1744

De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi

Leonhard Euler

DE VARIIS MODIS CIRCVLI QVADRATVRAM NVMERIS PROXIME EXPRIMENDI.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Archimedes et qui ipſum ſunt ſecuti rationem diametri ad peripheriam in numeris proximam inueſtigauerunt ex polygonis regularibus circulo tam inſcriptis quam circumſcriptis. Cum enim perimeter polygoni inſcripti minor, circumſcripti vero maior ſit ipſa circuli peripheria, ſatis commodum hinc deduxerunt modum limites intra quos peripheria contineatur, definiendi; praeſertim cum hi limites eo propius ad ſe inuicem accedant, quo plurium laterum polygona accipiantur. Ita cum poſito radio circuli $= 1$, latus polygoni 96, laterum inſcripti ſit

$$=\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}}}},$$

latus vero circumſcripti totidem laterum

$$=\frac{2\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2}+3)}}}}{\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{}+\sqrt{3})}}}};$$

ſequentes prodibunt limites intra quos tota peripheria circuli continetur, minor ſcilicet

$$96\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}}}}$$

et

et maior

$$\frac{192\sqrt{}(2-\sqrt{}(2+\sqrt{}(2+\sqrt{}(2+\sqrt{}3)}{\sqrt{}(2+\sqrt{})2+\sqrt{}(2+\sqrt{}(2+\sqrt{}3)}.$$

§. 2. Perſpicitur autem ex hoc ſolo exemplo quam difficile et operoſum ſit limites hos in numeris rationalibus ſaltem exhibere propter tot totiesque repetitas radicis quadratae extractiones: qui labor etiam eo maior euadit, ſi polygona adhuc plurium laterum conſiderentur: adeo vt per hunc modum ne quidem ſperanda fuiſſet exactiſſima diametri ad peripheriam ratio, quae nunc quidem conſtat, et in fractionibus decimalibus ad 127 figuras eſt producta: Poſita nimirum diametro $=1$, exprimetur peripheria ſequenti fractione decimali.

3, 14159265358979323846264338327950288419
71693993751058209749445923078164062862
08998628034825342117067982148086513272
3066470938446 +

cuius fractionis centum cyphrae priores *Cl. Machino* debentur, omnes vero *Cl. Lagny* peculiari modo etiamnunc celato elicuit.

§. 3. Methodo ergo Archimedeae per polygona inſcripta et circumſcripta procedenti merito praeferenda eſt altera methodus hoc potiſſimum tempore exculta, qua circuli peripheria per ſeries infinitas conuergentes exprimi ſolet. Si enim huiusmodi ſeries vehementer conuergat, atque inſuper ipſi ſeriei termini facile in fractiones decimales conuerti queant, multo minori opera ratio diametri ad peripheriam proxima numeris rationalibus exprimi poterit, quam per illam alteram methodum, quae

tot

tot radicum extractiones requirit. Quo autem hac ratione calculus commode ad finem perduci queat, ſeries ad hoc inſtitutum idoneae ſunt ſeligendae, quas duo ſequentia requiſita, vti iam innui, habere oportet. Primo ſcilicet, ſeries debet eſſe vehementer conuergens, ſeu eiusmodi, vt quiuis terminus multo ſit minor praecedente, quo non admodum multis terminis accipiendis ratio verae ſatis propinqua obtineatur. Quo pauciores enim termini a vero valore minime differunt, eo aptior erit cenſenda ſeries ad veram diametri ad peripheriam rationem dignoſcendam.

§. 4. Alterum requiſitum poſtulat vt ſinguli ſeriei termini non ſint admodum compoſiti, ſeu ſimplicibus conſtent numeris. Quo magis enim ſinguli termini fuerint complicati, eo maiore labore quiuis in fractionem decimalem conuertetur, et fortaſſe plus operae requiretur ad decem terminos colligendos, quam mille terminos alius ſeriei ſimplicioris, tanto minus autem conuergentis. Deinde vero ad calculum faciliorem reddendum quisque terminus ita debet eſſe comparatus, vt praecedente iam in fractionem decimalem euoluto, ſequens ex eo facile inueniri queat; quae proprietas potiſſimum in ſeries geometricas iisque affines cadit, in quibus quilibet terminus ex praecedente per ſolam diuiſionem obtinetur. Hanc ob rem ex ſeriebus, quibus arcus circulares exprimi ſolent, eae praecipue ad hunc vſum erunt accommodatae, quae ex tangente data arcum reſpondentem definiunt; hae enim a ſeriebus geometricis hoc tantum differunt, quod ſinguli termini per numeros impares inſuper ſint diuiſi, vnde in calculo parum naſcitur moleſtiae.

