1747

De motu cymbarum remis propulsarum in fluviis

Leonhard Euler

DE MOTV CYMBARVM
REMIS PROPVLSARVM IN FLVVIIS

AVCTORE
L. Eulero.

Tabula III. et IV. Duplici modo cymbarum motus sub calculum mathematicum cadit, altero mechanico, altero geometrico, qui duo modi ratione tractandi prorsus inter se differunt. Qui enim hanc materiam mechanice tractare suscipiet, is primo ex principiis hydrostaticis in aptissimam cymbarum figuram inquiret; tum vero ex vi remorum cymbae accelerationem atque integrum motum tam in aqua quiescente quam in fluuio determinabit. Idem vero argumentum qui geometrice pertractare voluerit, is primo viam, quam cymba vtcunque directa et remis propulsa describet, definire tenetur; deinde autem varia problemata, quibus commodissimus et citissimus traiectus per fluuios postulatur, resoluet. Equidem in hac dissertatione constitui hanc rem, quatenus in geometriam incurrit, euoluere, praetermissa altera parte, quae a principiis mechanicis pendet. Antequam vero hoc opus aggrediar, necesse est, vt aliquot hypotheses praemittam atque stabiliam, quibus haec tractatio ad forum mere geometricum reducatur.

Hypothesis I.

Cymba, quae in aqua quiescente remis propellitur, motu aequabili progreditur in directione spinae seu rectae proram et puppem iungentis.

In

In hac hypothesi nihil pono nisi quod actu in omnibus cymbis, quae in aqua quiescente remis propelluntur, obseruatur. Primo enim remiges ex vtraque cymbae parte aequalibus viribus remigare solent, vnde fit vt cymba in ipsa spinae directione promoueatur. Deinde ab initio quidem cymbae motus est tardior, cum motus a quiete incipiat; at statim fit aequabilis. Quam primum enim cymba tantam nacta est celeritatem, vt resistentia aquae vim propellentem adaequet, tum neque accelerationem neque retardationem adipiscetur; atque idcirco motu aequabili feretur. Inaequalitatem autem, quae in ipso motus initio adest, hic tuto negligere licet, cum statim cesset, atque initium computi tum demum constitui queat, quando motus reuera aequabilis est factus. Haec eadem autem hypothesis locum habet, quando directio spinae vi gubernaculi immutatur; tum enim simul ipsius cymbae directio variatur, celeritate manente eadem. Ope gubernaculi ergo effici potest, vt cymba in quacunque curua data, motu aequabili promoueatur; dummodo spina perpetuo secundum curuae datae tangentem dirigatur.

Hypothesis 2.

Cymba in fluuio constituta et remis non propulsa, a fluuio abripitur, et in ipsa fluuii directione eademque, quam fluuius habet, celeritate promouebitur.

Si cymba minore quam fluuius celeritate mouetur, tum a vi fluuii acceleratur, donec aequalem celeritatem fuerit consecuta, quod cum euenerit, cymba cum fluuio pari celeritate, atque in eadem directione abripietur.

Tem-

Tempus autem, quo cymba adhuc tardius mouetur, quam fluuius, hic negligimus, cum ſit exiguum, atque in mechanicam tractationem pertineat; quam hic non attingo. Deinde vero etiam ſi ſummo rigore hunc cymbae motum examinare vellemus, is vtique ſemper minor foret motu fluuii, propter aeris reſiſtentiam, qua cymbae pars ex aqua eminens impeditur. Sed cum haec differentia ſatis ſit parua, contentus ero, ſi iſtae hypotheſes ad veritatem ſaltem prope accedant, atque in praxi tuto negligi queant. Meum enim propoſitum non eſt hanc materiam accuratiſſime ſecundum leges motus inueſtigare, ſed tantum per hypotheſes a veritate non multum diſcrepantes ad geometriam puram reuocare, ad quod hae duae hypotheſes ſunt accommodatae.

Cum igitur per has hypotheſes conſtet, quemadmodum tum cymba remis propulſa in aqua quieſcente tum etiam remis deſtituta in fluuio moueatur; colligere hinc licebit, quomodo cymba remis propulſa in fluuio progredi debeat. Hoc enim caſu cymba motu compoſito mouebitur, qui oritur ex duobus lateralibus, altero ſcilicet, quo moueretur, ſi aqua quieſceret, altero quo moueretur, ſi remi abeſſent. Compoſitione motus igitur in ſubſidium vocata, tota tractatio noſtra per ſolam geometriam abſolui poterit; quamobrem ad ſequentia problemata huc ſpectantia ſoluenda progrediar.

Problema I.

Data fluuii in ſingulis locis celeritate atque directione, quam ſpina cymbae vbique tenet, inuenire curuam, quam cymba in fluuio deſcribet.

