.

XIV. Le lieu du Soleil etant donc trouvé pour le tems propoſé, il n'y a qu'à en ſouſtraire la longitude vraie de l'Etoile fixe tirée des Tables, & ſuppoſer l'angle reſtant $CTR = r$, l'angle RTt ſera $= r - 90°$, & par conſequent ſon ſinus $= -\cos r$ & le coſinus $= \sin r$. Soit de plus la latitude vraie $STR = p$, en poſant $TS = kz$, on aura $Ss = Rr = \alpha z$, $SR = Sr = kz \sin p$ & $TR = kz \cos p$. Par là on trouve tang $RTr = \frac{-\alpha \cos r}{k \cos p + \alpha \sin r}$. Mais ſi on prend r & p du lieu obſervé de l'Etoile, il faut alors ajouter à la longitude obſervée l'angle, dont la tangente $= \frac{\alpha \cos r}{k \cos p + \alpha \sin r}$.

 Enſuite

Enſuite dans le triangle TRr, on trouve le coté T$r = z\, V(k^2 \operatorname{cof} p^2 + 2\alpha k \operatorname{cof} p \operatorname{fin} r + \alpha\alpha)$ ce qui fournit la tangente de la latitude apparente, ou tang. sT$r = \frac{k \operatorname{fin} p}{V(k^2 \operatorname{cof} p^2 + 2\alpha k \operatorname{cof} p \operatorname{fin} r + \alpha\alpha)}$. Et pour l'exprimer plus commodément, qu'on répute l'angle dont la tangente $= \frac{\alpha \operatorname{cof} r}{k \operatorname{cof} p + \alpha \operatorname{fin} r}$ eſt trouvée, $= \Phi$, en forte que Φ ſoit la difference entre la longitude vraie & la longitude apparente, $\operatorname{fin} \Phi$ ſera $= \frac{\alpha \operatorname{cof} r}{V(k^2 \operatorname{cof} p^2 + 2\alpha k \operatorname{fin} r \operatorname{cof} p + \alpha\alpha)}$, d'où tang sT$r = \frac{k \operatorname{fin} p \operatorname{fin} \Phi}{\alpha \operatorname{cof} r}$. De cette maniere donc par la correction de la longitude Φ déja connüe on trouve la latitude apparente, dont la tangente eſt $= \frac{k \operatorname{fin} p. \operatorname{fin} \Phi}{\alpha \operatorname{cof} r}$. Mais comme l'angle Φ eſt trés petit, ſon ſinus ſera presque égal à la tangente, qui a été trouvée $= \frac{\alpha \operatorname{cof} r}{k \operatorname{cof} p + \alpha \operatorname{fin} r}$; laquelle etant ſubſtituée au ſin Φ, on aura tang sT$r = \frac{k \operatorname{fin} p}{k \operatorname{cof} p + \alpha \operatorname{fin} r}$. Or il paroit que ce dénominateur $k \operatorname{cof} p + \alpha \operatorname{fin} r$ ne differe pas ſenſiblement du précedent $V(k^2 \operatorname{cof} p^2 + 2\alpha k \operatorname{fin} r \operatorname{cof} p + \alpha\alpha)$. A moins donc que le terme $k \operatorname{cof} p$ ne ſoit trés petit, on peut en ſureté negliger cette difference; mais s'il eſt presque $p = o$, ce qui arrive ſi l'Etoile eſt trés prochaine d'un Pole de l'Ecliptique, alors cette erreur peut devenir ſenſible; & c'eſt dans ce ſeul cas qu'il convient de ſe ſervir de la formu-

formule précedente $\tang sTr = \frac{k \sin p}{\sqrt{(k^2 \cos p^2 + 2\alpha k \sin r \cos p + \alpha\alpha)}}$.

XV. L'APPLICATION de ces formules eſt trés difficile, ſi l'Etoile eſt fort voiſine du pole de l'Ecliptique, parce qu'alors ſa longitude & la diſtance CTR deviennent incertaines, & au Pole même tout à fait nulles. Cependant, ſi nous faiſons attention à la nature même de la ſolution, les aberrations de ces Etoiles peuvent etre aiſément déterminées. En effet ſuppoſons que l'Etoile fixe S ſoit placée au Pole même de l'Ecliptique, la droite ST ſera normale au Plan de l'Ecliptique, & TR evanouïra; donc Rr tombera ſur Tt, & ainſi cette droite Tt repreſentera la longitude apparente de l'Etoile. Pour avoir cette longitude, il faut perpetuellement ſouſtraire de la longitude du Soleil trois ſignes ou 90°. Enſuite, puiſque dans ce cas la tangente de la diſtance apparente de l'Etoile au Pole eſt exprimée par la fraction $\frac{\alpha}{k}$, cette diſtance ſera de 20″. Par conſequent, ſi l'Etoile fixe etoit toujours au Pole de l'Ecliptique, elle en paroîtroit conſtamment eloignée de 20″ & ainſi on la verroit avec une longitude moindre de trois ſignes que la longitude du Soleil. Cette Etoile paroitroit decrire dans l'eſpace d'un an autour du Pole vrai un cercle, dont le rayon ſeroit de 20″. Pareillement auſſi les Etoiles fixes les plus proches du Pole de l'Ecliptique paroîtront decrire de ſemblables cercles autour de leurs lieux vrais, de maniere qu'on ne les verra jamais dans leurs lieux vrais. Ainſi s'il arrivoit qu'on obſervât une Etoile fixe dans le Pole même de l'Ecliptique, ſon lieu vrai ſeroit diſtant du Pole de 20″, & ſa longitude vraye ſe trouveroit en ajoutant trois ſignes à la longitude du Soleil. Si nous regardons donc à ce mouvement circulaire, par lequel

les

les Etoiles dans la proximité du Pole de l'Ecliptique paroissent tourner autour de leurs lieux vrais, on pourra déterminer pour un tems quelconque le lieu apparent de chacune d'elles. Mais comme il n'existe aucune Etoile remarquable qui soit si voisine du Pole de l'Ecliptique, que le terme $k \cos p$ evanouïsse en quelque sorte, nous n'avons pas besoin de cette précaution.