§. 5.

§. 5. Reiectis igitur aliis feriebus, quibus arcus vel ex finu vel chorda definitur, tanquam ad noftrum inftitutum minus idoneis, praecipue eam feriem contemplabimur, qua ex data tangente arcus circuli refpondens determinatur. Eft autem pofito radio circuli $= 1$, arcus tangenti x refpondens $= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} -$ etc. in infinitum; ex qua intelligitur, quo minor accipiatur tangens x eo facilius arcum refpondentem affignari poffe. Pofito fcilicet $x = \frac{1}{10}$, facili negotio arcus tangenti $\frac{1}{10}$ refpondens in fractione decimali etiam ad mille figuras definiri poffet; minori vero etiam opera arcus determinaretur, qui tangenti $\frac{1}{100}$ vel $\frac{1}{1000}$ etc. refponderet. Sed hinc ne minimum quidem fubfidium confequitur ad rationem, quam diameter ad totam peripheriam tenet, cognofcendam; cum omnes iftiusmodi arcus, quorum tangentes funt $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ feu tales, quae feriem vehementer conuergentem et fimul leui labore fummabilem reddant, cum integra peripheria fint incommenfurabiles, atque ratio inter eos et peripheriam affignari penitus nequeat.

§. 6. Quo igitur huius feriei ope ratio, quam diameter ad peripheriam tenet, inueftigari poffit, talis tangens pro x fubftitui debet, cuius arcus refpondens ad totam peripheriam rationem habeat cognitam. Arcuum autem cum tota peripheria commenfurabilium vnicus datur, qui tangentem habeat rationalem, isque eft arcus 45°, eius fcilicet tangens radio circuli 1 aequatur. Pofito ergo $x = 1$, prodibit octaua totius peripheriae pars

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} \text{ etc.}$$

quae eft ipfa feries Leibnitiana, ita vt hinc prodeat ratio ri ad peripheriam vt 1 ad

$$4\left(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{11}+\text{etc.}\right).$$

Haec autem ſeries tam parum conuergit, vt plures quam 10^{50} termini colligi deberent, quo fractio decimalis ad centum tantum figuras extendatur; qui labor fere in aeternum ſuperari non poſſet. plura quidem habentur compendia, quibus iſta ſummatio facilior reddi poſſet, ſed cum iis haec ſeries in alias transformetur, in ſeries alias magis conuergentes potius inquiram, quibus immediate ſcopus intentus obtineri queat.

§. 7. Aliud igitur ſubſidium ſupereſſe non videtur, niſi vt arcus talis quaeratur, cuius tangens quidem ſit irrationalis, ſed tamen vnico conſtet termino; ſi enim pro x quantitas irrationalis magis compoſita ſubſtitueretur, tum labor ad terminos colligendos inſuperabilis euaderet, etiam ſi ſeries maxime conuergeret. Duo autem tantum extant huiusmodi arcus, alter $60°$ alter $30°$, quorum illius tangens eſt $=\sqrt{3}$ huius vero $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ponamus ergo $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, nam pro x non ſubſtitui conuenit $\sqrt{3}$, quia ſeries diuergens oriretur; eritque duodecima totius peripheriae pars

$$=\frac{1}{1\cdot\sqrt{3}}-\frac{1}{3\cdot 3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\cdot 3^2\sqrt{3}}-\frac{1}{7\cdot 3^3\sqrt{3}}+\frac{1}{9\cdot 3^4\sqrt{3}}-\text{etc.}$$

vnde ratio diametri ad peripheriam prodit vt

$$1 \text{ ad } \frac{2\sqrt{3}}{1}-\frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 3}+\frac{2\sqrt{3}}{5\cdot 3^2}-\frac{2\sqrt{3}}{7\cdot 3^3}+\text{etc.}$$

quae ſeries iam ſatis conuergit, cum quisque terminus plus quam ter minor ſit praecedente. Colligendis autem circiter 210 terminis, ratio in fractionibus decimalibus ad centum figuras exacta obtinebitur, qui labor iam ſuperabilis foret.

