1744

De fractionibus continuis dissertatio

Leonhard Euler

DE FRACTIONIBVS CONTINVIS. DISSERTATIO.

AVCTORE
Leonh. Euler.

§. 1.

Varii in Analysin recepti sunt modi quantitates, quae alias difficulter assignari queant, commode exprimendi. Quantitates scilicet irrationales et transcendentes, cuiusmodi sunt logarithmi, arcus circulares, aliarumque curuarum quadraturae, per series infinitas exhiberi solent, quae, cum terminis constent cognitis, valores illarum quantitatum satis distincte indicant. Series autem istae duplicis sunt generis, ad quorum prius pertinent illae series, quarum termini additione subtractioneue sunt connexi; ad posterius vero referri possunt eae, quarum termini multiplicatione coniunguntur. Sic vtroque modo area circuli, cuius diameter est $= 1$, exprimi solet; priore nimirum area circuli aequalis dicitur $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} -$ etc. in infinitum; posteriore vero modo eadem area aequatur huic expressioni $\frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdot \frac{8.10}{9.9} \cdot \frac{10}{11}$ etc. in infinitum. Quarum serierum illae reliquis merito praeferuntur, quae maxime conuergant, et paucissimis sumendis terminis valorem quantitatis quaesitae proxime praebeant.

§. 2. His duobus serierum generibus non immerito superaddendum videtur tertium, cuius termini continua diui-

diuiſione inter ſe connectuntur, quas ſeries propterea fractiones continuas appellare conueniet. Minus quidem vſitatum eſt hoc ſerierum genus duobus reliquis; ſed non ſolum aeque diſtincte valorem quantitatis, quam exprimit, ob oculos ponit, verum etiam perquam eſt aptum ad valorem illum proxime inueniendum. Tam parum autem hoc ſerierum genus etiamnum eſt excultum, vt praeter vnam vel alteram huius generis ſeriem iam cognitam, nequidem methodus habeatur vel huiusmodi ſerierum veros valores inueniendi vel datas quantitates transcendentes in tales expreſſiones conuertendi. Cum igitur iam pridem in his fractionibus continuis examinandis laborauerim, atque plura cum ad earum vſum tum inuentionem pertinentia non parui momenti obſeruauerim, ea hic exponere conſtitui, quo aliis viam easdem tractandi planiorem efficerem. Quamuis enim nondum ad completam huius doctrinae theoriam pertigerim, tamen haec, quae magno labore elicui, inſigne adiumentum allatura eſſe confido, ad iſtam doctrinam magis perficiendam.

§. 3. Quo igitur, quid nomine fractionum continuarum intelligam, clarius percipiatur, ampliſſimum earum exemplum ante omnia exhibeo:

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f+\text{etc.}}}}}}$$

ex quo ſcribendi modo quilibet ſignificationem huius expreſſionis facile cognoſcet. Quantitas ſcilicet haec conſtat duobus membris numero integro a et fractione cuius numerator eſt α, denominator vero iterum ex duobus compoſitus eſt membris integro nimirum b et fractione cuius numerator eſt β, denominator vero rurſum duobus conſiſtit membris integro vide, licet c et fractione vt ante; ſicque porro in infinitum. Duplices hic occurrunt quantitates, quas etiam litteris ex latino et graeco alphabeto deſumtis diſtinxi; Harum quantitatum eas, quas etiam graecis litteris denotaui numeratores appellabo, quia fractionum ſequentium numeratores reuera conſtituunt; reliquas vero quantitates latinis litteris expreſſas ad diſtinctionem omnes denominatores vocabimus; omnes enim praeter primam reuera ſunt partes denominatorum.

§. 4. Primus, qui, quantum mihi conſtat, huiusmodi fractionem continuam protulit, erat Vicecomes *Brouncker*, qui poſt communicatam ſecum *Wallisii* quadraturam circuli, eandem expreſſionem ita commutauit, vt aſſeueraret, aream circuli ſe habere ad quadratum diametri vti 1 ad

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\text{etc.}}}}}}$$

vbi

vbi numeratores ſunt quadrata numerorum imparium, denominatores vero 2. Qua autem via *Brounckerus* in hanc expreſſionem inciderit, non conſtat, atque merito foret dolendum, ſi eius methodus periiſſet; cum non ſit dubitandum, quin eadem methodo plura praeclara in hoc genere exhiberi poſſent. *Wallisius* quidem, dum hanc fractionem recenſet, ipſe demonſtrationem concinnare eſt conatus, quae autem minus eſt genuina, atque penitus ab auctoris methodo diuerſa eſſe videtur. *Wallisius* autem hanc totam inuentionem deriuat ex ſequente theoremate quod ſit:

$$a^2 = (a-1) + \cfrac{1}{2(a-1) + \cfrac{9}{2(a-1) + \cfrac{25}{2(a-1)\text{ etc.}}}} \;\Bigg|\; (a+1) + \cfrac{1}{2(a+1) + \cfrac{9}{2(a+1) + \cfrac{25}{2(a+1)\text{ etc.}}}}$$

cuius veritatem per inductionem ſatis confirmat, ſed, quod caput eſt, analyſin non affert, qua ad hoc theorema ſit peruentum.

§. 5. Commode autem atque facile ex data huiusmodi fractione continua valor eius vero proximus poteſt determinari, quin et limites definire licet, intra quos verus valor contineatur, vt, ſi quadratura quaepiam vel alia quantitas tranſcendens hoc modo fuerit expreſſa, facili negotio ea ipſa proxime aſſignari queat. Oſtendam hoc ex generali fractionum continuarum forma:

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\text{etc.}}}}}$$

in qua omnes quantitates ingredientes affirmatiuas pono. Apparet autem valorem vero propinquum obtineri, si fractio continua alicubi abrumpatur, atque eo propiorem valorem inuentum iri, quo longius fractio continuetur. Ita sumendo tantum a habebitur valor minor vero, cum annexa fractio tota negligatur. Sumendo autem $a+\frac{\alpha}{b}$, valor habebitur maior vero, quia in fractione denominator b est iusto minor. Sin autem sumatur

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c}}$$

habebitur iterum valor iusto minor ob fractionem $\frac{\beta}{c}$, indeque denominatorem $b+\frac{\beta}{c}$ nimis magnum. Atque hoc modo fractionem continuam successiue abrumpendo alternatiue valores iusto maiores et minores prodibunt; vnde quamtumuis prope ad verum fractionis continuae valorem accedere licebit.