So-

Solutio.

Traiiciat recta A B curſum fluminis normaliter, ſitque A M C curua quaeſita, in qua cymba ſeu potius eius centrum grauitatis M moueatur; erunt huius curuae applicatae M P ad rectam A B tanquam ad axem ductae in directione fluuii ſitae. Ponamus cymbam in M perueniſſe, hocque in loco directionem ſpinae eſſe aMb, quae cum directione fluminis P M angulum PMb conſtituat, cuius ſinus ſit $= m$, et coſinus $= n$, poſito ſinu toto $= 1$, ita vt ſit $m^2 + n^2 = 1$. Exponat c celeritatem cymbae, qua in aqua quieſcente remis propulſa vniformiter moueretur ſecundum directionem ſpinae; u vero exprimat celeritatem qua fluuius in loco M progreditur in directione ſua Mq; quae celeritas vtcunque ſit variabilis. Vera autem celeritas, qua cymba ſeu potius eius centrum grauitatis M actu in curua A M C mouetur, ſit $= v$; quae quaeritur. Iam ponatur abſciſſa $AP = x$; applicata $PM = y$, et via emenſa $AM = s$. atque ducatur applicata proxima pm, vt ſit $Pp = Mn = dx$; $mn = dy$ atque $Mm = ds$. Si nunc euaneſcente fluuii celeritate cymba ſolis remis vrgeretur, tum progrederetur in directione ſpinae ab, celeritate c, qua puncto temporis centrum grauitatis M perueniat in b. (per hyp. 1.) At ſi ceſſante vi remorum cymba a ſolo fluminis curſu agitaretur, tum propelleretur M in directione P M, celeritate $= u$, qua eodem tempuſculo pertingat ex M in q, (per hyp. 2.) ita vt futurum ſit $Mb : Mq = c : u$. Si ergo cymba ab vtraque vi, remorum ſcilicet et fluuii coniunctim, vrgeatur, tum neceſſe eſt, vt in diagonali M m, parallelogrammi $Mbmq$

Tabula III. Fig. 1.

incedat, celeritate huic ipsi diagonali proportionali, adeo vt sit $Mm : Mb = v : c$ seu $Mm : Mq = v : u$. Quia autem est sin. $PMb =$ cos. $bMn = m$; et cos. $PMb =$ sin. $bMn = n$; erit tang. $bMn = \frac{n}{m} = \frac{bn}{Mn}$; vnde prodit $bn = \frac{ndx}{m}$ et $bm = Mq = dy + \frac{ndx}{m}$. At cum sit $\frac{Mn}{Mb} = m$; erit $Mb = \frac{dx}{m}$. Quoniam vero est $Mb : Mq = c : u$ erit $dx : mdy + ndx = c : u$, vnde pro curua quaesita ista emergit aequatio $udx = cmdy + cndx$; seu $dy = \frac{dx(u - cn)}{cm}$. Vera autem cymbae celeritas v, qua in hac curua mouetur, cognoscetur ex analogia $ds : \frac{dx}{m} = v : c$, vnde erit $v = \frac{cmds}{dx}$. Q. E. I.

Corollarium 1. Cum sit $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, erit loco dy, valorem inventum $\frac{dx(u-cn)}{cm}$ substituendo, $ds = \frac{dx}{cm}\sqrt{(c^2 - 2cnu + uu)}$

Corollarium 2. Ex data in singulis locis celeritate cymbae vera innotescet tempus, quod cymba ad arcum curuae AM absoluendum impendit: erit scilicet hoc tempus $= \int \frac{ds}{v} = \int \frac{dx}{cm}$

Corollarium 3. Si ergo directio cymbae seu angulus PMb per solam abscissam AP determinetur, tum etiam tempus, quo arcus datae abscissae respondens absoluitur, per solam abscissam definietur, neque a fluuii celeritate huiusque mutabilitate pendebit.

Corollarium 4. Ex aequatione curuae AMC naturam exprimente $dy = \frac{dx(u-cn)}{cm}$ intelligitur, vbi fuerit $u > cn$ ibi cymbam in fluuio descendere, vbi vero sit $u < cn$ ibi ascendere; quo denique in loco sit $u = cn$ ibi cymbam a recta AB maxime distare, eoque in loco curuae descriptae tangentem parallelam fore rectae AB.

Corol-

Corollarium 5. Si motus cymbae verus per Mm decomponatur in motum traiicientem, cuius directio parallela est rectae AB, et motum ascensus vel descensus, cuius directio ad priorem est normalis et cum directione cursus fluminis congruit, erit motus traiicientis celeritas $= cm$; motus descendentis vero celeritas $= \frac{cmdy}{dx} = u - cn$.