XVI. Je passerai donc aux Etoiles fixes un peu plus distantes du Pole de l'Ecliptique, ou dont la latitude p differe considérablement de 90°. Comme en posant l'angle CTR $= r$, qui résulte lorsqu'on soustrait la longitude de l'Etoile de la longitude du Soleil, on doit soustraire de la longitude vraye de l'Etoile l'angle dont la tangente $= \frac{\alpha \cos r}{k \cos p + \alpha \sin r}$, pour trouver son lieu apparent; il sera aisé de rejetter dans le dénominateur le terme $\alpha \sin r$ plutot que l'autre $k \cos p$, de sorte que la tangente de la correction se trouve $= \frac{\alpha \cos r}{k \cos p}$; laquelle expression etant fort petite pourra être prise pour la correction même. Réciproquement donc si p designe la latitude observée de l'Etoile, & r l'angle observé CTR, il faudra ajouter à la longitude observée de l'Etoile l'angle $= \frac{\alpha \cos r}{k \cos p}$ pour trouver sa longitude vraye, où la valeur de la fraction $\frac{\alpha}{k}$ est $= \frac{1}{10464}$. Pour ce qui regarde la variation de la latitude, si p est la latitude vraye, la tangente de la latitude apparente sera $= \frac{k \sin p}{k \cos p + \alpha \sin r}$. Ainsi si la latitude apparente est dite $= p - \varphi$, tang φ deviendra $= \frac{\alpha \sin p \sin r}{k + \alpha \sin r \cos p}$, & par conséquent φ

presque

presque tout à fait $\varphi = \frac{\alpha}{k}$ ſi p ſi r. On doit donc ſouſtraire de la latitude vraye p l'angle $= \frac{\alpha}{k}$ ſi p. ſi r, pour en tirer la latitude apparente. Il faut proceder de la maniere ſuivante dans la correction du lieu apparent de chaque Etoile fixe.

Soit au tems de l'Obſervation la longitude du Soleil $= L$, *la longitude de l'Etoile fixe obſervée* $= M$, *& ſa latitude obſervée* $= p$, *qu'on ſuppoſe* $L - M = r$; *la longitude vraye de l'Etoile ſera* $=$ $M + \frac{\text{coſ}\, r}{10464\, \text{coſ}\, p}$ *& ſa latitude vraie* $= p + \frac{\text{ſin}\, r.\ \text{ſin}\, p}{10464}$.

XVII. Le lieu apparent de chaque Etoile fixe etant donc toujours différent de ſon lieu veritable, ou à l'egard de la longitude, ou à l'egard de la latitude, ou à l'un & à l'autre enſemble, on verra chaque Etoile fixe ſe mouvoir dans un petit eſpace pendant l'intervalle d'un an. Pour repréſenter ce mouvement apparent de chaque Etoile fixe dans le Ciel, conſiderons la Terre comme etant en repos dans le point T, & que le cercle ABCD ſoit l'Ecliptique, ſuivant laquelle le Soleil ſemble ſe mouvoir, ſuivant l'ordre des lettres A, B, C, D, A. Sur ce cercle ABCD, comme ſur une baſe, que l'on conçoive conſtruit l'Hemiſphere, dont le point le plus elevé P repréſentera l'un des Poles de l'Ecliptique; & qu'à la ſurface de cet Hemiſphére le point O ſoit le lieu vrai de quelque Etoile fixe; qu'on tire par ce point du Pole B l'eſpece de Meridien POB, le point B ſera la longitude vraye de l'Etoile fixe, & l'arc du Meridien BO ſa latitude vraye $= p$. Suppoſons à preſent que le Soleil ſoit en A, l'angle r ſera $= -90°$, ſi l'on conçoit le point B comme etant diſtant d'un angle droit des deux points cardinaux A & C. *Fig.* IV.

Dans ce cas donc à cauſe de coſ $r = o$, la longitude apparente ne differera pas de la véritable, mais à cauſe de ſin $r = -1$, il faudra ajouter à la latitude vraye p le petit arc $= \frac{\text{ſin } p}{10464}$, pour trouver la latitude apparente. En prenant donc dans le Meridien PB le petit arc $Oa = \frac{\text{ſin } p}{10464}$, a ſera le lieu apparent de l'Etoile, lorsque le Soleil eſt au point A. Mais au bout de ſix mois, quand le Soleil aura atteint C, à cauſe de $r = + 90°$, la longitude apparente de l'Etoile s'accordera de nouveau avec la vraye, mais il faudra diminuer la latitude de l'angle $\frac{\text{ſin } p}{10464}$. Ainſi, en prenant le petit arc $Oc = \frac{\text{ſin } p}{10464}$, l'Etoile paroitra au point c, lorsque le Soleil eſt au point C. Mais ſi le Soleil ſe trouve au point B, l'Etoile etant parvenüe à la conjonction ſuivant la longitude, on aura $r = o$. Donc la latitude apparente s'accordera dans ce cas avec la vraye; mais on doit ſouſtraire de la longitude vraye l'angle $= \frac{1}{10464 \text{ coſ } p}$. En prenant donc l'arc $B\beta = \frac{1}{10464 \text{ coſ } p}$, en tirant le Meridien $P\beta$, & en y prenant $\beta b = BO = p$, b ſera le lieu apparent de l'Etoile, lorsque le Soleil eſt au point B. De même en prenant $B\delta = \frac{1}{10464 \text{ coſ} p}$, & en tirant le Meridien $P\delta$, ſi on y prend $\delta d = BO = p$, d ſera le lieu apparent de l'Etoile lorsque le Soleil eſt en D, c'eſt à dire, quand il eſt en oppoſition avec l'Etoile ſuivant la longitude. Ainſi ſi l'on conçoit un cercle moindre mené par les points b, O, d, duquel cercle la portion bOd pourra etre reputée une ligne droite

il

il sera, $B\beta : Ob = B\delta : Od = 1 : \cos p$, & par conséquent $Ob = Od = \frac{1}{10464}$. Ainsi l'ecart de part & d'autre Ob & Od vaudra 20″, à quoi l'un & l'autre ecart aura suivant la latitude Oa ou Oe la même raison que sin p au sinus total. L'Etoile fixe O paroitra donc parcourir dans l'espace d'un an la circonference de l'Ellipse *abcd*, dont le plus grand Axe *bd* paralléle au plan de l'Ecliptique soutendra dans le Ciel un petit arc de 40″, & le moindre axe sera au plus grand, comme le sinus de la latitude vraye au sinus total. Pendant que le Soleil avance dans l'Ecliptique suivant l'ordre des lettres A B C D, l'Etoile fixe O semble décrire la circonference de l'Ellipse suivant l'ordre des lettres *a, b, c, d*. Si donc la latitude de l'Etoile *p* evanouït, le moindre axe de cette Ellipse *ac* evanouïra en même tems, & l'Etoile paroitra s'ecarter d'un coté & de l'autre de son lieu vrai dans l'Ecliptique jusqu'à 20″. Plus la latitude de l'Etoile fixe O devient donc grande, plus le moindre axe de l'ellipse *ac* s'accroîtra, jusqu'à ce qu'il devienne égal à l'axe transverse *bd*, au cas que l'Etoile fixe soit placée dans le Pole de l'Ecliptique P. Ainsi l'on verra dans ce cas l'Etoile polaire décrire autour de son lieu vrai un cercle, dont le rayon soutendra dans le Ciel un arc de 20″. Tout cela montre qu'on ne voit jamais aucune Etoile fixe située hors du plan de l'Ecliptique dans son lieu vrai; mais que deux fois par an on voit dans son lieu vrai chacune des Etoiles fixes qui sont dans le plan de l'Ecliptique, ce qui arrive quand leur longitude est distante de 90° de la longitude du Soleil. Ces seules Etoiles fixes donc, & seulement dans ces tems, sont propres à la recherche qu'on voudroit faire de leur Parallaxe, sans avoir égard à la propagation successive de la lumiere.