§. 6. Sequens igitur habebitur expressionum series:

$$a,\ a+\frac{\alpha}{b},\ a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c}},\ a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d}}},\ \text{etc.}$$

qua-

quarum, quae ſunt ordine impares, vt prima, tertia, quinta, etc. minores ſunt vero fractionis continuae valore: pares autem erunt maiores eodem. Quare cum terminus tertius maior ſit primo, quintus maior tertio et ita porro; termini impares creſcendo tandem verum fractionis continuae valorem attingent; termini pares vero, qui continuo decreſcunt, decreſcendo tandem ad verum fractionis continuae valorem deſcendent. Si autem hae expreſſiones in fractiones ſimplices transmutentur, ſequens prodibit earundem expreſſionnm ſeries:

$$\frac{a}{1};\ \frac{ab+\alpha}{b};\ \frac{abc+\alpha c+\beta a}{bc+\beta};\ \frac{abcd+\alpha cd+\beta ad+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b}$$

quae ſi attentius inſpiciatur, facile colligetur lex, qua iſti termini progrediuntur; cuiusque ope ſine operoſa fractionum illarum compoſitarum reductione has fractiones, quousque libuerit, continuare licet. Nimis quidem hae fractiones ſtatim fiunt prolixae; ſed in exemplis quibus hae litterae numeris exprimuntur, perquam commode haec ſeries continuatur.

§. 7. Lex autem progreſſionis harum fractionum ex ſequente ſchemate clare percipietur:

$$\begin{array}{cccccc} & a & b & c & d & e \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+\alpha}{b}; & \frac{abc+\alpha c+\beta a}{bc+\beta}; & \frac{abcd+\alpha cd+\beta ad+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b}. & \\ & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \end{array}$$

Scilicet his fractionibus ſupra ſcripti ſunt denominatores fractionis continuae, infra vero numeratores tanquam indices; ipſis autem fractionibus praefixa eſt fractio $\frac{1}{0}$, quippe quae ex ipſa lege mox declaranda in hunc locum pertinet.

tinet. Lex iam progreſſionis in hoc conſiſtit vt cuiusque fractionis numerator per indicem ſupra ſcriptum multiplicatus vna cum numeratore praecedentis fractionis per ſuum infra ſcriptum indicem multiplicato praebeat numeratorem ſequentis fractionis: Atque eodem modo cuiusque fractionis denominator per indicem ſuum ſupra poſitum multiplicatus vna cum denominatore praecedentis fractionis per indicem ſuum infra ſcriptum multiplicato praebeat denominatorem fractionis ſequentis. Lex quidem haec ex ipſa inſpectione harum fractionum, ſi vlterius continentur, facile obſeruatur; ſed eadem etiam ex ipſa fractionum continuarum natura deduci poteſt: quam demonſtrationem autem hic apponere ſuperfluum iudico.

§. 8. Si iſtarum fractionum differentiae capiantur, ſubtrahendo quamque a praecedente, ſequens orietur ſeries:

$$\frac{1}{0} - \frac{\alpha}{1.b} + \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)} - \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)} + \text{etc.}$$

cuius numeratorum progreſſio per ſe eſt manifeſta, denominatores vero ex binis denominatoribus praecedentibus formantur. Cum igitur ſuperioris ſeriei vltimus terminus, qui verum fractionis continuae valorem exhibet, componatur ex primo, quem reiecto $\frac{1}{0}$ ſumamus a, et omnibus differentiis, erit verus fractionis continuae propoſitae valor $=$:

$$a + \frac{\alpha}{1.b} - \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)} + \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)} - \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(bcd+\beta d+\gamma b)(bcde,} \text{etc.}$$

Habemus adeo ſeriem infinitam primi generis, cuius termini additione et ſubtractione inter ſe coniunguntur, valori fractionis continuae propoſitae aequalem; haecque ſeries valde

valde conuergit, atque ad valorem illum proxime inueniendum admodum eſt apta. Si bini termini coniungantur alternationis ſignorum euitandae cauſa, reperietur eadem fractio continua aequalis ſequenti ſeriei:

$$a + \frac{\alpha c}{1(bc+\beta)} + \frac{\alpha\beta\gamma e}{(bc+\beta)(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)} + \text{etc.}$$

cuius numeratorum et denominatorum lex ex ſuperiore ſponte ſe prodit. Vehementer autem haec ſeries conuergit, atque eius ope citiſſime vero proxima ſumma inueniri poteſt.

§. 9. Quo magis igitur haec ſeries vltima inuenta conuergit, eo magis etiam ipſa fractio continua conuergere cenſenda eſt; quia datus terminorum ſeriei numerus dato fractionum numero fractionis continuae reſpondet. Perſpicuum ergo eſt fractionem continuam eo magis conuergere, quo minores ſint eius numeratores α, β, γ, etc. maioresque denominatores a, b, c, etc. Omnes autem hos numeros tam numeratores quam denominatores integros ponere licet; nam ſi eſſent fracti per notam fractionum reductionem in integros transmutari poſſent, ſingularum ſcilicet fractionum numeratores et denominatores per eundem numerum multiplicando. Poſitis ergo omnibus numeris tam α, β, γ, etc. quam a, b, c, etc. integris fractio continua maxime conuerget, ſi omnes numeratores α, β, γ, etc. aequentur vnitati; deinde vero conuergentia eo erit maior, quo maiores fuerint denominatores a, b, c, d, etc. Vnitate ſcilicet numeratores minores eſſe nequeunt, ſi enim alicubi numerator eſſet $= 0$; ibidem fractio continua abrumperetur, foretque fractio finita. Idem quoque accidit, ſi denominatorum ali-

 quis

quis fiat $=\infty$, ibidem enim pariter fractio continua abrumpetur atque in fractionem finitam transibit.

§. 10. Si igitur sequens proposita sit fractio continua, cuius omnes numeratores sint vnitates:

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\text{etc.}}}}}}$$

ad eius valorem appropinquabunt fractiones sequentis seriei

$$\overset{a}{\frac{1}{0}};\ \overset{b}{\frac{a}{1}};\ \overset{c}{\frac{ab+1}{b}};\ \overset{d}{\frac{abc+c+a}{bc+1}};\ \overset{e}{\frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b}}$$

quae series ope vnicae indicum a, b, c, d, etc. progressionis continuatur. Scilicet cuiusque fractionis tam numerator quam denominator per indicem multiplicatus et praecedentis fractionis numeratore et denominatore respectiue auctus, dabit numeratorem et denominatorem sequentis fractionis. Valor deinde huius fractionis continuae aequabitur summae sequentis seriei:

$$a+\frac{1}{1.b}-\frac{1}{b(bc+1)}+\frac{1}{(bc+1)(bcd+d+b)}-\frac{1}{(bcd+d+b)(bcde\ \text{etc.}}$$

vel summae huius, in quam ista transmutatur

$$a+\left(\frac{c}{bc+1}\right)+\frac{e}{(bc+1)(bcde+de+be+bc+1)}+\text{etc.}$$

cuius

cuius ſeriei denominatores formantur ex alternis denominatoribus ſeriei fractionum ſuperioris; ideoque facile continuantur.