§. 8.

§. 8. Ope huius feriei etiam reuera a Geometris Anglis ratio diametri ad peripheriam in fractionibus decimalibus vsque ad 74 figuras exacta eſt determinata; atque integer calculus extat in tabulis mathematicis a *Scharpio* aliisque editis. Maxima autem huius calculi difficultas in hoc conſiſtit, quod ante omnia radicem quadratam ex 3 in fractionibus decimalibus ad tot figuras extrahi oportet, ad quot ratio quaeſita exacta eſſe debet. Inuenta autem fractione decimali ad 100 v. gr. figuras iuſta, quae ipſi $2\sqrt{3}$ ſeu $\sqrt{12}$ ſit aequalis, tum haec fractio continuo per 3 eſt diuidenda, quo obtineantur termini

$$\frac{2\sqrt{3}}{1},\ \frac{2\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\sqrt{3}}{3^2},\ \frac{2\sqrt{3}}{3^3}\ \text{etc.}$$

Quo facto iſti termini ſucceſſiue per numeros impares 1. 3, 5, 7, etc. ſunt diuidendi, vt prodeant ipſi feriei termini

$$\frac{2\sqrt{3}}{1},\ \frac{2\sqrt{3}}{3.3},\ \frac{2\sqrt{3}}{5.3^2},\ \frac{2\sqrt{3}}{7.3^3}\ \text{etc.}$$

Denique ſumma terminorum ordine parium a ſumma ordine imparium ſubtrahatur, et reſiduum dabit valorem peripheriam circuli exprimentem, cuius diameter eſt $= 1$.

§. 9. Antequam autem exponam, quomodo ope eiusdem feriei, qua arcus ex data tangente exprimitur, proxima ratio diametri ad peripheriam multo facilius et exactius definiri queat, conueniet compendium aliquod monſtraſſe, cuius beneficio huiusmodi ferierum ſumma multo leuiori opera inueniri poterit. Scilicet cum arcus tangenti $\frac{1}{p}$ reſpondens ſit

$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} - \frac{1}{7p^7} + \text{etc.}$$

 Hu-

Huius seriei ponamus iam n terminos in vnam summam esse collectos, existente n numero pari, summamque inuentam esse $=S$, dico fore summam totius seriei in infinitum continuatae

$$=S+\frac{1}{p^{2n-1}}\left(\frac{1}{(1+p^2)(2n-1)}-\frac{2p^2}{(1+p^2)^2(2n-1)^2}+\frac{2^2(p^4-p^2)}{(1+p^2)^3(2n-1)^3}-\frac{2^3(p^6-4p^4+p^2)}{(1+pp)^4(2n-1)^4}+\text{etc.}\right)$$

Reliquorum ergo terminorum summatio reducitur ad summationem alius seriei, in qua quisque terminus circiter $2n-1$ vicibus minor est praecedente; ita vt quo plures termini actu fuerint collecti, ista noua series eo magis fiat conuergens.

§. 10. Quamuis haec noua series, quae summam omnium reliquorum terminorum prioris seriei complectitur, vehementer conuergat, tamen, ad eius summam inueniendam noua quoque compendia adhiberi possunt. Posita enim summa