XVIII. POUR RECHERCHER présentement ce qui fait mon principal objet dans ce Memoire, savoir les erreurs que la propagation successive de la lumiere répand sur les observations qui concernent les Planetes & les Cometes, je considererai d'abord la Terre, comme si elle etoit en repos, pour découvrir quelle differẽnce le seul mouvement de l'Astre peut produire entre le lieu vrai & le lieu observé. *Fig.* V. Que la Terre soit donc en repos en T, & que la Planete ou la Comete se meuve suivant la direction ΣS avec une vîtesse donnée, qui soit $= u$, la vîtesse de la lumiere etant comme jusqu'ici $= k$. Soit ΣT le rayon par lequel on voit l'Etoile, il est nécessaire que l'Etoile ait été en Σ, lorsque le rayon en est parti, & par consequent la droite $T\Sigma$ donnera le lieu apparent de l'Etoile. Mais comme l'Etoile elle même se meut, chaque rayon de lumiere sera mu d'un mouvement composé, savoir de celui qui lui est propre, & du mouvement de l'Etoile, & ainsi la droite ΣT sera la diagonale de quelque Parallélogramme $\Sigma S T \Theta$, dont les cotés $\Sigma \Theta$ & ΣS seront entr'eux comme la vîtesse de la lumiere à la vîtesse de l'Etoile; & le coté ΣS etant placé dans la direction du mouvement de l'Etoile, cela détermine en même tems la position de l'autre coté $\Sigma\Theta$. Comme donc $\Sigma\Theta$ est à ΣS de même que k à u, le rayon $\Sigma\Theta$ que l'Etoile enverroit, si elle etoit en repos, parviendra à cause du mouvement de l'Etoile en T, & frappera l'oeil du spectateur. Mais pendant que ce rayon se propage de Σ en T, l'Etoile s'avance vers S, & ainsi lorsque le spectateur placé en T voit l'Etoile en Σ, l'Etoile est effectivement au point S, & elle y paroîtroit, si les rayons arrivoient tout d'un coup à nous. Ainsi lorsque la droite $T\Sigma$ représente le lieu apparent de l'Etoile, le lieu vrai est exprimé par la droite TS. & ainsi le lieu vrai differera du lieu apparent de l'ange $ST\Sigma$, difference

difference que l'on infere du triangle ΣTS, dans lequel la proportion des cotés $TS : S\Sigma$ eſt $= k : u$; de plus l'orbite connuë de l'Etoile & ſon mouvement donnent l'angle $TS\Sigma$, lequel etant ſuppoſé $= \phi$, on aura tang $ST\Sigma = \frac{u \sin \phi}{k - u \cos \phi}$. Mais la vîteſſe du rayon ΣT, qui nous rend l'Etoile viſible ne ſera plus k, elle aura à k la même raiſon, que la diogonale ΣT au coté ST, d'où la vîteſſe du rayon ΣT ſera $= \sqrt{(k^2 - 2ku \cos \phi + uu)}$.

XIX. Quand on connoit donc l'orbite de la Planete ou de la Comete & ſon mouvement, on peut aſſigner ſon lieu vrai S pour un tems donné, auſſi bien que ſa vîteſſe $= u$, & ſa direction SV, par où l'on connoîtra l'angle $TS\Sigma = \phi$. Ces choſes etant trouvées qu'on prenne $S\Sigma : TS = u : k$, la tirée TS donnera le lieu apparent de l'Etoile, qui differera du lieu vrai de l'angle $ST\Sigma$, dont la tangente eſt $= \frac{u \sin \phi}{k - u \cos \phi}$. Alors on verra pendant ce tems là l'Etoile par le rayon ΣT, dont la vîteſſe ſera $= \sqrt{(k^2 - 2ku \cos \phi + uu)}$. Telle feroit donc la maniere dont l'Etoile paroîtroit, ſi la Terre etoit immobile en T, mais ſi l'on comprend auſſi dans le calcul le mouvement de la Terre, la queſtion ſe réduit à determiner le lieu apparent, que repreſentera le rayon tombant ſuivant la direction ΣT avec une vîteſſe $= \sqrt{(k^2 - 2ku \cos \phi + uu)}$ ſur l'oeil du ſpectateur mu, ce qui revient au cas que nous avons traité ci-deſſus. Car ſoit Tt la direction ſuivant laquelle la Terre ſe meut, & qu'on ſuppoſe ſa vîteſſe egale à α, en ſorte que k ſoit $= 10464\ \alpha$. Il faut conformément aux régles que nous avons fournies tirer la droite ΣS parallele à Tt, en ſorte que ΣT

 ſoit

ſoit à ΣS, comme la vîteſſe du rayon tombant ΣT (qui eſt $= \sqrt{(k^2 - 2ku \cos\Phi + uu)}$ à la vîteſſe de la Terre $= \alpha$. Par là Σs deviendra donc $= \alpha$, puisque la droite ST eſt repreſentée par k & ΣT par $\sqrt{(k^2 - 2ku \cos\Phi + uu)}$. Par conſéquent ſi l'on ſuppoſe l'angle $Tts = \theta$, dont le complément à deux droits différera de l'angle STt, qu'on trouve par la Theorie de l'angle ΣTS qui eſt déja trouvé auparavant, en ſorte que cet angle θ ſoit connu. C'eſt pourquoi comme $T\Sigma s$ eſt $= \theta$, la tangente de l'angle ΣTs deviendra $= \dfrac{\alpha \sin \theta}{\sqrt{(k^2 - 2ku \cos u + uu)} - \alpha \cos\theta}$. On peut déterminer par cette formule le lieu apparent Ts, qui réſulte du mouvement de l'Etoile & de celui de la Terre. Si ces deux directions tombent ſur le même plan, qu'on ſuppoſe l'angle $STt = \zeta$, que la Theorie fournit, & l'angle $ST\Sigma = \omega$, en ſorte que tang $a = \dfrac{u \sin \Phi}{k - u \cos\Phi}$, on aura $\theta = 180 - \zeta - \omega$, & par conſéquent ſin $\theta = \sin(\zeta + \omega)$ & cof $\theta = -\cos(\zeta + \omega)$. Cette ſubſtitution etant faite, la tangente de $\Sigma Ts = \dfrac{\alpha \sin(\zeta + \omega)}{\sqrt{(k^2 - 2ku \cos\Phi + uu)} + \alpha \cos(\zeta + \omega)}$

$$= \frac{\alpha \sin\zeta \cos\omega + \alpha \cos\zeta \sin\omega}{\sqrt{(k^2 - 2ku \cos\Phi + uu)} + \alpha \cos\zeta \cos\omega - \alpha \sin\zeta \sin\omega}.$$