Corollarium 6. Celerrime igitur cymba fluuium traiiciet, si fuerit $m = 1$, hoc ergo fit, si spina cymbae perpetuo ad cursum fluuii normaliter dirigatur. Tempus autem, quo cymba hoc casu a ripa per interuallum $AP = x$ elongatur, erit $= \frac{x}{c}$.

Corollarium 7. Si cymba secundum ipsam fluuii directionem at contra cursum dirigatur, fiet $m = o$, et $n = 1$, vnde motus traiiciens euanescet, cymbaque vel ascendet vel descendet, prout u vel minor vel maior fuerit quam c, erit scilicet celeritas, qua ascendit, $= c - u$.

Corollarium 8. Sin autem prora cymbae deorsum dirigatur fiet $n = -1$, atque cymba in fluuio recta descendet celeritate $c + u$, hoc est aggregato celeritatum fluuii et ipsius cymbae, qua in aqua quiescente moueretur.

Scholion. In solutione huius problematis posui proram cymbae b sursum directam, ita vt angulus PMb, quem directio spinae cum cursu fluminis allabentis constituit, sit acutus; sed eadem solutio aeque patet ad angulos obtusos. Nam si angulus PMb foret obtusus, tum eius cosinus n accipi debet negatiuus, eademque aequatio, quam inueni, pro hoc casu valebit. Ceterum cum ista solutio latissime pateat, ad clariorem cognitionem expediet nonnullos casus particulares euoluisse, ad quod sequentia problemata adiicere visum est.

Problema II.

Fig. 1. *Si Cymba ab cum directione fluuii* PM *perpetuo eundem conseruet angulum* PM*b*, *invenire curuam* AMC, *in qua cymba mouebitur.*

Solutio.

Sit AEFB alueus fluuii, et AB recta fluuium normaliter traiiciens, quae ducta sit ex puncto A, e quo cymba egressa. Sit cymbae celeritas, qua in aqua quiescente progrederetur $= c$, quam exprimat recta AD $= c$; curua vero AQB exponat fluuii celeritatem in singulis latitudinibus, ita vt eius applicatae PQ denotent celeritatem, qua portio fluuii PM*mp* labitur; posita ergo AP $= x$ erit PQ $= u$. Sit porro AMC curua quaesita, in qua cymbae *ab* centrum grauitatis M mouetur, atque eius applicata PM $= y$: vera vero celeritas, qua cymba elementum M*m* percurrit $= v$; anguli denique PMb sinus sit $= m$ et cosinus $= n$, posito sinu toto $= 1$, qui per hypothesin sunt constantes. His positis erit $dy = \frac{dx(u - cn)}{cm}$ atque $y = \int \frac{udx}{cm} - \frac{nx}{m}$: vnde erit $PM = \frac{areae.\,APQ}{m.\,AD} - \frac{n}{m} AP$; ex qua aequatione facilis constructio sequitur curuae quaesitae AMC per quadraturam curuae AQB. Tempus vero quo cymba arcum AM absoluit erit $= \int \frac{dx}{cm} = \frac{x}{cm} = \frac{AP}{m.\,AD}$.

Corollarium 1. Cum sit $dy = \frac{dx(u - cn)}{cm}$ erit $ddy = \frac{dx\,du}{cm}$ posito dx constante. Curua ergo AMC habebit punctum flexus contrarii, vbi est $du = 0$, hoc est, vbi celeritas fluuii est maxima.

Corol-

Corollarium 2. Tangens anguli AMP, quem curua a cymba descripta cum cursu fluminis PM constituit est $= \frac{dx}{dy} = \frac{cm}{u-cn}$. Vbi ergo celeritas fluuii u euanescit, ibi spinae directio curuam tangit.

Corollarium 3. Si C fuerit punctum in opposita fluuii ripa, in quo cymba appellit, erit $BC = \frac{areae.\,AQBA}{m.\,AD} - \frac{n}{m} AB$. Quare si fuerit area $AQBA = n\,AB.\,AD$, tum cymba in ipso puncto B appellet.

Corollarium 4. Si ponatur $AB = a$; area $AQBA = ab$, atque $BC = f$, erit $f = \frac{ab}{mc} - \frac{na}{m}$. Ex qua aequatione erit $mcf = ab - nac$. atque $m^2c^2f^2 = c^2f^2 - n^2c^2f^2 = a^2b^2 - 2na^2bc + n^2a^2c^2$, vnde oritur $n = \frac{a^2b \pm f\sqrt{(a^2c^2 + c^2f^2 - a^2b^2)}}{(a^2+f^2)c}$ atque $m = \frac{abf \mp a\sqrt{(a^2c^2 + c^2f^2 - a^2b^2)}}{(a^2+f^2)c}$; at $\frac{m}{n} = \frac{ac^2f \pm ab\sqrt{(a^2c^2 + c^2f^2 - a^2b^2)}}{a^2b^2 - c^2f^2}$