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{3p^3}+\frac{1}{5p^5}-\text{-----}-\frac{1}{(2n-1)p^{2n-1}}=S,$$

erit arcus, cuius tangens est $\frac{1}{p}$

$$=S+\frac{1}{p^{2n-1}(2n(1+pp)+p^2-1)}\text{ proxime;}$$

qui valor eo erit exactior, quo plures termini actu fuerint collecti, seu quo maior fuerit numerus n, modo sit par vti monui Atque si fuerit $n=p^\mu$ tum haec forma fractionem decimalem iustam reddet ad tot figuras, quot

quot exprimit $(2n+3+3\mu)lp$. Facto autem breuitatis gratia

$$\frac{2}{(1+pp)(2n-1)} = q$$

erit vera summa seriei

$\frac{1}{p} - \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} -$ etc. in infinitum continuatae

$$= S + \frac{1}{2p^{2n-1}}\left(\frac{q}{(1+qp^2+q^2p^2-q^3(2p^4-p^2)+q^4(4p^6-8p^4+p^2)\text{etc.}}\right)$$

seu

$\frac{1}{2p^{2n-1}}$ denuo diuidi debet per

$$\frac{1}{q}+p^2+qp^2-q^2(2p^4-p^2)+q^3(4p^6-8p^4+p^2)-\text{etc.}$$

et quotus resultans ad S adiectus dabit arcum, cuius tangens $=\frac{1}{p}$.

§. 11. His expositis subsidiis, quae consequentur ex methodo mea series summandi alibi tradita, progredior ad aliam viam multo faciliorem aperiendam, qua eiusdem seriei arcum ex data tangente exprimentis ope ratio diametri ad peripheriam quantumuis exacte leui opera definiri poterit, sine vlla taediosa radicum extractione. Resoluo scilicet arcum cuius tangens est $=1$ in duos pluresue arcus, quorum tangentes sint rationales. Cum enim horum arcuum tangentes sint vnitate minores, ex iis per seriem generalem arcus ipsi facile determinari poterunt. Qui arcus in se spectati etiamsi cum tota peripheria sint incommensurabiles, tamen quia coniunctim sumti arcui 45 graduum cuius tangens $=1$, aequantur; eorum summa dabit octauam totius peripheriae partem, ex qua ratio diametri ad peripheriam quaesita sponte fluit. Posito enim $\alpha =$

 arcui

arcui cuius tangens $= 1$, erit diameter ad peripheriam vt 1 ad 4α.

§. 12. Ponamus ergo $At\,1 = At\frac{1}{a} + At\frac{1}{b}$ debebit esse $1 = \frac{a+b}{ab-1}$; vnde fiet $ab - 1 = a + b$ atque $b = \frac{a+1}{a-1}$. Quo autem a et b fiant numeri integri, quod ad calculum faciliorem reddendum requiritur, pono $a = 2$, eritque $b = 3$. Arcus ergo cuius tangens $= 1$, quem posui $= \alpha$ aequalis est summae arcuum quorum tangentes sunt $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. Quocirca arcus α aequabitur aggregato duarum sequentium serierum

$$+ \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \text{etc.}$$

quarum vtraque magis conuergit, quam illa superior ex tangente $\frac{1}{\sqrt{3}}$ deducta, nec vlla radicum extractione impeditur. Quare ope harum duarum serierum ratio diametri ad peripheriam leuiori negotio ad multo plures figuras exacta definiri poterit, quam per vnicam illam seriem fieri licuit, praesertim si subsidia indicata adhibeantur.

§. 13. Si nunc seriei

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \text{etc.}$$

summa in fractionibus decimalibus desideretur iusta ad centum figuras, tum colligi debent 154 termini, atque ad eorum summam addi oportet $\frac{1}{2^{307}.1545}$, quo summa quaesita obtineatur; vnico scilicet subsidio §. 10. indicato vtor, quo tota seriei summa erat

$$= S + \frac{1}{p^{2n-1}(2n(1+pp)+pp-1)},$$

Sin

Sin autem summa ad 200 figuras desideretur tum 318
termini actu colligi debebunt. Altera vero series

$$\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} \text{ etc.}$$

ad fractionem decimalem, quae ne in centesima quidem figura fallat, reducetur colligendis actu 96 terminis; quo autem ad ducentas figuras exacta obtineatur, 200 termini actu sunt colligendi. Ad rationem ergo diametri ad periperiam in fractione decimali ad 100 figuras iusta inueniendam simul 250 termini addi debent, dum ad idem obtinendum ex serie

$$\frac{1}{1\sqrt{3}} - \frac{1}{3\cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5\cdot 3^2\sqrt{}} - \text{etc.}$$

sola plures quam 200 termini addi debent.