Mais parce que la différence entre le lieu vrai TS & le lieu apparent Ts eſt l'angle $STs = \Sigma Ts - \omega$, on trouvera par là l'angle même STs. Et comme tang $\omega = \dfrac{u \sin\Phi}{k - u \cos\Phi}$, on aura ſin $\omega =$

$$\frac{u \sin\Phi}{\sqrt{(k^2 - 2ku \cos\Phi + uu)}} \text{ \& } \cos\omega = \frac{k - u\cos\Phi}{\sqrt{(k^2 - 2ku \cos\Phi + uu)}}.$$

Et

Et comme il en resulte tang $ST s = \frac{\alpha \sin \zeta - \sin \omega \sqrt{(k^2 - 2ku \cos \Phi + uu)}}{\alpha \cos \zeta + \cos \omega \sqrt{(k^2 - 2ku \cos \Phi + uu)}}$, on aura, en substituant au lieu de sin ω & cos ω les valeurs indiquées, tang $ST s = \frac{\alpha \sin \zeta - u \sin \Phi}{k + \alpha \cos \zeta - u \cos \Phi}$.

XX. Supposons à présent que la Planete ou la Comete ne se meuve pas dans le plan de l'Ecliptique, & qu'ainsi les droites $S\Sigma$ & Tt ne soient pas placées dans le même plan. On trouvera donc pour le tems proposé la Terre en T, où elle aura un mouvement suivant la direction Tt avec une vîtesse $= \alpha$, la vîtesse de la lumiere etant $= k = 10464\, \alpha$. Qu'au même moment la Planete ou la Comete soit au point S dans lequel elle seroit vuë en effet, si les rayons venoient à nous sans retardement, de sorte que la droite TS fourniroit son lieu vrai. Qu'on fasse tomber du point S sur le plan de l'Ecliptique la perpendiculaire SR, en tirant la droite TR, cette droite TR representera la longitude vraye & geocentrique de l'Etoile, & l'angle STR sa latitude vraye, qui soit supposée $= p$, & ainsi la Theorie fournira tant la position de cette droite TR, que l'angle STR $= p$; mais en prolongeant en arriere la direction Tt, qu'on suppose l'angle $RT\Theta = q$. Ensuite que l'Etoile même se meuve suivant la direction $S\sigma$ avec la vîtesse $= u$; & qu'on prolonge σS jusqu'à ce qu'elle tombe sur le plan de l'Ecliptique au point N, en joignant la droite RN, on aura par la Theorie l'angle TRN, qui soit $= r$, & l'angle SNR soit posé $= s$, que la Theorie montrera pareillement. La droite ST etant exprimée par la lettre k, si l'on prend dans la droite SN la portion $S\Sigma = u$, le point Σ seroit le lieu apparent de l'Etoile, si la Terre etoit en repos; mais comme la Terre se meut, il faut me- *Fig.* VI.

ner

ner du point Σ la parallele à la droite Tt, $\Sigma s = \alpha$, & l'on aura le lieu apparent de l'Etoile pour la Terre en mouvement. Si donc des points Σ & S on fait tomber sur le plan de l'Ecliptique les perpendiculaires ΣP, sr, il y aura $sr = \Sigma P$, & pareillement $Pr = \Sigma s = \alpha$, d'où en menant Tr & Ts, la droite Tr donnera la longitude apparente de l'Etoile, & l'angle sTr la latitude apparente; en conséquence dequoi suivant la figure il faudra ajouter à la longitude vraye de l'Etoile l'angle RTr, pour en déduire la longitude apparente Tr.

XXI. Or nous avons dejà $S\Sigma = u$, & l'angle $SNR = s$, RP sera $= u \cos s$, & $SR - \Sigma P = u \sin s$. Mais à cause de $ST = k$, & de l'angle $STR = p$, SR sera $= k \sin p$ & $TR = k \cos p$, d'où résulte $\Sigma P = k \sin p - u \sin s$. Tirons à présent une paralléle à Tt, $\Sigma s = \alpha$, Pr sera aussi $= \alpha$ & $rs = P\Sigma = k \sin p - u \sin s$; & comme $PT\Theta$ est $= q$, Tor sera aussi $= q$, si nous supposons que les droites Tr & Pr se coupent *réciproquement* au point o. Si nous concevons donc que des points P & r on fasse tomber sur la droite TR les perpendiculaires Pp & rq & on aura, $Pp + rq = Pr \sin q$, & $pq = Pr \cos q$, où $Pp + rq = \alpha \sin q$ & $pq = \alpha \cos q$. Mais à cause de l'angle $PRT = r$ & $PR = u \cos s$ nous aurons $Pp = u \cos s \sin r$, & $Rp = u \cos s \cos r$, & par conséquent $rq = \alpha \sin q - u \sin r \cos s$ & $Rq = \alpha \cos q + u \cos r \cos s$. C'est pourquoi puisque $TR = k \cos p$, on a $Tq = k \cos p - \alpha \cos q - u \cos r \cos s$: Mais la fraction $\frac{rq}{Tq}$ exprime la tangente de l'angle RTr, qui doit etre ajouté à la longitude vraye de l'Etoile, pour en déduire sa longitude apparente. Par là donc on trouvera tang RTr

