



1746

Solutio problematis catoptrici in his actis A. 1745 Mense Septembri P. I pag. 523 propositi

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Solutio problematis catoptrici in his actis A. 1745 Mense Septembri P. I pag. 523 propositi" (1746). *Euler Archive - All Works*. 85.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/85>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

cludit, peccandi volunt deliquisse virum, a malitiae autem consilis delictum, re vera uxori suae vitae ac valetudinis liberum jus usumque integrum reliquisse, unde etiam capitis absolutus, ad tritemes reus ablegatus fuit. Consultatio *quarta*, qua ab eodem Autore Italico sermone elaborata fuit, ostendit casum de infante cum umbilico non ligato sub acervo rudertum aedificii mortuo reperto. Foemina junior gravida latere impingit in scalam, post octo dies puerum mortuum partu elidit, quem sub acervum rudertum aedificii condit, ubi quidem inventus est. Ad iudicium delata res fuit. Sectione itaque legali instituta, pulmones, fundum aquarum petentes, inventi fuerunt. Cum tamen huic phaenomeno, post undecimum a morte diem observato, non confiderent iudices; Autor ostendit, foeminam, utpote maritatum, non opprobrii causa partum supprimere debuisse; & porro monet, quanta mala in gravidis a casu & contusione abdominis oriri queant; umbilici ligaturam non necessariam esse, & hac in mammis non foetum virum indicare, urget. Tandem, pulmones, in hoc casu fundum petentes, foetus, docet, in utero mortui signum certum esse, cum post corruptionem potius in aquis eleventur; ex quibus omnibus concludit, foetum mortuum in lucem editum fuisse. Iudices igitur & foeminam & maritum ex carcere dimiserunt.

I. E. SOLUTIO PROBLEMATIS CATO-

*pirici, in his Actis A. 1745 Men-
se Septembri P. I pag. 523
propositi.*

Problema hoc, quo quaeritur curva circa datum punctum luti-
cidum describenda, ut singuli radii post geminam reflexionem ad curvae perimetrum passi in ipsum punctum lucidum revertantur, ad id genus pertinet, ut ex data relatione, quae in bina curvae puncta aequaliter comparat, eruantur lineae curvae continue, hac ipsa proprietate praeditae. Ex quo genere jam plura extant Problemata in his *Actis* proposita & soluta; inter quae inprimis numerandum est Problema trajectoryarum recipro-

reciprocarum, cuius plurimae solutiones his *Actis* reperuntur insertae; ex quibus Analysis non contentenda augmenta accepisse jure videtur. Plures autem in solutione hujusmodi Problematum occurrunt difficultates; quarum praecipua in constructione continuitatis versatur; cui etiam si satisfiat, tamen plerumque ad aequationes differentiales adeo complicatas pervenitur, ut difficillimum sit, ex iis curvas simpliciores, Problemata satisfaciens, atque inprimis algebraicas, elicere; quae difficultas altera potissimum in Problemate trajectoryarum reciprocarum sese obtulit. Quodsi autem praesens Problema caeteroquum cum illo conferatur, hoc multo magis absconditum videtur, cum formulae analyticae, quas natura reflexionis pro binis illis reflexionum punctis suppediat, admodum sunt intricatae, elementisque differentialibus inquinatae, ut vix viam parere videatur, eas ad aliquam curvae continuitatem accommodandi; unde longe magis arduum videri debet, curvas algebraicas, quae Problemati satisfaciant, exhibere. Interim tamen peculiaris methodus, qua hoc Problema sum aggressus, non solum me ad cognitionem omnium curvarum satisfaciens manu duxit, sed etiam curvas algebraicas omnes, quibus Problema solvi potest, formulis analyticis non nimis complicatis involutas, suggestit; quas hic, cetera tamen analysi, communicabo, ne aliis occasionem adimam, vires suas in hoc Problemate elegantissimo, & cujus enodatio plurimum utilitatis Analysis polliceri videtur, exercendi, suamque reflectionem ad augmentum scientiae conferendi.