§. 11. Si in tali fractione continua, cuius numeratores omnes ſunt vnitates, denominatores fuerint numeri fracti, expediet talem fractionem continuam in aliam transformare, in qua tam numeratores quam denominatores ſint numeri integri. Ita ſi huiusmodi propoſita eſſet fractio continua.

$$a + \cfrac{1}{\frac{b}{B} + \cfrac{1}{\frac{c}{C} + \cfrac{1}{\frac{d}{D} + \cfrac{1}{\frac{e}{E} + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}$$

haec tollendis fractionibus particularibus transmutabitur in ſequentem formam:

$$a + \cfrac{B}{b + \cfrac{BC}{c + \cfrac{CD}{d + \cfrac{DE}{e + \text{etc.}}}}}$$

Simili modo viciſſim quaeuis fractio continua in aliam transmutari poteſt, cuius omnes numeratores ſint vnitates, denominatores vero numeri fracti, erit ſcilicet:

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\varepsilon}{e+\cfrac{\zeta}{\text{etc.}}}}}} = a+\cfrac{1}{\frac{b}{\alpha}+\cfrac{1}{\frac{\alpha c}{\beta}+\cfrac{1}{\frac{\beta d}{\alpha\gamma}+\cfrac{1}{\frac{\alpha\gamma e}{\beta\delta}+\cfrac{1}{\frac{\beta\delta f}{\alpha\gamma\zeta}+\cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}}$$

quae posterior forma ex priore facile formatur.

§. 11. Cum igitur data fractione continua eius valor vel verus ipse, si quidem fractio abrumpatur, vel vero proximus per fractionem ordinariam exhiberi queat; viciſſim quoque fractio ordinaria in fractionem continuam transformari poterit. Quae transmutatio quomodo ſit instituenda in fractionibus continuis, quarum numeratores omnes ſint vnitates, denominatores vero numeri integri, primum oſtendam. Omnis autem fractio finita, cuius numerator et denominator ſunt numeri integri finiti in huiusmodi fractionem continuam transformatur, quae alicubi abrumpitur; fractio autem cuius numerator et denominatorſunt numeri infinite magni, cuiusmodi dantur pro quantitatibus irrationalibus et transcendentibus, in fractionem vere continuam et in infinitum excurrentem tranſibit. Ad talem fractionem continuam inueniendam ſufficiet denominatores tantum aſſignaſſe, cum numeratores omnes vnitates eſſe ponamus. Hi vero inuenientur inter numeratorem et denominatorem fractionis propoſitae eandem operationem inſtituendo, quae ad maximum earum commu-

nem

rem diuisorem inuestigandum institui solet. Numerator scilicet per denominatorem diuidatur, et per residuum ipse denominator, et ita porro semper per residuum praecedens diuisor. Quoti vero ex hac continuata diuisione orti erunt denominatores fractionis continuae quaesiti.

§. 12. Sic si haec proposita sit fractio $\frac{A}{B}$ in fractionem continuam transmutanda, cuius omnes numeratores sint vnitates; diuido A per B, sitque quotus a et residuum C, per hoc residuum C diuidatur praecedens diuisor B, sitque quotus b residuumque D, per quod C diuidatur et ita porro donec ad residuum $=0$, quotumque infinite magnum perueniatur. Operatio autem haec sequenti modo repraesentatur.

$$\begin{array}{lllllll}
B \mid A \mid a & & & & & & \\
 & C \mid B \mid b & & & & & \\
 & & D \mid C \mid c & & & & \\
 & & & E \mid D \mid d & & & \\
 & & & & F \mid E \mid e & & \\
 & & & & & G \text{ etc.} &
\end{array}$$

Hac igitur operatione inueniuntur quoti, a, b, c, d, e, etc. quibus cognitis erit

$$\frac{A}{B} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{etc.}}}}}$$

 si

ſi enim ſit reſiduum $G = 0$, erit $e = \frac{E}{F}$ atque $\frac{1}{e} = \frac{F}{E}$ hincque porro $d + \frac{1}{e} = d + \frac{F}{E} = \frac{D}{E}$; ac $\frac{1}{d + \frac{1}{e}} = \frac{E}{D}$;

$$c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e}} = c + \frac{E}{D} = \frac{C}{D}.$$

Hocque modo vsque ad initium aſcendendo fractio continua reperietur $= \frac{A}{B}$.

§. 13. Si in fractione $\frac{A}{B}$ fuerit $A < B$ tum primus quotus a erit $= 0$, reſiduumque primum $= A$, ita vt tum B per A diuidi debeat. Hoc ergo caſu erit

$$\frac{A}{B} = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{etc.}}}}}$$

Caſu autem quo $A < B$ vnicus in fractione continua prodibit terminus, ſi ratio inter A et B fuerint multipla; duobus autem conſiſtet fractio continua denominatoribus, ſi ratio $A:B$ pertinnat ad genus rationum ſuperparticularium, plures vero aderunt denominatores, ſi ratio $A:B$ ad genus ſuperpartientium referatur. Reuera autem fractio continua in infinitum excurret, ſi ratio A ad B non fuerit vt numeri ad numerum, ſed vel irrationalis vel transcendens. Ad huiusmodi autem expreſſiones in fractiones continuas transmutandas, oportet vt numeris rationalibus ſint expoſitae ſaltem vero proxime, quemadmoadmodum hoc fieri folet per fractiones decimales. Tales igitur expreffiones fi habeantur, modo praefcripto fractiones continuae formabuntur.

