1744

De constructione aequationum

Leonhard Euler

ſit, vt vna alteri aduerſetur, id quod ex his etiam maxime fit manifeſtum. Quodſi itaque nihil utilitatis aut commodi ad propugnaculorum conſtructionem hic afferre mihi licuit, id tamen nactus ſum, vt oſtenderim fruſtra ex hoc principio propugnaculorum emendationem peti; ſed ſimul tamen ſpecimen Algebrae ad Architecturam militarem applicatae exhibui; intra cuius limites me contineo.

DE CONSTRVCTIONE AEQVATIONVM.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Quoties in reſolutione problematum ad aequationes differentiales peruenitur, ante omnia inquirendum eſt, an iſtae aequationes integrationem admittant; perfectiſſime enim problema reſolui cenſendum eſt, quod ad conſtructionem aequationis algebraicae deducitur. At ſi aequatio, quod ſaepiſſime euenit, in formam algebraicam nullo modo transmutari poteſt, tum vel quadraturis vel rectificationibus curuarum, quarum conſtructio habetur, ad problemata reſoluenda vti oportet. Ad

 hoc

hoc vero efficiendum necesse est, vt aequatio solutionem problematis continens, et primi tantum gradus sit differentialis, et praeterea separationem variabilium admittat; si quidem regulis receptis atque iam satis cognitis vti velimus, Hoc enim istae regulae laborant defectu, vt earum ope neque aequationes differentiales altiorum graduum, neque differentiales primi gradus, quarum separatio non constat, construi queant. Hancobrem, nisi aequatio ad differentialem primi gradus reduci, simulque separatio variabilium detegi potest, frustra per illas regulas constructio aequationis inuestigatur.

§. 2. Dedi autem ego iam aliquoties specimina methodi cuiusdam peculiaris multo latius patentis, cuius ope non solum plures aequationes differentiales separationem variabilium non admittentes construxi, sed etiam aequationes differentiales secundi gradus, quae nequidem ad differentiales primi gradus reduci poterant. Initio quidem seriebus infinitis, in quas aequationes propositas transmutaueram, sum vsus, earumque summas ad quadraturas reduxi. Tum vero hanc viam non satis genuinam iudicans, in methodum directam inquisiui, qua ad easdem constructiones pertingere possem. In quo etiam negotio operam non inutiliter collocaui; incidi enim in methodum aequationes modulares eruendi, quarum ope ad constructiones difficillimarum aequationum via paratur. Methodum quidem hanc fusius iam exposui, sed illius vsum eximium in construendis aequationibus illo tempore monstrare non vacabat. Interim tamen nuperrime dedi specimen illarum aequationum, quae ope rectificationis ellipsis construi possunt. Nunc vero, quo vsus huius methodi plenius perspiciatur, casus nonnullos peruoluam speciales, ex quibus plurimarum aequationum constructiones consequantur. Principia autem ex dissertatione de infinitis curuis eiusdem generis, quam praecedente anno praelegi, petam.

§. 3 Cum igitur totum negotium ad inuentionem aequationum modularium recidat, sit $z = \int P dx$, et P functio quaecunque ex x et a aliisque constantibus conflata, in qua quidem integratione ipsius $P dx$ solum x vt variabilis tractetur. Quaeritur autem si integrale $\int P dx$ differentietur ponendo praeter x etiam a variabile, quale differentiale sit proditurum. Inueniri igitur debet aequatio differentialis vel primi, si fieri potest, vel altioris cuiusdam gradus, in qua a aeque insit tanquam variabilis ac x vel z. Huiusmodi ergo aequatio, quam cum *Hermanno* modularem vocaui, tres continebit variabiles z, x, et a; quae autem in aequationem duarum variabilium abibit, si vel ipsi z vel x determinatus vel ab a pendens valor tribuatur. Talis vero aequatio quamcunque habuerit formam, et cuiuscunque sit gradus differentialis, semper ope aequationis $z = \int P dx$ construi poterit. Nam si pro dato quoque ipsius a valore $\int P dx$ exhibeatur, quod per quadraturas fieri potest, et z vel x illi valori assignato aequale capiatur, determinabitur altera ipsarum z vel x per a, eiusque ideo quantitas innotescit. Quocirca hac ratione pro dato alterius indeterminatae valore, alterius quantitas poterit reperiri, in quo ipsa aequationis cuiusuis constructio consistit.