$=$

$= \frac{\alpha \sin q - u \sin r \cos s}{k \cos p - \alpha \cos q - u \cos r \cos s}$. De plus on trouvera $Tr = \sqrt{(k^2 \cos p^2 - 2k\alpha \cos p \cos q - 2ku \cos p \cos r \cos s + \alpha^2 + 2\alpha u \cos s \cos (q+r) + uu \cos s^2)}$; d'où à cause de $rs = k \sin p - u \sin s$ résultera la latitude apparente, ou l'angle STr. Car tang $sTr = \frac{k \sin p - u \sin s}{Tr}$. Mais si nous supposons la correction de la longitude, ou l'angle $RTr = \omega$, à cause de $\sin \omega = \frac{\alpha \sin q - u \sin r \cos s}{Tr}$, deviendra tang $sTr = \frac{(k \sin p - u \sin s) \sin \omega}{\alpha \sin q - u \sin r \cos s}$. Et l'angle ω etant trés petit, on peut en fureté substituer à son sinus sa tangente trouvée auparavant; ce qui etant fait on aura tang $sTr = \frac{k \sin p - u \sin s}{k \cos p - \alpha \cos q - u \cos r \cos s}$. Soit $sTr = STR + \Phi$, de sorte que Φ soit $= sTr - STR$, & Φ sera l'angle qu'il faut ajouter à la latitude vraye, pour en déduire sa latitude apparente, & l'on trouvera tang $\Phi = \frac{\alpha \sin p \cos q - u \sin s \cos p + u \sin p \cos r \cos s}{k - \alpha \cos p \cos q - u \cos p \cos r \cos s - u \sin p \sin s}$; à la place de quoi on peut employer dans le calcul l'expression suivante: tang $\Phi = \frac{\alpha}{k} \sin p \cos q - \frac{u}{k} \sin s \cos p + \frac{u}{k} \sin p \cos r \cos s$. De la même maniere l'angle ω qu'il faut ajouter à la longitude vraye pourra etre designé par cette expression; tang $\omega = \frac{\alpha \sin q}{k \cos p} - \frac{u \sin r \cos s}{k \cos p}$, expression qui n'aura point d'aberration sensible du

 vrai,

vrai, à moins que la latitude p ne fut trés prochaine de 90°; dans lequel cas il faut remarquer les mêmes choses que nous avons enseignées ci-dessus au sujet des Etoiles fixes qui sont tout prés du Pole de l'Ecliptique.

XXII. Considerons présentement une Planete ou une Comete dont l'orbite soit connuë, & puisqu'on peut assigner pour un tems quelconque le point du Ciel ou ces Astres devroient etre vûs, si la propagation successive de la lumiere n'apportoit aucun dérangement, la Theorie fera connoitre par ce moyen le vrai lieu Geocentrique. On déduira aussi delà, conformément aux régles que nous venons de fournir, le lieu apparent, & ainsi l'on connoîtra combien tant la longitude que la latitude apparente different de la véritable. Ces différences etant trés petites, il est manifeste, que, bien que l'orbite de la Comete ou de la Planete ne soit connu que par approximation, & qu'ainsi l'on ne puisse pas déterminer exactement le lieu vrai par la Theorie, cependant la différence trouvée entre le lieu vrai & le lieu apparent, sera asses prés la même que si l'orbite etoit connue de la maniere la plus exacte. Pourvû donc qu'on ait determiné à peu pres l'orbite de la Planete ou de la Comete, on pourra déduire du lieu apparent 'observé le lieu vrai, dans lequel l'Astre seroit visible, si les rayons parvenoient à nous sans aucun retardement, & l'on corrigera par ce moyen les Observations. Ainsi au cas que l'orbite de la Planete ou de la Comete ait été determinée avant la correction des lieux apparens, on pourra les déterminer de nouveau avec plus d'exactitude par les lieux vrais, si tant est qu'il naisse une différence sensible; & cela etant fait, les observations elles-mêmes pourront etre corrigées avec une entiere précision, si on le juge nécessaire. Ainsi aprés avoir repeté quelques fois l'operation, en corrigeant

rigeant alternativement l'orbite par les Obſervations, & les Obſervations par l'orbite, il en réſultera à la fin une exactitude parfaite tant dans l'orbite que dans les Obſervations.

XXIII. Suppoſons donc que tant la Terre qu'une Planete ou Comete ſe meuve autour du Soleil immobile en C; & d'abord que l'on calcule pour un tems propoſé le lieu de la Terre T & ſa diſtance du Soleil CT. Soit la longitude heliocentrique du Perihélie P de l'orbite terreſtre $= f$, la diſtance moyenne de la Terre au Soleil $= c$, & la vîteſſe moyenne $= \alpha$, l'excentricité $= n$, & l'anomalie vraye calculée du Perihélie, ou l'angle PCT $= v$, la longitude de la Terre ſera $= f + u$. Alors la diſtance de la Terre au Soleil CT ſera $\frac{(1-nn)c}{1+n\,\mathrm{cof}\,v}$: Ou ſi l'on ſuppoſe le demi parametre de l'orbite de la Terre $= b$, & la diſtance CT $= q$, on aura $b = c\,(1-nn)$ & $y = \frac{b}{1+n\,\mathrm{cof}\,v}$. Par conſéquent ſi l'angle CT☉ eſt ſuppoſé $= t$, on aura $\mathrm{fin}\; t = \frac{1+n\,\mathrm{cof}\,v}{\sqrt{(1+2n\,\mathrm{cof}\,v+nn)}}$, & $\mathrm{cof}\; t = \frac{n\,\mathrm{fin}\,v}{\sqrt{(1+2n\,\mathrm{cof}\,v+nn)}}$; d'où $\mathrm{tang}\; t = \frac{1+n\,\mathrm{cof}\,v}{n\,\mathrm{fin}\,v}$. De plus la vîteſſe de la terre ſuivant ſa direction Tt ſera $= \alpha\sqrt{\frac{1+2n\,\mathrm{cof}\,v+nn}{1-nn}} = \alpha\sqrt{\frac{2c-y}{y}}$. Ces choſes etant déterminées pour le lieu de la Terre, conſiderons l'orbite de la Planete ou de la Comete, dont l'interſection avec l'Ecliptique ſoit la droite C N ☊. Que l'on ſuppoſe donc la longitude heliocentrique du noeud aſcendant de l'orbite ☊ $=$ H, & l'inclinaiſon de *Fig.* VII.

l'orbite à l'Ecliptique $= G$. Soit de plus A le perihélie de la Planete ou de la Comete, & l'anomalie vraye du noeud ascendant prise du Perihélie, ou l'angle $AC\Omega = T$. Qu'alors on suppose la distance du Perihélie au Soleil $AC = A$, le demi-parametre $= B$, la distance moyenne au Soleil, ou le demi-axe transverse de l'orbite $= c$, & l'excentricité $\frac{B-A}{A} = N$, & il sera $A = C(1-N)$, $B = C(1-N^2)$ & la distance de l'aphelie au Soleil $= C(1+N)$. A l'egard du tems proposé, où la Terre est trouvée en T, que la Planete ou la Comete soit en S, que son anomalie vraye ou l'angle ACS soit $= V$, & sa distance au Soleil $CS = Y$, on aura $Y = \frac{C(1-N^2)}{1+N \operatorname{cos} V} = \frac{B}{1+N \operatorname{cos} V}$.