§. 14. Cum autem fractio vel alia expreffio in huius modi fractionem continuam fuerit conuerfa, tum eius expreffionis valor proximus modo §. 10. expofito poterit affignari. Vti fi inuenta fuerit haec expreffio.

$$\frac{A}{B} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{etc.}}}}}$$

atque ex denominatoribus a, b, c, d, etc. formetur fequens fractionum feries

$$\begin{array}{cccccc} & a & b & c & d & e \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+1}{b}; & \frac{abc+c+a}{bc+1}; & \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b} & \text{etc.} \end{array}$$

hae fractiones proxime aequales erunt expreffioni $\frac{A}{B}$, eoque minus diftabunt, quo remotiores fuerint a prima. Ita autem quaelibet harum fractionum erit comparata, vt alia per numeros non maiores exhiberi nequeat, quae propius ad valorem $\frac{A}{B}$ accederet. Hoc itaque modo fequens problema commode foluetur: *Datam fractionem ex magnis numeris conftantem in fimpliciorem conuertere, quae ad illam propius accedat, quam fieri poteft numeris non maioribus.* Problema hoc Wallifius magno ftudio pertractauit, folutionem vero dedit vehementer operofam atque difficilem.

§. 15.

§. 15. Ad methodum noſtrum ad ſolutionem huius problematis auccommodandam, ſit propoſita fractio $\frac{355}{113}$, quae ſecundum *Metium* rationem peripheriae ad diametrum proxime exprimit; quaeramus igitur fractiones minoribus numeris conſtantes ab iſta fractione tam parum diſcrepantes, quam fieri poteſt. Diuido ergo 355 per 113 atque inuenio

$$\frac{355}{113} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}}$$

vnde formo ſequentes fractiones:

$$\begin{array}{cccc} 3, & 7, & 16, & \\ \frac{1}{0}, & \frac{3}{1}, & \frac{22}{7}; & \frac{355}{113} \end{array}$$

fractiones ergo $\frac{3}{1}$ et $\frac{22}{7}$ propius ad fractionem $\frac{355}{113}$ accedunt, quam vllae aliae numeris non maioribus compoſitae; erit autem altera $\frac{22}{7}$ maior, altera $\frac{3}{1}$ minor quam propoſita, vti iam ſupra in genere annotauimus. Has fractiones principales appellare liceat, nam praeter has aſſignari poſſunt aliae minus principales quaeſito aeque ſatisfacientes; ſcilicet vti fractio $\frac{22}{7}$ ex praecedentibus cum indice 7 eſt formata, ita minus principales eodem modo formabuntur, loco 7 minores numeros ſingulos ſubſtituendo.

§. 16. Si autem ratio peripheriae ad diametrum exactior accipiatur, diuiſioque continua vti eſt praeceptum inſtituatur, ſequens quotorum ſeries prodibit 3, 7, 15, 1, 292, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14 etc. ex quibus ſequenti modo fractiones ſimpliciores eruentur.

$$
\begin{array}{cccccc}
3, & 7, & 15, & 1, & 292, & 1, \\
\frac{1}{0}, \frac{3}{1}; & \frac{22}{7}; & \frac{333}{106}; & \frac{355}{113}; & \frac{103993}{33102} & \textit{principales.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\frac{2}{1}, & \frac{19}{6}; & \frac{311}{99}; & \frac{103638}{32989} \;\; \textit{minus principales.} \\
\frac{1}{1}; & \frac{16}{5}; & \frac{289}{92} & ;\frac{103283}{32876} \\
 & ;\frac{13}{4}; & \frac{267}{85} & ;\frac{102928}{32763} \\
 & ;\frac{10}{3}; & \frac{245}{78} & \text{etc.} \\
 & ;\frac{7}{2}; & \frac{223}{71} & \\
 & ;\frac{4}{1}; & \frac{201}{64} & \\
 & & \text{etc.} &
\end{array}
$$

Hoc igitur pacto duplices fractiones nacti ſumus, quarum aliae nimis ſunt magnae, aliae nimis paruae; nimis magnae ſcilicet ſunt, quae ſub indicibus 3, 15, 292, etc. continentur, reliquae nimis ſunt paruae. Atque hinc facile integram tabulam *Wallisianam* condere licet, quae omnes complectitur rationes ad veram peripheriae ad diametrum rationem propius accedentes, quam fieri poteſt numeris non maioribus.

 §. 17.

§. 17. Hac etiam methodo definire licebit rationem constitutionis annorum bissextilium, quo annorum initia perpetuo in eandem tempestatem incidant. Pendet haec determinatio a quantitate anni tropici, quam iuxta accuratissimas obseruationes ponam $365^{d.}\,5^{h.}\,49'\,8''$. Excessus ergo supra 365 dies erit $5.^{h.}$, $49'$ $8''$, qui si aequaretur quartae diei parti, tuto semper quartus quisque annus bissextilis constitueretur; sed cum iste excessus minor sit 6 horis, numerus annorum bissextilium minor debet accipi; quod cognoscetur ex ratione $24\,h.$ ad $5\,h.\;49'$, $8''$ seu ex fractione $\frac{21600}{5237}$, ex qua sequitur in interuallo 21600 annorum tantum 5237 annos bissextiles constitui oportere. Cum autem haec periodus nimis sit magna, minores obtinebimus periodos, fractiones minoribus numeris constantes inuestigando, quae proxime fractioni $\frac{21600}{5237}$ sint aequales. In hunc finem sequentem diuisionem instituo.

$$\begin{array}{r|r|l}
5237 & 21600 & 4 \\
 & 20948 & \\
\hline
652 & 5237 & 8 \\
 & 5216 & \\
\hline
21 & 652 & 31 \\
 & 651 & \\
\hline
1 & 21 & 21
\end{array}$$

Iam ex quotis inuentis 4, 8, 31, 21, qui erunt denominatores fractionis continuae, sequentes formentur fractiones

$$\begin{array}{ccccc}
 & 4, & 8, & 31, & 21 \\
\frac{1}{0}, & \frac{4}{1}; & \frac{33}{8}; & \frac{1027}{249}; & \frac{21600}{5237}.
\end{array}$$

Ha-

Harum fractionum ſecunda $\frac{4}{1}$ ſtatim dat rationem calendarii Iuliani, quo quartus quisque annus ponitur bisſextilis. Propius ergo ſcopus attingeretur, ſi annis 33 tantum 8 anni bisſextiles collocarentur; ex fractione tertia. Cum autem expediat pro annorum periodo numerum pariter parem habere, ſumamus fractiones minus principales quartae respondentes, quae habeant numeratores per 4 diuiſibiles; quae erunt.

$$\frac{136}{33};\ \frac{268}{65};\ \frac{400}{97};\ \frac{532}{129};\ \frac{664}{161};\ \text{etc.}$$

quarum tertia $\frac{400}{97}$ ad computum calendarii eſt commodiſſima. Apparet autem ex ea, interuallo annorum 400 tantum 97 annos bisſextiles conſtitui debere; ſeu tres annos hoc interuallo, qui in calendario Iuliano bisſextiles eſſent, in communes eſſe transmutandos; id quod etiam Conſtitutio Gregoriana praecipit. Ex quo intelligitur minore annorum interuallo accuratiorem correctionem adhiberi non poſſe. Accuratiſſime autem cum ſole calendarium conciliabitur, ſi interuallo 21600 annorum denuo vnus annus, qui ſecundum conſtitutionem Gregorianam bisſextilis eſſe deberet, in communem transmutetur.