§. 4.

§. 4. Aequatio autem modularis erit vel differentialis primi gradus vel secundi vel tertii vel altioris cuiusdam, prout functio P fuerit comparata. Ad quod dignoscendum et ipsam aequationem modularem inueniendam, oportet sequentes quantitates ex P definire. Primo scilicet differentietur P posito x constante et a variabili, hocque differentiale per da diuisum sit Q. Tum eodem modo Q differentietur posito a tantum variabili, et differentiale per da diuidatur; quod prodit ponatur R. Porro simili modo differentiando R et per da diuidendo orietur noua quantitas S, ex hacque vlterius T, V etc. Omnes ergo hae quantitates Q, R, S, T etc. ex data functione P erunt cognitae. His iam inuentis positoque a iterum constante, si fuerit $\int Q\,dx = \alpha \int P\,dx + K$, vbi α vtcunque datum esse potest per a et constantes, K vero denotat functionem quamcunque ex a, x et constantibus conflatam; tum aequatio modularis erit differentialis primi gradus, quae ex illa obtinetur, si loco $\int P\,dx$ substituatur z et $\frac{dz - P\,dx}{da}$ loco $\int Q\,dx$. Erit ergo aequatio modularis haec $\frac{dz - P\,dx}{da} = \alpha z + K$. Haec vero quantitas K, quia quantitate constante quacunque potest augeri vel minui, ita est accipienda, vt euanescat posito $x = 0$, si quidem integrale ipsius $P\,dx$ ita accipi debeat, vt euanescat posito $x = 0$; quod in sequentibus perpetuo est obseruandum. Loco K ergo semper scribi poterit K − C, estque C quantitas, quae prodit, si in K ponatur $x = 0$.

§. 5. Si $\int Q\,dx$ non pendeat a $\int P\,dx$, ideoque aequatio huius formae $\int Q\,dx = \alpha \int P\,dx + K$ inueniri nequeat, videndum est, num sit $\int R\,dx = \alpha \int Q\,dx + \beta \int P\,dx + K$

vbi

vbi iterum α et β per a et constantes, K vero per x, a et constantes dari ponitur. Si talis formae aequatio poterit formari, tum aequatio modularis erit differentialis secundi gradus, reperieturque per has formulas, $\int P\,dx = z$, $\int Q\,dx = \frac{dz - P\,dx}{da}$, $\int R\,dx = \frac{d\left(\frac{dz - P\,dx}{da}\right) - Q\,dx}{da}$.

Simili modo si vlterius progrediamur ad aequationes, in quibus $\int S\,dx$, $\int T\,dx$ etc. insunt, tum aequatio modularis differentialis erit altiorum graduum, atque reipsa inuenietur tum ex istis formulis tum ex sequentibus, quae sunt: $\int S\,dx = \frac{d\left(\frac{d\left(\frac{dz - P\,dx}{da}\right) - Q\,dx}{da}\right) - R\,dx}{da}$

et $\int T\,dx$ aequatur differentiali huius quantitatis ipso $S\,dx$ minuto et per da diuiso. Hocque modo vlterius est progrediendum, si aequatio modularis ad differentialia altiorum graduum ascendat.

§. 6. His praemissis praeceptis considerabo hanc aequationem specialem $z = \int e^{ax} X\,dx$, vbi X functionem quamcunque ipsius x et constantium ab a non pendentem significet. Atque primo quidem inuestigabo, qualem valorem X habere debeat, vt aequatio modularis fiat tantum differentialis primi gradus; simulque cuiusmodi aequationes ope formulae $z = \int e^{ax} X\,dx$ construi possint. Est vero e numerus, cuius logarithmus est vnitas, atque integrale ipsius $e^{ax} X\,dx$ ita sumi pono, vt euanescat posito $x = 0$. Cum igitur sit $P = e^{ax} X$, et X ab a non pendeat, erit $e^{ax} X x\,da$ eius differentiale posito x constante,

 ideoque

ideoque $Q = e^{ax} X x$. Quo ergo aequatio modularis fit differentialis primi gradus, oportet sit $\int e^{ax} X dx = \alpha \int e^{ax} X dx + K - C$. Ponamus $K = e^{ax} X p$ et sumantur differentialia posito a constante habebitur $e^{ax} X x dx = \alpha e^{ax} X dx + e^{ax} X dp + e^{ax} p dX + e^{ax} a X p dx$ seu $X x dx = \alpha X dx + X dp + p dX + a X p dx$. Vnde oritur $\frac{dX}{X} = \frac{x dx - \alpha dx - dp - a p dx}{p}$, vbi pro p talis valor in x accipi debet, vt X ab a omnino non pendens prodeat; at α vtcunque ab a pendens effici potest.