Qu'on mene une tangente de l'orbite en S, qui se reüniffe avec la ligne des noeuds au point N, & qu'on suppose l'angle $CSN = T$, & on aura $\operatorname{tang} T = \frac{1+N \operatorname{cos} V}{N \operatorname{sin} V}$, & la vîtesse de la Planete ou de la Comete, qui a été auparavant supposée $= u$, sera $= \frac{\alpha \sqrt{c}(2C-Y)}{\sqrt{CY}}$, ou bien $u = \frac{\alpha \sqrt{c}}{\sqrt{C}} \sqrt{\frac{1+2N \operatorname{cos} V + N^2}{1-NN}} = \frac{\alpha \sqrt{c}}{\sqrt{B}} \sqrt{(1+2N \operatorname{cos} V + N^2)}$. Ensuite soit $ACN = J$, & l'angle NCS sera $= V - J$; d'ou s'ensuit qu'en menant de S sur la ligne des noeuds $C\Omega$ la perpendiculaire SQ, il sera $SQ = Y \operatorname{sin}(V-J)$ & $CQ = Y \operatorname{cos}(V-J)$. Mais SR exprime le sinus de l'inclinaison G, d'où SR sera $= Y \operatorname{sin} G \operatorname{sin}(V-J)$, & le sinus de la latitude heliocentrique $SCR = \operatorname{sin} G \operatorname{sin}(V-J)$

& tang

& tang NCR $=$ cof G tang $(V-J)$. C'eft pourquoi fi l'angle NCR eft réputé $= R$, de forte que tang R foit $=$ cof G tang $(V-J)$, l'angle $H+R$ fera la longitude heliocentrique de la Planete ou de la Comete: Enfin dans le triangle CSN font donnés les angles $NCS = V-J$, $CSN = T$, & le coté $CS = Y$; d'où réfulte $SN = \frac{Y \sin (V-J)}{\sin (T+V-J)}$. Donc fin SNR $=$ fin G. fin $(T+V-J)$ lequel angle SNR etant déja defigné par la lettre s, nous aurons $\sin s = \sin G \sin (T+V-J) = \frac{\sin G (\cos (V-J) + N \cos J)}{\sqrt{(1+2N \cos V + N^2)}}$. Soit la latitude heliocentrique $= P$, en forte que $\sin P = \sin G \sin (V-J)$ & nous aurons $CR = Y \cos P$ & $CN = \frac{Y \sin T}{\sin (T+V-J)} = \frac{Y (1 + N \cos V)}{\cos (V-J) + N \cos J}$; d'où réfulte tang $CRN = \frac{CN \sin R}{CR - CN \cos R} = \frac{\sin R \sin T}{\cos P \sin (T+V-J) - \sin T \cos R}$, ou bien tang $CRN =$

$$\frac{\text{tang } R \text{ tang } T}{\frac{\cos P}{\cos R}\Big(\text{tang } T \cos (V-J) + \sin (V-J)\Big) - \text{tang } T}.$$

Mais par les valeurs fuperieures de P & R on trouve $\frac{\cos P}{\cos R} = \frac{1 - \sin G^2 \sin (V-J)^2}{\cos (V-J)}$. Donc tang $CRN =$

$$\frac{\text{tang } R \text{ tang } T}{\text{tang}(V-J)\,(1-\sin G^2 \sin (V-J)^2) - \text{tang } T \sin G^2 \sin (V-J)},$$

ou tang CRN $=$

$$\frac{\operatorname{cof} G \ \operatorname{tang} T}{1-\operatorname{fin} G^2 \ \operatorname{fin} (V-J)^2 - \operatorname{tang} T \ \operatorname{fin} G^2 \operatorname{fin} (V-J) \operatorname{cof} (V-J)},$$

ou tang CRN $=$

$$\frac{\operatorname{cof} G \ (1+N \operatorname{cof} V)}{N \operatorname{fin} J \operatorname{cof}(V-J) + N \operatorname{cof} G^2 \operatorname{cof} J \operatorname{fin}(V-J) - \operatorname{fin} G^2 \operatorname{fi}(V-J) \operatorname{cof}(V-J)}.$$

Qu'on fuppofe cet angle CRN $=$ Q.

XXIV. La longitude & la latitude heliocentrique etant ainfi trouvées, favoir H + R & P avec la diftance CS $=$ Y, déterminons le lieu Geocentrique. Puisqu'il y a dans le triangle TCR, CT $= y$, CR $=$ Y cof P, & l'angle TCR $= f + v -$ H—R, qui pour abreger foit fuppofé $=$ X, on aura tang CRT $=$ $\frac{y \operatorname{fin} X}{Y \operatorname{cof} P - y \operatorname{cof} X}$, & tang CTR $=$ $\frac{Y \operatorname{cof} P \ \operatorname{fin} X}{y - Y \ \operatorname{cof} P \ \operatorname{cof} X}$. Qu'on fuppofe ces angles CTR $= \Theta$, & CRT $= \Pi$, les angles qui etoient dans les formules précedentés fe détermineront préfentement ainfi R T$\Theta = q = \Theta - t$; TRN $= r =$ Q $+ \Pi$. & on aura Sin Θ : fin $\Pi =$ Y cof P : y & TR $=$ $\frac{y \operatorname{fin} X}{\operatorname{fin} \Pi}$; d'où tang $p =$ $\frac{SR}{TR} = \frac{Y \operatorname{fin} G \ \operatorname{fin} (V-J) \ \operatorname{fin} \Pi}{y \operatorname{fin} X}$, ou tang $p =$ $\frac{\operatorname{fin} G \operatorname{fin} \Theta \operatorname{fin} (V-J)}{\operatorname{cof} P \ \operatorname{fin} X}$. Mais comme nous avons déja fin $s =$ $\frac{\operatorname{fin} G (\operatorname{cof}(V-J) + N \operatorname{cof} T)}{\sqrt{(1+2N \operatorname{cof} V + NN)}}$ & $u = \frac{\alpha \sqrt{c}}{\sqrt{B}} \sqrt{(1+2N \operatorname{cof} V + N^2)}$ & qu'au lieu de α on doit mettre $\frac{\alpha \sqrt{c}}{\sqrt{b}} \sqrt{(1+2n \operatorname{cof} v + nn)}$; les

les formules trouvées ci-dessus pourront etre determinées ainsi

$$\text{tang}\ \omega = \frac{\alpha \text{ fin } q}{k \text{ cof } p} - \frac{u \text{ fin } r \text{ cof } s}{k \text{ cof } p}$$

$$\text{tang}\ \varphi = \frac{\alpha}{k} \text{ fin } p \text{ cof } q - \frac{u}{k} \text{ fi } s \text{ cof } p + \frac{u}{k} \text{ fin } p \text{ cof } r \text{ cof } s.$$

La premiere de ces formules doit etre ajoutée à la longitude vraye, & l'autre à la latitude vraye, pour en déduire le lieu apparent.