Quaeruntur ergo curvae AMBN (Fig. 1) circa punctum radianis C describenda, ut singuli radii CM, ex C emanantes, postquam in M & N duplicem reflexionem sustulerint, in eadem punctam C revertantur. Ad has curvas inventandas sumta variabiles u capiatur ejus functio quaecumque v ita comparata, ut, si loco u ponatur -u, functio v abeat in -v, cujusmodi functiones sunt αu ; αu^3 ; αu^5 ; &c. item $\frac{\alpha + \beta u^n}{\gamma + \delta u^n}$, &c. quas functiones impares appellare soleo: atque

TAB. II
Fig. 1.

ex his quantitatibus u & v sumtis pro lubitu duabus constantibus a & c coordinate orthogonales $CP = x$, & $PM = y$, curvæ satisfaciens cujuscuque ita experimentur, ut sit:

$$CP = x = \frac{-u(a-v)}{c} + \frac{2dv(cc-uu)}{cdv} + \frac{udv^2(cc-uu)}{cdv^2(a-v)}$$

$$PM = y = \frac{(a-v + \frac{2udv}{dv} - \frac{dv^2(cc-uu)}{dv^2(a-v)})\sqrt{(c-uu)}}{c}$$

$$\text{erique } CM = a-v + \frac{dv^2(cc-uu)}{dv^2(a-v)}$$

Factis autem u & v negativis, hæ eadem formulæ exhibebunt coordinatas CQ & QV , alteri puncto reflexionis N respondentem, siquidem & ipsi $\sqrt{(cc-uu)}$ valor negativus tribuetur; unde simul intelligitur, hæc bina puncta M et N in eadem curva continua esse posita. Si igitur pro v accipiatur functio algebraica ipsius u , curvæ prodibunt algebraicæ, transcendentes vero habebuntur, si v capiatur functio transcendens ipsius u . Notandum hic est, si ponatur $v = u$, curvam quædam fieri ellipsim, alteram focum in puncto C habentem, quæ est solutio obvia & simplicissima, hæcque casu radius reflexus MN axem AB constanter in eodem puncto R interfecabit; reliquis vero casibus hi radii reflexi MN causticam quandam formabunt, cujus figuram assignasse, operæ pretium est, quoniam vicissim ex idonea harum causticarum forma ipsas curvas, Problemati satisfaciens, definire licet.

Omnes quoque has curvas, quibus questioni satisficit, generatim per constructionem geometricam describere licet, sequenti modo: Construatur (*Fig. 2*) curva quæcunque $DCCD$, circa punctum C habens ramos, alternatim oppositos, CD , CD' similes & æquales, cujusmodi est parabola cubicalis $y^3 = aax$ vel linea recta $y = nx$, vel etiam sectio conica quæcunque centrum in C habens, in hunc finem adhiberi poterit. Tum centro C radio arbitrario describatur circulus $AEBF$, duæque ad quodvis curvæ assumptæ punctum K tangente $K'T$, huic per F recta parallela agatur FR axi AB occurrens in R . Deinde per K ducatur axi AB parallela KL , circulum in L

secans,

secans, per quod punctum L producatur radius CL , in eumque ex R perpendicularis demittatur RV , quæ producatur in O , ut sit recta $RO = GT$, existente G puncto constante in axe AB pro lubitu assumto; denique constituatur angulus $OCM = \text{ang. } O$, ut sit $CM = OM$, erit M punctum in curva quaesita, cujus cum recta AB futura sit diameter orthogonalis, sufficet, ejus portionem ad alteram tantum axis AB partem descripsisse. Si loco curvæ $DCCD$ sumatur linea recta quæcunque per C ducta, punctum T perpetuo in ipso puncto C erit positum, ideoque recta GT erit constans, cui recta $RO = RM + CM$ erit æqualis. At punctum R ob FR ipsi KT parallelam pariter erit fixum, unde hoc modo formabitur ellipsis, focus habens in C & R & axem transversum $= GC$. Ceterum hic in genere monendum, per hanc constructionem, qua curvæ punctum M determinavimus, rectam RM simul definire positionem radii reflexi, qui radio CM respondeat; sique rectam, angulum CMR bisecantem, fore normalem ad curvam in puncto M . Demonstrationem hujus constructionis tum facilis dabo, quando totius solutionis meæ analysin communicabo.

Constructio superior sequenti modo concinnior reddi potest. Postquam tangenti KT parallela est ducta FR , & ex R ad CL perpendiculariter acta $RVO = GT$, junctâ recta CO bisecetur in S ad eamque ex S normalis ducatur SM , rectam RO in M interfecans, erit cum M punctum in curva quaesita, tum recta SM tangens hujus curvæ in M ; sique non solum singula curvæ puncta M , sed etiam tangentes curvæ, ubique determinantur. Unde perspicitur, si curva assumpta $DCCD$ fuerit algebraica, curvam, hoc modo descriptam, quoque fore algebraicam. Deinde ex eadem curva $DCCD$, pro lubitu assumpta, ob quantitates CA & CG arbitrarias insinuatæ curvæ satisfaciens elici possunt, quin etiam, manente positione curvæ $DCCD$, rectam quamvis, per C ductam, pro axe assumere licet. Unde denuo infinita varietas nascitur.

ACTII SYNCERI SANNAZARI, NEAPOLITANI