Corollarium 5. Si ergo cymba debeat appellere ad punctum datum C; tangens anguli PMB, quem cymba cum directione cursus fluuii constanter tenere debet, erit $= \frac{ac^2f \pm ab\sqrt{(a^2c^2 + c^2f^2 - a^2b^2)}}{a^2b^2 - c^2f^2}$ Nisi ergo sit $c\sqrt{(a^2+f^2)} > ab$ hoc est nisi fuerit $AD > \frac{area\,AQBA}{AC}$, fieri nequit vt cymba ad punctum C appellat.

Corollarium 6. Quia m negatiuum valorem habere nequit, alias enim cymba non ad ripam oppositam accederet; vnica directione cymbae ad punctum C perueniri poterit, si fuerit $bf < \sqrt{(a^2c^2 + c^2f^2 - a^2b^2)}$ seu $b < c$.

Corollarium 7. At si fuerit $bf > \sqrt{(a^2c^2 + c^2f^2 - a^2b^2)}$ seu $b > c$. tum duplici modo cymba ad punctum C pertingere poterit, ob duplicem valorem ipsius m affirmatiuum. Oportet autem praeterea esse $f > \frac{a}{c}\sqrt{(bb - cc)}$; ne m prodeat imaginarium.

Corollarium 8. His autem casibus, quibus duplici angulo directionis cymba ad C pertingit, semisumma duorum horum angulorum aequalis est angulo BAC ducta chorda A C. Semidifferentiae vero horum angulorum sinus est $\frac{ab}{c\sqrt{(aa+ff)}}$ atque cosinus $= \frac{2ab\sqrt{(aacc+ccff-aabb)}}{cc(aa+ff)}$. Vnde ex semisumma et semidifferentia facile vterque angulus satis faciens reperitur.

Corollarium 9. Quando ergo fit, vt angulus, qui est semidifferentia, minor sit angulo BAC, tum duplici angulo punctum C attingi poterit. Citius autem cymba ad C appellet, angulum sequendo maiorem, seu potius eum cuius sinus est maior; tempus enim, quo cymba fluuium traiicit est $= \frac{AB}{m.AD}$, vbi m est sinus anguli, quem directio cymbae cum cursu fluminis tenet.

Scholion Ex aequatione $PM = \frac{areae\, APQ}{m.AD} - \frac{n}{m} AP$, quam pro curua a cymba descripta inueni, sequens satis
Tabula IV. Figura I. facilis deducitur constructio huius curuae. Data enim curua ALQB, cuius applicatae celeritatem fluuii exprimunt, per A ducatur recta GAH parallela directioni, quam cymba perpetuo tenet, et ex D in eam demittatur perpendicularis DG erit $DG = m.AD$, et $PR = \frac{n}{m} AP$. Hanc obrem curuae descriptae quoduis punctum M reperitur sumendo $PM = \frac{areae.\, APQ}{DG} - PR$. Tempus vero, quo cymba ex A in M peruenit exprimitur per $\frac{AP}{DG}$. Ceterum notandum est, si curua ALB per puncta A et B transeat, quod fere in omnibus fluuiis locum habet, quippe qui in medio celerrime ad ripas vero tardissime labuntur, tum non solum AH esse tangentem curuae in A, sed etiam tangentem in C esse ipsi AH parallelam. Praeterea si

fluuius

fluuius in aequalibus ab vtraque ripa diſtantiis aequales habeat celeritates, ita vt curua ALB diametro gaudeat LIK medium tenente inter ripas AE et BF, tum curua deſcripta AKC duas habebit partes ſimiles AK et KC cis et trans punctum K; in K vero habebit punctum flexus contrarii; prout ex ſuperioribus facile liquet.

Problema III.

Si cymba fluuium traiiciens perpetuo dirigatur verſus punctum fixum H, *definire curuam* AMC, *quam cymba ex* A *egreſſa in fluuio deſcribet.* Tabula III. Figura 3.

Solutio.