XXV. Tous ces angles se rencontrent dans le calcul Astronomique, par lequel on a coutume de supputer par la Theorie le lieu d'une Planete ou d'une Comete pour un tems donné, excepté les angles r, s, & la vîtesse u. En effet etant donnés A la distance du Perihèlie au Soleil, B le demi parametre, H la longitude heliocentrique du noeud ☊, J l'anomalie vraye du noeud ascendant calculée du Perihélie, G l'inclinaison de l'orbite à l'Ecliptique, & N l'excentricité de l'orbite $= \frac{B-A}{A}$, on trouve pour un tems donné l'anomalie vraye V, & de là l'argument de la latitude V—J, qui pour abreger soit supposé $=$ L. De plus la longitude heliocentrique H + R & la latitude heliocentrique $=$ P avec la distance de la Planete ou de la Comete au Soleil Y, & sa distance raccourcie $=$ Y cof P $=$ CR. Ensuite du triangle TCR, dans lequel est donné l'angle d'echange TCR $=$ X, on trouvera les angles CTR $= \Theta$ & CRT $= \Pi$, & par la Theorie de la Terre on a l'angle t, puisque $\text{tang}\ t = \frac{1 + n \text{ cof } v}{n \text{ fin } v}$, qu'on peut réputer droit sans erreur. Alors q sera $= \Theta - t$, & la latitude geocentrique est $= p$. Pour ce qui regarde la maniere de trouver les autres angles restans, qu'on cherche

l'angle

l'angle T, en forte que tang $T = \frac{1 + N \cos V}{N \sin V}$, lequel etant trouvé on aura $u = \frac{\alpha \sqrt{c}}{\sqrt{B}} \cdot \frac{N \sin V}{\cos T}$, & $\sin s = \sin G \sin (L+T)$. Deplus $\cot Q = \frac{\cos P \sin (L+T)}{\sin R \sin T} - \cot R$ & $\tang R = \cos G$ tang L. Enfin on aura $r = Q + \Pi$, lesquels etant trouvés il faudra ajouter à la longitude vraye l'angle ω, en forte que tang $\omega = \frac{\alpha \sin q}{k \cos p} - \frac{u \sin r \cos s}{k \cos p}$; mais on doit ajouter à la latitude vraye l'angle ϕ, en forte que tang $\phi = \frac{\alpha \sin p \cos q}{k} - \frac{u \sin s \cos p}{k} + \frac{u \sin p \cos r \cos s}{k}$, & par là on aura le lieu apparent. Réciproquement donc, fi de la longitude obfervée on fouftrait l'angle ω, & de la latitude l'angle ϕ, on aura la longitude & la latitude vraye de l'Etoile, quoique fa Theorie ne foit pas fort exactement connüe. Mais fi la Theorie etoit entïerement inconnüe, alors on aura par l'obfervation l'angle $CTR = \Theta$ qui eft produit lorsqu'on fouftrait la longitude du Soleil de la longitude de l'Etoile, d'où réfulte $q = \Theta - r$. Enfuite la latitude obfervée fournit l'angle p, & comme ces angles p & q différent peu des vrais, ils peuvent etre employés dans ce calcul à leur place; & l'on dégagera par là dans l'une & l'autre formule les premiers termes $\frac{\alpha \sin q}{k \cos p}$ & $\frac{\alpha \sin p \cos q}{k}$, qui tirent leur origine du mouvement de la Terre. Les autres termes de ces expreffions dépendent de l'orbite de la Planete ou de la Comete, de laquelle on doit déduire les valeurs des Lettres r, s & u; & pour celles qui reftent p & q, on peut retenir les valeurs quï ont été recueillies des Obfervations.

XXVI. Si

XXVI. Si nous voulons ſuivre cette voye pour corriger les obſervations des Planetes, la petiteſſe de leurs inclinaiſons & de leurs excentricités eſt telle qu'on peut la négliger ici ſans aucune erreur ſenſible. Les latitudes etant trés petites n'auront beſoin d'aucune correction; & il ne faudra chercher que celle de la longitude ſeule. Soit donc la diſtance moyenne de la Terre au Soleil $= c$, la diſtance moyenne de la Planete au Soleil $= C$, CT ſera $= c$ & $CR = C$. Une Obſervation quelconque etant faite, qu'on ſouſtraiſe le lieu du Soleil du lieu de la Planete, & qu'on ſuppoſe l'angle reſtant $CTR = \theta$, on aura à cauſe de l'excentricité negligée $q = \theta - 90$, & ſin $q = -$ coſ θ & coſ $q =$ ſin θ. Enſuite u ſera $= \frac{\alpha \sqrt{c}}{\sqrt{C}}$: & en poſant l'angle $CRT = \Pi$, on aura ſin $\Pi = \frac{c \sin \theta}{C}$ & $CRN = Q = 90°$, d'où réſulte $r = \Pi + 90$ & ſin $r =$ coſ Π, & $s = o$: Par conſéquent tang $\omega = \frac{-\alpha \cos \Theta}{k \cos p} - \frac{u \cos \Pi}{k \cos p}$. Il faut donc ſouſtraire de la longitude vraye l'angle $= \frac{\alpha}{k \cos p}\left(\cos \Theta + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{C}} \cos \Pi\right)$ pour trouver la longitude apparente. Reciproquement à la longitude obſervée doit etre ajouté l'angle $\frac{\alpha}{k \cos p}\left(\cos \Theta + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{C}} \cos \Pi\right)$ pour trouver la longitude vraye; qui ſervira de correction pour les lieux obſervés des Planetes. Je n'ai pas negligé entierement la latitude dans ce calcul, parce qu'elle influë ſur la correction de la longitude, quoiqu'au fonds la correction de la latitude devienne ſi petite, qu'elle

 ne

ne merite presque aucune attention dans la pratique. Au reste en corrigeant de cette maniere les Observations des Planetes, il faut se souvenir que les lieux observés du Soleil doivent toujours etre augmentés de $20''$ pour déterminer ses lieux vrais. Il s'ensuivra de là que si une Planete superieure paroit en conjonction avec le Soleil, à cause de $\Theta = o$ & $\Pi = o$, on doit ajouter à la longitude observée l'angle $\frac{\alpha}{k \cos p}\left(1 + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{C}}\right)$; mais si la Planete superieure est en opposition avec le Soleil, à cause de $\Theta = 180$ & $\Pi = o$, il faut soustraire de sa longitude observée l'angle $\frac{\alpha}{k \cos p}\left(1 - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{C}}\right)$. A l'egard d'une Planete inferieure, dans sa conjonction superieure avec le Soleil, la longitude observée doit etre augmentée de l'angle $\frac{\alpha}{k \cos p}\left(1 + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{C}}\right)$, mais dans sa conjonction inferieure, la longitude observée doit etre diminuée de $\frac{\alpha}{k \cos p}\left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{C}} - 1\right)$.