§. 14. His autem vestigiis insistendis in promtu erit arcum α cuius tangens $=1$ infinitis aliis modis in duos pluresue arcus resoluere, quae series multo magis conuergentes producant. Cum enim sit

$$A\,t\,\frac{1}{p} = A\,t\,\frac{1}{p+q} + A\,t\,\frac{q}{p^2+pq+1},$$

erit

$$A\,t\,\tfrac{1}{2} = A\,t\,\tfrac{1}{3} + A\,t\,\tfrac{1}{7}.$$

Quare cum sit

$$\alpha = A\,t\,\tfrac{1}{2} + A\,t\,\tfrac{1}{3}$$

erit nunc

$$\alpha = 2\,A\,t\,\tfrac{1}{3} + A\,t\,\tfrac{1}{7},$$

atque α iterum his duabus seriebus coniunctis aequabitur

$$+\frac{2}{1\cdot 3} - \frac{2}{3\cdot 3^3} + \frac{2}{5\cdot 3^5} - \frac{2}{7\cdot 3^7} + \text{etc.}$$

$$+\frac{1}{1\cdot 7} - \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} - \frac{1}{7\cdot 7^7} + \text{etc.}$$

quae

quae multo magis conuergunt, quam priores. Commodiſſima autem forte reſolutio erit

$$\alpha = 4\,At\tfrac{1}{5} - At\tfrac{1}{239}$$

vel

$$\alpha = 4\,At\tfrac{1}{5} - At\tfrac{1}{70} + At\tfrac{1}{99},$$

quippe qui arcus ope ſerierum maxime conuergentium definiri poſſunt. Sed quisque, cui lubuerit huiusmodi calculum ſuſcipere, facile ſibi commodiſſimam reſolutionem eliget.

§. 15. Poſſunt quoque aliae ſeries, quibus etiam arcus ex data tangente definitur, non minori ſucceſſu vſurpari, ſi ita viſum fuerit; ſeries autem hae, quae commode in vſum vocari poterunt, ſunt ſequentes praecipue.

$$At.\ \frac{p}{p^2-1} = \frac{1}{p} + \frac{2}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} - \frac{1}{7p^7} - \frac{2}{9p^9} - \frac{1}{11p^{11}} + \text{etc.}$$

$$At.\ \frac{2p}{2p^2-1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{3.2p^3} - \frac{1}{5.2^2.p^5} - \frac{1}{7.2^3p^7} + \frac{1}{9.2^4p^9} + \text{etc.}$$

$$At.\ \frac{3p}{3p^2-1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{5.3^2.p^5} + \frac{1}{7.3^3.p^7} - \frac{1}{11.3^5.p^{11}} + \frac{1}{13.3^6.p^{13}} - \text{etc.}$$

$$At.\ \frac{3p(pp-1)}{p^4-4pp+1} = \frac{3}{1.p} + \frac{3}{5.p^5} - \frac{3}{7.p^7} - \frac{3}{11.p^{11}} + \frac{3}{13.p^{13}} + \text{etc.}$$

Ex hac vltima ſerie eſt ponendo $p = 2$

$$At\,18 = 3\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} - \frac{1}{11.2^{11}} + \frac{1}{13.2^{13}} + \frac{1}{17.2^{17}} - \text{etc.}\right)$$

ad quem arcum ſi addatur $At\tfrac{1}{18}$, qui per vulgarem ſeriem facile exhibetur, prodit quarta peripheriae pars ſeu 2α. Simili modo ex ſerie ſecunda prodit $2\alpha =$

$$1 + \frac{1}{3.2} - \frac{1}{5.2^2} - \frac{1}{7.2^3} + \frac{1}{9.2^4} + \frac{1}{11.2^5} - \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \frac{1}{11.2^{11}} + \text{etc.}$$