Sit vt ante curua AQB ſcala celeritatum fluminis, et AD celeritas c, qua cymba in aqua quieſcente promoueretur; atque $AP = x$ $PM = y$; $PQ = u$, ſin. $PMb = m$, coſ. $PMb = n$. Fluuii autem latitudo AB ſit $= a$, $BG = g$ et $GH = b$; ducta ex puncto fixo H in PM recta normali HGK. Erit ergo $HK = a + b - x$; et $KM = y - g$. Quia autem directio cymbae ab ad punctum H tendit, erit $\frac{a+b-x}{y-g}$ tangens anguli directionis PMb et propterea $= \frac{m}{n}$, vnde fit $m = \frac{a+b-x}{\surd((y-g)^2+(a+b-x)^2)}$. Cum igitur ſupra pro curua quaeſita iſta inuenta ſit aequatio $dy = \frac{udx}{cm} - \frac{ndx}{m}$, erit pro noſtro caſu $dy = \frac{udx\surd((y-g)^2+(a+b-x)^2) - c(y-g)dx}{c(a+b-x)}$. Tempus vero, quo cymba ex A in M pertingit, erit $= \int \frac{dx\surd((y-g)^2+(a+b-x)^2)}{c(a+b-x)}$ Q. E. I.

Corollarium 1, Quamuis in aequatione inuenta variabiles y et x et u, quae ab x pendet, ſint inter ſe permixtae, tamen ſi ponatur $y - g = (a + b - x)z$ a ſe inuicem tricem ſeparabuntur, prodibit enim haec aequatio $\frac{c\,dz}{\sqrt{(1+zz)}} = \frac{u\,dx}{a+b-x}$.

Corollarium 2. Quia u ab x pendet, ponatur $\int \frac{u\,dx}{a+b-x} = lX$, quod integrale ita ſit acceptum, vt euaneſcat poſito $x=0$. Hinc ergo erit $c\,l(z+\sqrt{(1+zz)}) = lX +$ Conſt. ad quam conſtantem determinandam ponatur $x=0$, fietque $z = \frac{-g}{a+b}$; prodibit ergo Conſt. $= c\,l\frac{-g+\sqrt{(g^2+(a+b)^2)}}{a+b}$.

Corollarium 3. Poſito ergo $\int \frac{u\,dx}{a+b-x} = X$ ſeu $X = c^{\int \frac{u\,dx}{a+b-x}}$ habebitur ſequens aequatio integralis pro curua quaeſita $X^{\frac{1}{c}} = \frac{(a+b)z+(a+b)\sqrt{(1+zz)}}{-g+\sqrt{(g^2+(a+b)^2)}}$ ſeu $\frac{X^{\frac{1}{c}}(a+b-x)}{a+b} = \frac{y-g+\sqrt{((y-g)^2+(a+b-x)^2)}}{-g+\sqrt{(g^2+(a+b)^2)}}$.

Corollarium 4. Inuento autem ex his aequationibus y ſeu z per x, erit tempus, quo cymba ex A in M pertingit $= \int \frac{dx\sqrt{(1+zz)}}{c}$, quod propterea conceſſis quadraturis aſſignari poterit.

Corollarium 5. Si punctum H in punctum G ſeu ipſam ripam cadat, vt ſit $b=0$, habebitur $\frac{X^{\frac{1}{c}}(a-x)}{a} = \frac{y-g+\sqrt{((y-g)^2+(a-x)^2)}}{-g+\sqrt{(g^2+a^2)}}$. Si nunc ponatur $x=a$, quo inueniatur $y = BC = f$, ſeu punctum C cognoſcitur, vbi cymba in ripa BF appellet, reperietur $\frac{2f-2g}{-g+\sqrt{(a^2+g^2)}} = 0$, niſi forte hoc caſu $X^{\frac{1}{c}}$ fiat quantitas infinite magna, quae in $a-x=0$ ducta producat quantitatem finitam.

Corol-

Corollarium 6. Si ergo facto $x=a$ quantitas $\frac{X^{\frac{1}{c}}(a-x)}{a}$ euaneſcat, prodibit $f=g$, ſeu $BC=BG$. His ergo caſibus cymba ad ipſum punctum G, ad quod perpetuo dirigebatur, appellet.

Corollarium 7. Ex ipſa autem rei natura intelligitur, ſi extrema curuae AB applicata in B fuerit vel $=0$, vel minor quam c, hoc eſt, ſi fluuius ad ripam BF minori celeritate feratur, quam cymba propellitur, tum cymbam ſemper ad ipſum punctum G appellere debere, ſi quidem H in G cadit. Si enim in alio puncto appelleret, tum motum verſus G dirigendo moueri pergeret, donec ad G peruenerit.

Scholion.