XXVII. Pour transporter cette correction aux Cometes, comme leur mouvement est presque parabolique, N sera $= 1$. Soit donc B le demi parametre de la Comete, la longitude heliocentrique du noeud $\Omega = H$, son anomalie vraye $= J$, & l'inclinaison de l'orbite $= G$, laquelle inclinaison, si la Comete est rétrograde, doit etre prise plus grande d'un angle droit. Si l'on a donc trouvé pour un tems donné l'anomalie vraye de la Comete, $= V$, Y sera $= \frac{B}{2 \cos \frac{1}{2} V^2}$ & $\tan T = \frac{1 + \cos V}{\sin V} = \sqrt{\frac{1 + \cos V}{1 - \cos V}} = \cot \frac{1}{2} V$. Donc $T = 90^\circ - \frac{1}{2} V$. Mais

alors

alors la vîteſſe u ſera $= \frac{2\alpha\sqrt{c}}{\sqrt{B}} \sqrt{\frac{1+\text{coſ}\,V}{2}} = \frac{2\alpha\sqrt{c}}{\sqrt{B}}\,\text{coſ}\,\tfrac{1}{2}V$. Outre cela en ſuppoſant l'argument de la latitude $V - T = L$, on aura ſin $s =$ ſin G ſin $(L + 90 - \tfrac{1}{2}V) =$ ſin G coſ $(L - \tfrac{1}{2}V)$ $=$ ſin G coſ $(\tfrac{1}{2}V - T)$. De plus en prenant tang R $=$ coſ G tang L, & ſin Q $=$ ſin G ſi L, pour avoir la longitude heliocentrique $H + R$, & la latitude heliocentrique $= P$, on aura cot Q $= \frac{\text{coſ}\,P\,\text{coſ}\,(\frac{1}{2}V - J)}{\text{ſin}\,R\,\text{coſ}\,\frac{1}{2}V} - \text{cot}\,R$, ou auſſi tang Q $= \frac{\text{coſ}\,G\,\text{coſ}\,\frac{1}{2}V}{\text{ſin}\,\frac{1}{2}V - \text{ſin}\,G^2\,\text{ſi}\,L\,\text{coſ}\,\frac{1}{2}(V-T)}$. En poſant encore $X = f + v - H - R$ il ſera tang $\Theta = \frac{Y\,\text{coſ}\,P\,\text{ſin}\,X}{y - Y\,\text{coſ}\,P\,\text{coſ}\,X}$, & tang $\Pi = \frac{y\,\text{ſin}\,X}{Y\,\text{coſ}\,P - y\,\text{coſ}\,X}$, & tang $p = \frac{\text{ſin}\,G\,\text{ſin}\,\Theta\,\text{ſin}\,L}{\text{coſ}\,P\,\text{ſin}\,X}$. Ces choſes etant trouvées, q ſera $= \Theta - t$, & $r = Q + \Pi$, par où tant la longitude que la latitude vraye pourront etre réduites à l'apparente.

XXVIII. Pour mettre dans un plus grand jour l'uſage de ces formules, j'ajouterai un exemple pris de la Comete obſervée au commencement de cette année, & je conſidererai ſon lieu pour l'année 1744 Fevrier $25^{j}, 5^{h}\,36'$, tems moyen de Paris; auquel tems ſa longitude fut trouvée $11^{s}.\,9^{\circ}.\,52'.\,46''$ & ſa latitude $14^{\circ}, 39'.\,7'' = p$. Je vais rechercher combien ce lieu obſervé differoit du lieu vrai. Dans ce tems là la longitude de la terre etoit $= 5^{s}, 6^{\circ}$,

 $31'$,

$31', 37''$, & $ly = 4,996003$. Comme donc au même tems le perihélie etoit $f = 3^s, 8^\circ, 28', 45''$, l'anomalie moyenne de la Terre etoit $v = 58^\circ, 2', 52''$ & $f + v = 5^s, 6^\circ, 31', 37''$. De plus $n = 0,01692$, & $i = 89^\circ, 11'$, & la vîteſſe de la terre $= \alpha \sqrt{\frac{2c-y}{y}} = 1,00921\,\alpha$, lequel nombre doit etre employé au lieu de α dans les formules précedentes, mais comme il n'en diffère presque point, on peut auſſi ſe paſſer de ce changement. Enſuite l'anomalie vraye de la Comete fut dans ce tems la $V = -56^\circ, 44', 49''$, car la Comete etoit avant le Perihélie. De là réſulte $lY = 4,457949$, & $T = 3^s, 28^\circ, 22', 25''$, & $l\frac{n}{\alpha} = 0,421551$. Outre cela l'anomalie vraye du noeud aſcendant eſt $J = 6^s, 28^\circ, 34', 8''$. Donc $L = 3^s, 4^\circ, 41', 3''$; $\frac{1}{2}V - J = 4^s, 3^\circ, 3', 28''$ & $s = -23^\circ, 35'$, & $R = +3^s, 6^\circ, 53'$, & $P = 46^\circ, 58'$. Mais à cauſe de $H = 1^s, 15^\circ, 46'$, $H + R$ ſera $= 4, 22, 39$ & $X = 13^\circ, 52'$, & $Q = 61^\circ, 20'$. Enfin $lY \operatorname{coſ} P = 4,292003 = lCR$, & par conſequent $\Theta = 3^\circ, 21'$ & $\Pi = 162^\circ, 47'$, d'où réſulte $q = -85^\circ, 50'$, & $r = 224^\circ, 7'$, & par l'obſervation p eſt $= 14^\circ, 39'$. Tout cela donne $\omega = 14''$, & par cette raiſon on doit ſouſtraire de la longitude apparente $14''$, pour en déduire la longitude vraye geocentrique $11^s, 9^\circ, 52', 32''$. A l'egard de la latitude on trouve la cor-

correction $\varphi = 12''$, & comme on doit l'ajouter à la latitude vraye, il faudra la ſouſtraire de la latitude apparente $14^\circ, 39', 7''$, d'où réſultera la latitude geocentrique vraye $= 14^\circ, 38', 55''$. En corrigeant donc de cette maniere trois obſervations ſur une Comete propres à déterminer ſon orbite, & en ajoutant $20''$ aux longitudes du Soleil qui y répondent, on parviendra à déterminer beaucoup plus exactement ſon orbite, pourvû que les obſervations ſoient faites avec tant de ſoin, que les erreurs qui peuvent s'y gliſſer ſoient beaucoup moindres que ces corrections; car ſi ces obſervations etoient ſujettes à de plus grandes erreurs, une ſemblable correction ſeroit ſuperfluë, & le grand travail qu'elle demande ſeroit une peine perdüe.