§. 16,

§. 16. Quando autem in hoc negotio arcus fuerit inueniendus per feriem Leibnitianam, cuius tangens quidem fit parua, fed eius numerator non $= 1$, tum difficulter fingulos feriei terminos euoluere liceret. His igitur cafibus conueniet arcum in duos alios refoluere, quorum tangentes pro numeratore habeant vnitatem, id quod faepius fieri poteft. Sit enim arcus inueftigandus cuius tangens eft $\frac{a}{b}$; ponatur $A t \frac{a}{b} = A t \frac{1}{m} + A t \frac{1}{n}$; eritque $\frac{m+n}{mn-1} = \frac{a}{b}$. Hinc fiet $(ma-b)(na-b) = a^2 + b^2$. Quamobrem inquirendum eft, vtrum $a^2 + b^2$ in duos factores refolui poffit, quorum vterque denominatore b auctus per numeratorem a fiat diuifibilis. Quod cum acciderit erunt quoti ex iftis diuifionibus orti valores pro m et n fubftituendi. Sic fi quaerendus fit arcus cuius tangens $= \frac{7}{9}$, quia eft $7^2 + 9^2 = 130 = 5 . 26$ erunt valores ipforum m et n hi $\frac{5+9}{7}$ et $\frac{26+9}{7}$ feu 2 et 5. Erit itaque $A t \frac{7}{9} = A t \frac{1}{2} + A t \frac{1}{5}$, vnde non difficulter $A t \frac{7}{9}$ reperitur.

§. 17. Saepius autem cum fumma quadratorum non habet factores huius indolis, arcus in duos eiusmodi alios arcus refolui nequit. His ergo cafibus propofitus arcus in tres pluresue arcus refolui debebit, quod fequenti modo fiet. Sit propofitus arcus cuius tangens eft $\frac{x}{a}$ erit

$$A t \frac{x}{y} = A t \frac{ax-y}{ay+x} + A t \frac{1}{b}.$$

Si nunc in integris valor pro a inueniri nequeat, vt $ax - y$ fiat diuifor ipfius $ay + x$, tum faltem in fractis quaeratur, et pro $A t \frac{1}{a}$ ponatur $A t \frac{b-a}{ab+1} + A t \frac{1}{b}$; denuoque difpiciatur, vtrum detur numerus integer, qui pro b fub-

 ftituſtitutus reddat $b-a$ diuiſorem ipſius $ab+1$. Ita ergo pergendo, ſequentes orientur formulae

$$\text{I. } At\tfrac{x}{y} = At\tfrac{ax-y}{ay+x} + At\tfrac{1}{a}$$

$$\text{II. } At\tfrac{x}{y} = At\tfrac{ax-y}{ay+x} + At\tfrac{b-a}{ab+1} + At\tfrac{1}{b}$$

$$\text{III. } At\tfrac{x}{y} = At\tfrac{ax-y}{ay+x} + At\tfrac{b-a}{ab+1} + At\tfrac{c-b}{bc+1} + At\tfrac{1}{c}$$

$$\text{IV. } At\tfrac{x}{y} = At\tfrac{ax-y}{ay+x} + At\tfrac{b-a}{ab+1} + At\tfrac{c-b}{bc+1} + At\tfrac{d-c}{cd+1} + At\tfrac{1}{d}$$

§. 18. Si ergo a, b, c, d, etc. fuerit progreſſio quaecunque numerorum tandem in infinitum creſcentium, habebimus ſeriem arcuum infinitam, qui omnes ſimul ſumti dato arcui aequantur. Erit ſcilicet

$$At\tfrac{x}{y} = At\tfrac{ax-y}{ay+x} + At\tfrac{b-a}{ab+1} + At\tfrac{c-b}{bc+1} + At\tfrac{d-c}{cd+1} + At\tfrac{e-d}{de+1} + \text{etc.}$$

Neceſſe autem eſt vt progreſſionis a, b, c, d, etc. terminus infiniteſimus ſit infinite magnus, quia arcus cuius ille cotangens eſt negligitur, hinc non contemnendae ſequuntur ſeries arcuum ſummabiles; vt poſito $\frac{x}{y} = 1$ et pro a, b, c, d, etc. ſerie numerorum imparium 3, 5, 7, 9 etc. habebitur

$$At\,1 = At\tfrac{1}{2} + At\tfrac{1}{8} + At\tfrac{1}{18} + At\tfrac{1}{32} + \text{etc.}$$

in qua tangentium denominatores ſunt dupla quadrata numerorum naturalium. Simili modo erit

$$At\,1 = At\tfrac{1}{3} + At\tfrac{1}{7} + At\tfrac{1}{13} + At\tfrac{1}{21} + At\tfrac{1}{31}\ \text{etc.}$$