Quo autem eiusmodi cymbae motus clarius cognoſcatur, exemplum afferam, quo aequationem inuentam penitus euoluere licet. Habeat nimirum fluuius vbique eandem celeritatem, quo ſcala celeritatum fiat recta ab parallela axi AB, et dirigatur cymba perpetuo ad punctum fixum G in ripa oppoſita ſitum, vt ſit $BG=g$. Fiet ergo u quantitas conſtans, quae ſit $=\alpha c$. Hoc ergo caſu habebitur Tabula IV. Fig. 2.

$$lX=\alpha c\int\frac{dx}{a-x}=\alpha c\, l\frac{a}{a-x} \quad \text{ſeu} \quad X=\frac{a^{\alpha c}}{(a-x)^{\alpha c}}.$$

Hoc ergo valore in aequatione inuenta ſubſtituto prodibit $\frac{a^{\alpha-1}}{(a-x)^{\alpha-1}}=\frac{y-g+\sqrt{((y-g)^2+(a-x)^2)}}{-g+\sqrt{(g^2+a^2)}}$. Hinc patet, ſi fuerit $\alpha<1$, tum cymbam in ipſo puncto G eſſe appulſuram; ſin autem fuerit $\alpha>1$, tum cymbam omnino non ripam BF attin-

attingere posse. Casus autem quo fit $\alpha = 1$, seu $u = c$ habebitur $\sqrt{(g^2a^2)} = y + \sqrt{((y-g)^2 + (a-x)^2)}$ sex $x^2 - 2ax = 2gy - 2y\sqrt{(a^2+g^2)}$ quae est aequatio pro parabola axem habente BF et verticem in F, vbi est BF $= \frac{a^2}{2\sqrt{(a^2+g^2)}-2g}$ eiusque parameter erit $2\sqrt{(a^2+g^2)} - 2g$; ita vt ergo huius parabolae focus cadat in ipsum punctum G. Ex dato ergo foco G, positione axis FB et puncto A, per quod parabola transire debet, parabola describetur.

Problema 4.

Tab. IV. Figura 3. *Data scala celeritatum fluuii* AQB, *inuenire cymbae directionem in singulis locis, qua fiat, vt cymba datam curuam* AMC *describat.*

Solutio.

Quemadmodum applicatae PQ curuae AQB celeritatem fluuii in singulis locis P designant, ita sit AD ceteritas qua cymba in directione spinae in aqua quiescente progrederetur. Sit igitur $AD = c$; $AP = x$; $PQ = u$; in curua vero a cymba describenda ponatur applicata $PM = y$; et arcus $AM = s$. vt ideo sit $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Sit iam ab directio cymbae quaesita, quam in singulis punctis M habere debet, vt in data curua AMC moueatur; atque anguli PMb sinus ponatur $= m$ eiusdemque cosinus $= n$ posito sinu toto $= 1$. Dantur ergo tum aequatio inter x et u tum etiam aequatio inter x et y, ex quibus vel m vel n definiri oportet. Inuenimus autem in problemate primo hanc aequationem $u\,dx - cm\,dy = cn\,dx = c\,dx\sqrt{(1-m^2)}$ ob $n = \sqrt{(1-mm)}$. Su-

mendis

mendis igitur quadratis prodibit $u^2 dx^2 - 2cmudxdy + c^2 m^2 dy^2 = c^2 dx^2 - c^2 m^2 dx^2$, quae abit in hanc $c^2 m^2 = \frac{2cmudxdy + c^2 dx^2 - u^2 dx^2}{dx^2 + dy^2}$, ex qua per radicis extractionem reperitur $cm = \frac{udxdy \pm dx\sqrt{(c^2 dx^2 + c^2 dy^2 - u^2 dx^2)}}{dx^2 + dy^2}$ atque $cn = \frac{udx^2 \mp dy\sqrt{(c^2 dx^2 + c^2 dy^2 - u^2 dx^2)}}{dx^2 + dy^2}$. Ex his sequitur anguli PMb tangens, quae est $\frac{m}{n} = \frac{ccdydx \pm udx\sqrt{(ccdx^2 + ccdy^2 - u^2 dx^2)}}{uudx^2 - ccdy^2}$ Cymba ergo angulum hunc tenens in curua data AMC incedet. Q. E. I.

Corollarium 1. Angulus PMb cuius tangens est $\frac{m}{n}$ commode in duos angulos resolui potest quorum alterius tangens est $\frac{dy}{dx}$ alterius vero tangens $\frac{\pm\sqrt{(ccdx^2 + ccdy^2 - u^2 dx^2)}}{udx}$. Quamobrem erit ang. $PMb =$ Ang. tang. $\frac{dy}{dx} \pm$ Ang. tang. $\frac{\sqrt{(ccdx^2 + ccdy^2 - u^2 dx)}}{udx}$.

Corollarium 2. Vbique ergo cymba duplicem angulum PMb tenere poterit, quo in data curua AMC ingrediatur; dummodo fuerit $c^2 dx^2 + c^2 dy^2 > u^2 dx^2$ seu $c^2 ds^2 > u^2 dx^2$. Nam si alicubi saltem fuerit $c^2 ds^2 < u^2 dx^2$, tum omnino fieri nequit, vt curua proposita a cymba describatur.