§. 18. Quaeramus iam fractiones, quae ad $\sqrt{2}$ tam prope accedant, vt aliae minoribus numeris conſtantes propius accedere nequeant. Eſt vero $\sqrt{2} = 1,41421356 = \frac{141421356}{100000000}$, quae fractio, ſi diuiſione continua iuxta modum praeſcriptum tractetur, dabit hos quotos, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, etc. ex quibus ſequentes formabuntur fractiones quaeſito ſatisfacientes, tam principales quam minus principales

$$\begin{array}{cccccccc}
1, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2 \\
\frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{7}{5}, & \frac{17}{12}, & \frac{41}{29}, & \frac{99}{70}, & \frac{239}{169} \\
 & & \frac{2}{1}; & \frac{4}{3}; & \frac{10}{7}; & \frac{24}{17}; & \frac{58}{41}; & \frac{140}{99} \\
\surd & \Lambda & \surd & \Lambda & \surd & \Lambda & \surd & \Lambda
\end{array}$$

quarum fractionum alternae signo $\surd$ notatae maiores sunt quam $\surd 2$, reliquae vero signum Λ habentes minores quam $\surd 2$.

§ 19. Notatu digna est haec proprietas ipsius $\surd 2$, quod omnes quotos praeter primum habeat aequales binario, ita vt sit

$$\surd 2 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}$$

Simili modo vero etiam si $\surd 3$ euoluatur, reperiuntur quoti 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1 etc. ita vt sit

$$\surd 3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}}}$$

Quamuis

Quamuis enim non conſtet ex ipſa diuiſione, vtrum quoti hac lege vlterius progrediantur, tamen id non ſolum probabile videtur, ſed etiam ſequenti modo demonſtrari poteſt, quo valores huiusmodi fractionum continuarum, in quibus denominatores vel ſunt omnes aequales vel alterni vel terni etc. a poſteriori inueſtigare docebimus.

§. 19. Sit igitur propoſita ſequens fractio continua

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}} \qquad \text{quae ponatur} = x$$

erit

$$x - a = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}} = \frac{1}{b + x - a}$$

hinc erit

$$x^2 - 2ax + bx + a^2 - ab = 1$$

atque

$$x = a - \tfrac{b}{2} + \sqrt{(1 + \tfrac{bb}{4})}.$$

Quare ſi fuerit $b = 2$ et $a = 1$, erit

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}} = \sqrt{2}$$

ſi ergo ponatur $b = 2a$ erit

$$V(a^2 + 1) = a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a \text{ etc.}}}}}$$

vnde ex omnibus numeris, qui vnitate quadratum excedunt expedite per approximationem radix quadrata extrahi poteſt; vti poſito $a = 2$ ſequentes fractiones ad $V5$ proxime inueniendam inſeruient.

2,	4,	4,	4,	4,	4,	4
$\frac{1}{0}$;	$\frac{2}{1}$;	$\frac{9}{4}$;	$\frac{38}{17}$;	$\frac{161}{72}$;	$\frac{682}{305}$;	$\frac{2889}{1292}$; etc.
>	$\frac{1}{1}$;	$\frac{7}{3}$;	$\frac{29}{13}$;	$\frac{123}{55}$;	$\frac{521}{233}$;	$\frac{2207}{987}$
	;	$\frac{5}{2}$;	$\frac{20}{9}$;	$\frac{85}{38}$;	$\frac{360}{161}$;	$\frac{1525}{682}$;
	;	$\frac{3}{1}$;	$\frac{11}{5}$;	$\frac{47}{21}$;	$\frac{199}{89}$;	$\frac{843}{377}$;

§. 20. Sit nunc propoſita ſequens fractio continua

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c \text{ etc.}}}}}}}$$

quae

quae ponatur $= x$ atque valor ipsius x reperietur sequente modo

$$x - a = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b \text{ etc.}}}}}} = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + x - a}}$$

hinc ergo erit $x - a = \frac{x + c - a}{bx + bc - ab + 1}$, seu

$$bxx + bcx - 2abx = abc - a^2 b + c.$$

Si ergo fuerit $c = 2a$ erit

$$bxx = aab + 2a \text{ atque } x = \sqrt{\left(a^2 + \tfrac{2a}{b}\right)}$$

simili modo si ponatur

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d \text{ etc.}}}}}}}$$

erit $x - a = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + x - a}}}$

vnde

vnde ſequitur

$$(bc+1)x^2+(bcd+b+d-c-2abc-2a)x-abcd+a^2bc-ab$$
$$-ad+aa-cd+ac-1=0.$$

Atque hoc modo omnes huiusmodi fractiones continuas, quarum denominatores vel omnes vel alterni vel terni vel quaterni etc. ſunt inter ſe aequales, ſummare licet. Semper autem ſumma ſeu valor x eſt radix ex aequatione quadrata.

§. 21. Antequam ad alias fractiones continuas, in quibus denominatores progreſſiones arithmeticas conſtituunt, ſummandas progrediamur; quantitates quasdam tranſcendentes euoluamus, quae in fractiones continuas conuerſae dent denominatores in progreſſione arithmetica progredientes, quo ex his via euadat planior eiusmodi fractiones continuas ſummandi. Hoc igitur logarithmis aliisque expreſſionibus transcendentibus tentans deprehendi in eiusmodi fractiones continuas deduci, ſi numerus cuius logarithmus hyperbolicus eſt vnitas, eiusque poteſtates quaeque conſiderentur. Poſito igitur hoc numero $=e$, erit $e =$ 2, 71828182845904, qua expreſſione in fractionem continuam conuerſa erit

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1 \text{ etc.}}}}}}}}}}$$

cuius

cuius denominatores terni constituunt progressionem arithmeticam 2, 4, 6, 8 etc. reliqui sunt vnitates. Quae lex etsi ex sola obseruatione est deprehensa, tamen probabile videtur eam in infinitum valere, quod quidem infra certo confirmabitur. Simili modo si $\sqrt{e} = 1,6487212707$ in fractionem continuam conuertatur erit

$$\sqrt{e} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{13 + \text{etc.}}}}}}}}}}}$$

cuius progressionis lex similis est praecedentis. Similiaque obseruare licet in aliis fractionibus continuis, in quas potestates ipsius e transmutantur.