§. 19. Coronidis loco theorema non inelegans ſubiungam, quod ad naturam circuli penitus inſpiciendam inſeruire poteſt. In circulo ſcilicet cuius radius ſeu ſinus totus $= 1$, eſt arcus quicunque A aequalis huic valori

ſin. A

$$\frac{\text{ſin.}\,A}{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A.\ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{4}A.\ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{8}A.\ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{16}A.\ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{32}A.\ \text{etc.}}$$

Vel quod perinde eſt per ſecantes erit

$$A = \text{ſin.}\,A.\ \text{ſec.}\,\tfrac{1}{2}A.\ \text{ſec.}\,\tfrac{1}{4}A.\ \text{ſec.}\,\tfrac{1}{8}A.\ \text{ſec.}\,\tfrac{1}{16}A.\ \text{etc.}$$

quae expreſſio commode adhiberi poteſt ad logarithmum cuiusuis arcus ex datis logarithmis ſinuum et ſecantium inueniendum: erit ſcilicet

$$\text{l.}\,A = \text{l.}\,\text{ſin.}\,A + \text{l.}\,\text{ſec.}\,\tfrac{1}{2}A + \text{l.}\,\text{ſec.}\,\tfrac{1}{4}A + \text{l.}\,\text{ſec.}\,\tfrac{1}{8}A + \text{etc.}$$

vbi notandum, ſi tabula logarithmorum conſueta vtamur, a quouis logarithmo logarithmum ſinus totius auferri debere. Sic ſi logarithmus arcus 1 gradus quaeratur erit

log. ſin. 1°	=	(−2), 2418553
log. ſec. $30'$	=	0, 0000165
log. ſec. $15'$	=	0, 0000041
log. ſec. $7\tfrac{1}{2}'$	=	0, 0000010
log. ſec. $3\tfrac{3}{4}'$	=	0, 0000003
log. Arc. 1°	=	(−2), 2418762
log. 180	=	2, 2552725
l. A. 1°	=	(−2), 2418762
l. A. 180°	=	0, 4971487

cui logarithmo reſpondet numerus 3, 14159.

§. 20. Demonſtratio huius theorematis pendet a mutua relatione ſinuum et coſinuum angulorum, qui inter ſe rationem duplam tenent. Cum enim ſinus anguli cuiusque in suum cosinum multiplicatus producat semissim sinus anguli dupli, aequabitur sinus cuiusuis anguli per cosinum dimidii anguli diuisus duplo sinus anguli dimidii ita erit

$$\frac{\text{sin. } A}{\text{cosin. } \frac{1}{2} A} = 2 \text{ sin. } \tfrac{1}{2} A.$$

Simili ratione cum sit

$$\frac{\text{sin. } A}{\text{cos. } \frac{1}{2} A.\ \text{cos. } \frac{1}{4} A} = \frac{2 \text{ sin. } \frac{1}{2} A}{\text{cosin. } \frac{1}{4} A}$$

erit per eandem proprietatem

$$\frac{\text{sin. } A}{\text{cosin. } \frac{1}{2} A.\ \text{cos. } \frac{1}{4} A} = 4 \text{ sin. } \tfrac{1}{4} A.$$

Atque vlterius pergendo habebitur

$$\frac{\text{sin. } A}{\text{cosin. } \frac{1}{2} A.\ \text{cosin. } \frac{1}{4} A.\ \text{cosin. } \frac{1}{8} A} = 8 \text{ sin. } \tfrac{1}{8} A.$$

Ex quibus concluditur, si progressio cosinuum in infinitum continuetur, fore

$$\frac{\text{sin. } A}{\text{cos. } \frac{1}{2} A.\ \text{cos. } \frac{1}{4} A.\ \text{cos. } \frac{1}{8} A.\ \text{cos. } \frac{1}{16} A \text{ etc.}} = \infty \text{ sin. } \tfrac{1}{\infty} A.$$

= arcui ipsi A. Q. E. D.

CLAS-