Corollarium 3. Quo igitur curua proposita sit describtibilis, ita esse debet comparata, vt sit vbique $\frac{c}{u} > \frac{dx}{ds}$ hoc est vt sit vbique $\frac{AD}{PQ} > \frac{Mn}{Mm}$.

Corrollarium 4. Cum nusquam esse possit $Mn > Mm$, intelligitur, si nulla applicata curuae AQB maior sit quam AD, tum omnem curuam AMC a cymba absolui posse; quia hoc casu fieri nequit, vt vsquam sit $\frac{AD}{PQ} < \frac{Mn}{Mm}$.

Corollarium 5. Quod autem ad duplicem angulum directionis attinet, quibus curua data describi posse inuenta

est,

eſt, notandum eſt, tum tantum vtrumque locum inueniri, quando vterque ſit affirmatiuus, ſi quidem motus initium in A collocetur. Duplex igitur angulus locum habebit, ſi fuerit Ang. tang. $\frac{dy}{dx} >$ Ang. tang. $\frac{\sqrt{(ccdx^2 + ccdy^2 - u^2dx^2)}}{udx}$ hoc eſt, ſi fuerit $udy > \sqrt{(cdx^2 + c^2dy^2 - u^2dx^2)}$ ſeu ſi fuerit $u > c$.

Corollarium 6. Cum vera cymbae celeritas in M, qua elementum Mm abſoluit, ſit $= \frac{cm\,ds}{dx}$; erit noſtro caſu celeritas cymbae vera $= \frac{udy \pm \sqrt{(c^2ds^2 - u^2dx^2)}}{ds}$ ob $dx^2 + dy^2 = ds^2$.

Corollarium 7. Tempus autem, quo arcus curuae AM abſoluitur erit $= \int \frac{ds^2}{udy \pm \sqrt{(c^2ds^2 - u^2dx^2)}}$. idem vero tempus transformando formulam prodit $= \int \frac{udy \mp \sqrt{(c^2ds^2 - u^2dx^2)}}{u^2 - c^2}$; ſi ſcilicet numerator et denominator per $udy \mp \sqrt{(ccds^2 - u^2dx^2)}$ multiplicetur.

Scholion.

Cum celerior cymbae motus tardiori praeferendus ſit, ex duobus directionis angulis quibus cymba datam curuam deſcribit, eum eligere conuenit, cuius ſinus m eſt maior, hoc enim caſu tempus, quod eſt $\int \frac{dx}{cm}$, minus euadet. Hanc ob rem ex ſignis ambiguis vtemur ſuperiore, eritque $cm = \frac{udxdy + dx\sqrt{(c^2ds^2 - u^2dx^2)}}{ds^2}$; $cn = \frac{udx^2 - dy\sqrt{(c^2ds^2 - u^2dx^2)}}{ds^2}$; atque angulus PM$b$ aequabitur ſummae angulorum, quorum tangentes ſunt $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{\sqrt{(c^2ds^2 - u^2dx^2)}}{udx}$, vel quorum ſinus ſunt $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{\sqrt{(c^2ds^2 - u^2dx^2)}}{cds}$. Aequabitur ergo angulus PMb ſummae angulorum, quorum coſinus ſunt $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{udx}{cds}$, vnde iſte quaeſitus angulus facile reperitur. Tempus autem, quo cymba curuae praeſcriptae portionem AM abſoluit, erit $= \int \frac{udy - \sqrt{(c^2ds^2 - u^2dx^2)}}{u^2 - c^2}$

Quam-

Quamobrem, ſi linea AM fuerit recta, ita vt ſit $y = Kx$, erit tempus per AM $= \int \frac{kudx - dx\surd(cc + cckk - uu)}{uu - cc}$. Apparet igitur hoc caſu eſſe debere $u < c\surd(1 + kk)$.

Problema 5.

Cognita fluuii in ſingulis locis celeritate inuenire lineam citiſſimi traiectus AMC, *in qua cymba citius ex* A *in* C *pertingit, quam per vllam aliam lineam puncta* A *et* C *iungentem.*

Solutio.