§. 22. Simili modo consideraui radicem cubicam ex numero e cuius logarithmus hyperbolicus est 1, inuenique

$$\frac{\sqrt[3]{e} - 1}{2} = 0,1978062125 = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{30 + \cfrac{1}{42 + \cfrac{1}{54 + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}}$$

 in

in cuius fractionis continuae denominatoribus praeter primum progressio arithmetica obseruatur. Simile accidit, si potestates exponentium integrorum ipsius e considerentur et in fractiones continuas transformentur. Sic considerans quadratum reperi

$$\frac{e^2-1}{2} = 3,19452804951 =$$

$$3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{13 + \cfrac{1}{15} \text{ etc.}}}}}}$$

Deinde etiam ex ipso numero e, ex quo formata fractio continua interruptam habuit progressionem arithmeticam denominatorum, obseruaui paucis mutandis huiusmodi fractionem continuam ab interruptione liberam formari posse. Prodiit enim

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{26 + \text{etc.}}}}}}}$$

in qua regularis inest progressio arithmetica differentia 4 progrediens

§. 23.

§. 23. Cum igitur obseruassem tantam conuenientiam inter fractiones continuas, in quibus denominatores modo interruptam modo non interruptam constituant progressionem Arithmeticum; in eam incidi cogitationem, num forte fractio continua, in qua interrupta sit denominatorum progressio, in aliam non interruptam transformari possit. Consideraui igitur progressionem quamcunque a, b, c, d, e, etc. interque binos contiguos vbique hos duos numeros m, n interpolaui, vt prodiret sequens fractio continua

$$a+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{d\ \text{etc.}}}}}}}}}}$$

hancque inueni aequalem sequenti fractioni continuae, in qua denominatores sine interruptione progrediantur.

$$\frac{1}{mn+1}\left((mn+1)a+n+\cfrac{1}{(mn+1)b+m+n+\cfrac{1}{(mn+1)c+m+n+\cfrac{1}{(mn+1)d+m+n+\cfrac{1}{\text{etc.}}}}}\right)$$

Demonſtratio huius conuenientiae in hoc conſiſtit, quod fractiones ordinariae, quibus ad valorem vtriusque acceditur, inter ſe conueniant: prout tentanti patebit.

§. 24. Si quantitates interpolatae m, n inuertantur ordine, fractio continua poſterior diſcrimen tantum in primo termino patietur ex quo ſequens ſatis elegans theorema conficitur, quo erit

$$a + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{c \text{ etc.}}}}}}} - \left(a + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{c \text{ etc.}}}}}}} \right) = \frac{n - m}{mn + 1}$$

Quicunque ergo numeri loco a, b, c, d, etc. ſubſtituantur differentia inter duas fractiones continuas ſemper erit cognita atque conſtans, ſcilicet $= \frac{n-m}{mn+1}$.

§. 25. Ex eadem inuenta aequalitate inter fractiones continuas ſuperiores, interruptam ſcilicet et non interruptam, ſequens conſequitur aequalitas diuidendo vnitatem per vtramque et addendo vtrinque eandem quantitatem A

$A + 1$

$$A + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{c \text{ etc.}}}}}}}} = A + \cfrac{mn+1}{(mn+1)a + n + \cfrac{1}{(mn+1)b + m + n + \cfrac{1}{(mn+1)c + m + n \atop \text{etc.}}}}$$

Huius ergo aequationis ope quamuis fractionem continuam, interruptam habentem progressionem denominatorum binis quantitatibus m et n conuertere licebit in aliam, in qua denominatores sine interruptione progrediantur. Si ergo vt in fractionibus superioribus habuimus ponatur $m = n = 1$, sequens prodibit aequatio

$$A + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 \text{ etc.}}}}}}} = A + \cfrac{2}{2a + 1 + \cfrac{1}{2b + 2 + \cfrac{1}{2c + 2 + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}$$

Cum igitur ex §. 21. sit

$$\frac{1}{e-2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 \text{ etc.}}}}}$$

erit

erit ponendo $A = 1$, $a = 2$, $b = 4$, vt sequitur

$$\frac{1}{e-2} = 1 + \cfrac{2}{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 \text{ etc.}}}}}}$$

hincque erit vnitatem per vtrumque diuidendo

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{26 + \text{ etc.}}}}}}}}$$

Simili modo ex eodem paragrapho reperietur

$$\sqrt{e} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 \text{ etc.}}}}}}}} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{28 \text{ etc.}}}}}$$

Haeque

Haeque fractiones continuae nunc inuentae tantopere conuergunt, vt facili negotio valores ipsorum e et $\sqrt{e}$ quantumuis prope reperiri queant.

§. 26. Vicissim vero etiam hinc fractio continua in qua denominatores ordine non interrupto progrediuntur, transmutari poterit in aliam, in qua denominatores interrupti sint duobus constantibus numeris m et n: ita inueni fore

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e \text{ etc.}}}}} = a-n+\cfrac{mn+1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{\frac{b-m-n}{mn+1}+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{\frac{c-m-n}{mn+1}+\cfrac{1}{m \text{ etc.}}}}}}}}$$

Vel tollendo fractiones in his denominatoribus, si opus visum fuerit, erit

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d \text{ etc.}}}} = a-n+\cfrac{mn+1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{mn+1}{b-m-n+\cfrac{mn+1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{mn+1}{c-m-n+\cfrac{mn+1}{m+\cfrac{1}{n \text{ etc.}}}}}}}}}$$

si

si ergo ponatur $m=n=1$, habebitur

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d \text{ etc.}}}}=a-1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{1}{2}b-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{1}{2}c-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{1}{2}d-1+\cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}}}}}}$$

§. 27. Quemadmodum hic fractiones continuas, quarum denominatores ita interrupto ordine progrediuntur, vt inter binos quosque contiguos duae interpositae sint quantitates constantes, considerauimus, ita eadem reductio extendi potest ad quatuor vel sex vel octo etc. quantitates constantes interpolatas. Numerus autem impar quantitatum constantum interpolari nequit. Sic si inter quantitatum a, b, c, d, etc. binas quasque contiguas interpolentur hae quatuor m, n, p, q, ponaturque breuitatis gratia $mnpq+mn+mq+pq+1=P$; et $mnp+npq+m+n+p+q=Q$ erit

$$a+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{m \text{ etc.}}}}}}}=\tfrac{1}{P}\left(Pa+npq+n+q+\cfrac{1}{Pb+Q+\cfrac{1}{Pc+Q+\cfrac{1}{Pd+Q+\text{etc.}}}}\right.$$

Atque

Atque ſi fuerit $m = n = p = q = 1$, habebitur

$$a + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 \text{ etc.}}}}}}}} = \tfrac{1}{5}\left(5a + 3 + \cfrac{1}{5b + 6 + \cfrac{1}{5c + 6 + \cfrac{1}{5d + 6 + \text{etc.}}}}\right)$$

Ex quibus noua fractionum continuarum conuerſio naſcitur.

§. 28. Cum autem in praecedentibus, vbi numerum e cuius logarithmus eſt $= 1$, eiusque poteſtates in fractiones continuas conuerti, progreſſionem arithmeticam denominatorum tantum obſeruauerim, neque praeter probabilitatem de huius progreſſionis continuatione in infinitum quicquam affirmare valuerim; in id potiſſimum incubui, vt in huius progreſſionis neceſſitatem inquirerem, eamque firmiter demonſtrarem. Hocque etiam feliciter ſum conſecutus ex peculiari modo, quo integrationem huius aequationis $a\,dy + y^2 dx = x^{\frac{-4n}{2n+1}} dx$ reduxi ad integrationem huius $a\,dq + q^2 dp = dp$ Poſito enim $p = (2n+1)\, x^{\frac{1}{2n+1}}$ inueni eſſe

$$q = \frac{a}{p} + \cfrac{1}{\frac{3a}{p} + \cfrac{1}{\frac{5a}{p} + \cfrac{1}{\frac{7a}{p} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\frac{(2n-1)a}{p} + \cfrac{1}{x^{\frac{2n}{2n+1}} y}}}}}}$$

Vnde cum q per p dari queat, ſitque $p = (2n+1) x^{\frac{1}{2n+1}}$, formari poteſt aequatio finita inter x et y, quae integralis erit aequationis $a\,dy + y^2 dx = x^{\frac{-4n}{2n+1}} dx$, quoties n eſt numerus integer affirmatiuus.

§. 29. Si ergo n ponatur numerus infinitus expreſſio inuenta erit fractio continua in infinitum excurrens, cuius denominatores conſtituent progreſſionem arithmeticam. Quamobrem habebitur ſequens aequatio

$$q = \frac{a}{p} + \cfrac{1}{\frac{3a}{p} + \cfrac{1}{\frac{5a}{p} + \cfrac{1}{\frac{7a}{p} + \cfrac{1}{\frac{9a}{p} + \text{etc.}}}}}$$

atque

atque q ſeu valor huius fractionis continuae ex iſta aequatione $adq + q^2 dp = dp$ definietur. Erit vero $\frac{adq}{1-qq} = dp$ atque $\frac{a}{2} l \frac{1+q}{1-q} = p + C$. quae conſtans ex eo debet determinari, quod poſito $p = 0$ fiat $q = \infty$. Quamobrem erit

$\frac{a}{2} l \frac{q+1}{q-1} = p$, atque $\frac{q+1}{q-1} = e^{\frac{2p}{a}}$ vnde fiet $q = \frac{e^{\frac{2p}{a}} + 1}{e^{\frac{2p}{a}} - 1}$,

qui eſt valor fractionis continuae inuentae. Deinde vero cum ſit $e^{\frac{2p}{a}} = 1 + \frac{2}{q-1}$ habebitur

$$e^{\frac{2p}{a}} = 1 + \cfrac{2}{\cfrac{a-p}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{3a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{5a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{7a}{p} + \text{etc.}}}}}$$

§. 30. Si ponatur $\frac{a}{2p} = s$, ſeu $a = 2ps$ erit

$$e^{\frac{1}{s}} = 1 + \cfrac{2}{2s - 1 + \cfrac{1}{6s + \cfrac{1}{10s + \cfrac{1}{14s + \text{etc.}}}}}$$

 Atque

Atque ex priore inuenta aequatione erit

$$\frac{e^{\frac{1}{s}}+1}{e^{\frac{1}{s}}-1}=2s+\cfrac{1}{6s+\cfrac{1}{10s+\cfrac{1}{14s+\cfrac{1}{18s+\text{etc.}}}}}$$

Si denominatores huius interpolentur binis vnitatibus habebitur

$$\frac{e^{\frac{1}{s}}+1}{e^{\frac{1}{s}}-1}=2s-1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3s-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5s-1+\cfrac{1}{1\ \text{etc.}}}}}}}}$$

Ex qua oritur sequens fractio continua

$$e^{\frac{1}{s}}=1+\cfrac{1}{s-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3s-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5s-1+\cfrac{1}{1\ \text{etc.}}}}}}}}}$$

Ex his vero formulis fluunt omnes ſupra inuentae, quibus poteſtates quasdam ipſius e per fractiones continuas expreſſimus; ex quo neceſſitas progreſſionis ante tantum obſeruatae intelligitur.

§. 31. Iam ergo nacti ſumus fractionem continuam, cuius denominatores progreſſionem arithmeticam conſtituunt, cuiusque valorem exhibere licuit. Cum autem haec progreſſio ſit ſpecies tantum arithmeticae, generalem contemplatus ſum progreſſionem arithmeticam atque fractionem continuam, cuius denominatores eam progreſſionem conſtituant, ſequenti modo ad ſummam reuocaui. Sit ſcilicet ſequens fractio continua, cuius valorem, quem quaero, pono $= s$, ita vt ſit

$$s = a + \cfrac{1}{(1+n)a + \cfrac{1}{(1+2n)a + \cfrac{1}{(1+3n)a + \cfrac{1}{(1+4n)a + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}$$

ex qua quo valorem ipſius s eruam, ab approximatione ad eum ordior. Erit itaque per methodum ſupra traditam

$$\begin{array}{cccc} a, & (1+n)a, & (1+n)2a, & (1+3n)a \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{(1+n)a^2+1}{(1+n)a}; & \frac{(1+n)(1+2n)a^3+(2+2n)a}{(1+n)(1+2n)a^2+1} \end{array}$$

quae fractiones continuo magis ad valorem verum ipſius s accedunt; atque fractio infiniteſima verum ipſius s valorem dabit.