Manentibus omnibus, vt in praecedente problemate, curua AMC eius indolis eſt inueſtiganda, vt $\int \frac{udy - \surd(c^2ds^2 - u^2dx^2)}{uu - cc}$ minimum obtineat valorem; hac enim formula tempus exhibetur, qua cymba curuae arcum AM abſoluit. Communicaui autem praeterito anno vniuerſalem methodum quaeſtiones huiusmodi ſoluendi, quae, ſi curua quaeratur, in qua $\int Zdx$ maximum minimumue euadat, ſitque $dZ = Fdy + Gdx + Hdp + Idq + Kdr$ etc. exiſtente $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$ etc. tum pro curua quaeſita iſthanc praebuit aequationem $0 = Fdx - dH + \frac{ddI}{dx} - \frac{d^3K}{dx^2}$ etc. exiſtente dx conſtante. Quo ergo formula noſtra ad ſpeciem $\int Zdx$ reducatur pono $dy = pdx$ ſecundum methodum datam; eritque $\int Zdx = \int \frac{pu - \surd(cc + ccpp - u^2)}{u^2 - c^2} dx$, ſeu $Z = \frac{pu - \surd(c^2 + c^2p^2 - u^2)}{u^2 - c^2}$. Prodit igitur Z functio variabilium u et p ſeu x et p, ſiquidem u ab x pendet, prout in problemate, vbi curua AQB ponitur data, poſui. Habebitur ergo $dZ = Gdx + Hdp$ euaneſcentibus reliquis terminis, indeque pro curua quaeſita reſultabit dH

 $= 0$,

$= o$, atque $H =$ conſt. Sufficit itaque quantitatem H inueniſſe ex Z, quae obtinebitur differentiando Z, poſito tantum p variabili. Hanc ob rem reperietur $H = \frac{u}{uu - cc} - \frac{ccp}{(u^2 - c^2)\sqrt{(cc + ccpp - uu)}} =$ Conſt. $= \frac{1}{g}$, vnde pro curua quaeſita ſequens emergit aequatio $gu\sqrt{(cc + ccpp - uu)} - ccgp = (uu - cc)\sqrt{(cc + ccpp - uu)}$, quae ſumendis quadratis reducta abit in hanc $p = \frac{cc + gu - uu}{c\sqrt{((g-u)^2 - cc)}}$. Cum autem ſit $dy = p\,dx$, natura curuae quaeſitae iſta exprimetur aequatione $dy = \frac{(cc + gu - uu)\,dx}{c\sqrt{((g-u)^2 - cc)}}$, ex qua, quia variabiles ſunt a ſe inuicem ſeparatae, curua conſtrui poterit, erit enim $y = \int \frac{(cc + gu - uu)\,dx}{c\sqrt{((g-u)^2 - cc)}}$ integrale ita capiendo, vt euaneſcente x fiat $y = 0$. Q. E. I.

Corollarium 1. Quo ergo curua AMC inueniatur, per quam cymba tempore breuiſſimo ex A ad datum punctum C pertingat, conſtans arbitraria g ita eſt definienda, vt poſito $x = AB = a$, fiat $y = BC = b$.

Corollarium 2. Quia ergo curua AMC eſt inuenta, innoteſcet angulus directionis PMb, quem cymba in quouis loco M tenere debet, quo in curua inuenta moueatur. Cum enim ſit $\sqrt{(cc + ccpp - uu)} = \frac{ccgp}{cc + gu - uu} = \frac{cg}{\sqrt{((g-u)^2 - cc)}}$ erit $\sqrt{(c^2 ds^2 - u^2 dx^2)} = \frac{cg\,dx}{\sqrt{((g-u)^2 - cc)}}$; indeque tangens anguli $PMb = \frac{-\sqrt{((g-u)^2 - cc)}}{c} = \frac{-(cc + gu - uu)\,dx}{ccdy}$.

Corollarium 3. Secans ergo anguli PMb eſt $\frac{-g+u}{c}$ eiusque adeo coſinus $= \frac{-c}{g-u}$, quia anguli bMn ſinus. Cymba ergo ſemper in hoc angulo directa breuiſſimo tempore ex loco A in locum C pertingit.

Co-

Corollarium 4. Si fluuius vbique eadem celeritate feratur, seu u fuerit constans, tum linea citissimi traiectus fiet recta: hoc ergo casu cymba in recta linea progrediendo celerrime ex A ad M pertinget.

Corollarium 5. Si ponatur $g = \infty$, fiet angulus PMb rectus; cymba ergo perpetuo ad cursum fluuii normaliter directa tempore breuissimo fluuium traiiciet; curua autem, quam describet, hanc habebit aequationem $y = \int \frac{u\,dx}{c}$. Appellet ergo cymba in C, vt sit $BC = \frac{\text{areae AQBA}}{AD}$.

Corollarium 6. Quod autem ad constantem g attinet, intelligitur eam ita debere accipi, vt $(g-u)^2$ sit maius quam c^2. Nisi enim hoc obseruetur, curua inuenta fit imaginaria.

Corollarium 7. Cum sit m seu sinus anguli $PMb = \frac{\sqrt{((g-u)^2 - cc)}}{g-u}$, erit tempus quo cymba ex A in M peruenit $= \int \frac{dx}{cm} = \int \frac{(g-u)\,dx}{c\sqrt{((g-u)^2 - cc)}}$. Hocque tempus est breuissimum quo cymba ex A in M peruenire potest.

DE