 §. 32.

§. 32. Si hae fractiones vlterius continuentur facile obseruabitur lex, qua formatae sunt; ex eaque concludetur fractionem infinitesimam post numeratoris et denominatoris diuisionem per primum denominatoris terminum fore

$$\frac{a + \frac{1}{1 \cdot na} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 1(1+n)n^2a^3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1(1+n)(1+2n)n^3a^5} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{1(1+n)na^2} + \frac{1}{1 \cdot 2(1+n)(1+2n)n^2a^4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3(1+n)(1+2n)(1+3n)n^3a^6}\ \text{etc.}}$$

cui adeo s aequatur. Posito ergo $a = \frac{1}{\sqrt{nz}}$ erit $s = \frac{1}{\sqrt{nz}} \cdot$

$$\frac{1 + \frac{z}{1 \cdot 1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2 \cdot 1(1+n)} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1(1+n)(1+2n)} + \text{etc.}}{1 + \frac{z}{1(1+n)} + \frac{z^2}{1 \cdot 2 \cdot 1(1+n)(1+2n)} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3(1+n)(1+2n)(1+3n)} + \text{etc.}}$$

qui valor quo obtineatur, ponatur

$$t = 1 + \frac{z}{1 \cdot 1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2 \cdot 1(1+n)} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1(1+n)(1+2n)} + \text{etc.}$$

et $u = 1 + \frac{z}{1(1+n)} + \frac{z^2}{1 \cdot 2(1+n)(1+2n)} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3(1+n)(1+2n)(1+3n)}$

$+$ etc.

ita vt futurum sit $s = \frac{t}{u\sqrt{nz}}$. Ex inspectione autem harum duarum serierum intelligitur fore $dt = udz$; atque simili modo deprehendetur esse $udz + ndu = tdz$. Ponatur $t = vu$, quo fit $s = \frac{v}{\sqrt{nz}}$; erit $vdu + udv = udz$; atque $udz + nzdu = uvdz$; ex quibus sequitur $\frac{du}{u} = \frac{dz - dv}{v} = \frac{vdz - dz}{nz}$, hincque sequens aequatio inter z et v tantum consistens $nzdv - vdz + v^2dz = nzdz$; quae substituto $v = z^{\frac{1}{n}}q$ et $z = r^n$, abibit in hanc

$$dq + q^2dr = nr^{n-2}dr.$$

Ex

Ex qua aequatione, ſi q determinetur per r ponaturque $r = n^{-\frac{1}{n}} a^{-\frac{2}{2}}$, erit valor quaeſitus $s = arq$.

§. 33. Aſſignatio ergo valoris fractionis continuae propoſitae, quem poſui s, exiſtente

$$s = a + \cfrac{1}{(1+n)a + \cfrac{1}{(1+2n)a + \cfrac{1}{(1+3n)a + \cfrac{1}{(1+4n)a \text{ etc.}}}}}$$

perducta eſt ad reſolutionem huius aequationis $dq + q^2 dr = nr^{n-2} dr$; ita autem huius aequationis integrale accipi debet, vt facto $a = \infty$ fiat $s = \infty$, vel poſito $a = 0$ fiat $s = 1$. Vnde ſequens pro introducenda conſtante in integrando regula naſcitur, vt caſu quo non eſt $n > 2$ fiat $q = \infty$ poſito $r = \infty$. Ponimus autem n eſſe numerum affirmatiuum, quo fractio continua oriatur, qualem hactenus conſiderauimus denominatores affirmatiuos habentem.

§. 34. Conſtat autem aequationem inuentam $dq + qqdr = nr^{n-2} dr$ congruere cum aequatione olim a *Com. Riccati* propoſita; iisque propterea tantum caſibus eſſe integrabilem, quibus n eſt numerus huius formae $\frac{2}{2m+1}$ denotante m integrum, eumque affirmatiuum, quo pro n obtineamus numeros affirmatiuos. Ob hos igitur caſus ſequentis fractionis continuae

$$a+\cfrac{1}{\frac{(2m+3)a}{2m+1}+\cfrac{1}{\frac{(2m+5)a}{2m+1}+\cfrac{1}{\frac{(2m+7)a}{2m+1}+\text{etc.}}}}$$

valor ſemper per expreſſionem finitam exhiberi poterit. Quod quidem per ſe facile conſtat, nam facto $m=0$, habemus hanc fractionem continuam

$$a+\cfrac{1}{3a+\cfrac{1}{5a+\cfrac{1}{7a+\cfrac{1}{9a+\text{etc.}}}}}$$

cuius valorem iam ſupra inuenimus. Ad hanc vero reduci poteſt illa generalis poſito enim $a=(2m+1)b$ habebitur

$$(2m+1)b+\cfrac{1}{(2m+3)b+\cfrac{1}{(2m+5)b+\cfrac{1}{\text{etc.}}}}$$

quae in iſta iam cognita toties continetur, quoties m fuerit numerus integer affirmatiuus.

§. 35. Apparet igitur per hanc ipſam fractionum continuarum reſolutionem integrationem aequationis $dq+q^2dr=nr^{n-2}dr$ deduci ad integrationem huius aequationis $dq+q^2dr=2dr$, ſiquidem n fuerit $=\frac{2}{2m+1}$ denotante

tante m numerum integrum affirmatiuum. Quam ipſam reductionem iam ſupra §. 28 eodem modo, quo ex hoc fonte perfici poteſt, expoſui. Quo autem intelligatur, quomodo hac ratione verus huiusmodi fractionum continuarum valor reperiatur, conſiderabo caſum $n = 2$ ſeu $m = 0$, quo orietur

$$s = a + \cfrac{1}{3a + \cfrac{1}{5a + \cfrac{1}{7a + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}$$

Reperietur vero s ex hac aequatione $dq + q^2 dr = 2dr$, quae debito modo integrata dat $r = \frac{1}{2\sqrt{2}} l \frac{q + \sqrt{2}}{q - \sqrt{2}}$ ex qua prodibit $q = \frac{(e^{2r\sqrt{2}} + 1)\sqrt{2}}{e^{2r\sqrt{2}} - 1}$. Eſt vero $r = \frac{1}{a\sqrt{2}}$ atque $s = arq = \frac{q}{\sqrt{2}}$, vnde proueniet valor ipſius $s = \frac{e^{\frac{2}{a}} + 1}{e^{\frac{2}{a}} - 1}$, prorſus vt iam ſupra inuenimus (§. 28.).