§. 7. Inuentis autem hinc idoneis valoribus pro X erit aequatio modularis $dz - e^{ax} X dx = \alpha z da + (e^{ax} X p - C) da$. Ponamus primo esse p constans $= m$, erit $\frac{dX}{X} = \frac{x dx - (\alpha + m a) dx}{m}$, fiatque $\alpha + m a = b$ seu $\alpha = b - m a$, ita vt b et m ab a non pendeant; erit $\frac{dX}{X} = \frac{x dx - b dx}{m}$ et $lX = \frac{x^2 - 2bx}{2m}$ atque $X = e^{\frac{x^2 - 2bx}{2m}}$; constans vero C erit $= m$. Quamobrem ex aequatione $z = \int e^{\frac{x^2 - 2bx + 2max}{2m}} dx$ oritur ista aequatio modularis $dz = (b - ma) z da - m da + e^{\frac{x^2 - 2bx + 2max}{2m}} (dx + m da)$. Haec ergo aequatio, cuicunque functioni ipsius a quantitas x aequalis ponatur, vt duae tantum variabiles z et a supersint, semper construi potest; quod quidem aliunde iam patet, quia altera variabilis z vnicam habet dimensionem. At si ipsi z datus per a et constantes valor tribuatur, habebitur aequatio inter variabiles a et x tantum, quae consueto more minus tractabilis videtur: interima rim tamen hoc modo conſtrui poterit, pro quouis ipſius a valore conſtruatur curua, cuius applicata abſciſſae x reſpondens ſit $= e^{\frac{x^2 - 2bx + 2max}{2m}}$ in hacque curua ſumatur area aequalis eidem ipſius a functioni, cui z eſt aequalis, erit abſciſſa hoc modo determinata verus valor ipſius x.

§. 8. Prodierunt haec ex poſitione $p = m$, atque m et b erant quantitates conſtantes a non inuoluentes. Ponamus autem porro $p = \beta + \gamma x$, erit $\frac{dx}{x} = \frac{x\,dx - \alpha\,dx - \gamma\,dx - \beta a\,dx - \gamma a\,dx}{\beta + \gamma x}$, quae expreſſio, quo a ex ea excedat ponatur $\frac{dx}{x} = \frac{fx\,dx - g\,dx}{mx + n}$ vbi f, g, m et n non inuoluant a, erit $\beta = \frac{n}{f + ma}$, $\gamma = \frac{m}{f + ma}$ et $\alpha = \frac{g - m - na}{f + ma}$, atque $p = \frac{n + mx}{f + ma}$. Hinc oritur $l\mathrm{X} = \frac{fx}{m} - \frac{fn - gm}{m^2} l(mx + n)$ atque $\mathrm{X} = e^{\frac{fx}{m}} (mx + n)^{\frac{-fn - gm}{m^2}}$, et $\mathrm{K} = e^{ax + \frac{fx}{m}} (mx + n)^{\frac{m^2 - fn - gm}{m^2}} : (f + ma)$, ideoque $\mathrm{C} = \frac{n^{\frac{m^2 - fn - gm}{m^2}}}{f + ma}$. Ponatur $f = 0$, quod ſine detrimento vniuerſalitatis fieri poteſt, erit $z = \int e^{ax} (mx + n)^{\frac{-g}{m}} dx$; vnde ſequens orietur aequatio modularis $dz = \frac{(g - m - na)\,z\,da}{ma} +$

$$\frac{e^{ax} (mx + n)^{\frac{-g}{m}} (ma\,dx + n\,da + mx\,da)}{ma} - \frac{n^{\frac{m-g}{m}}\,da}{ma}.$$

Detur quomodocunque z per a ita vt ſit $dz +$

$\frac{n^{\frac{m-g}{m}} da - (g - m - na) z da}{ma} = \frac{A da}{ma}$, habebitur constructio huius aequationis $A da = e^{ax} (mx + n)^{\frac{-g}{m}} (ma dx + n da + mx da)$, quae quidem facta substitutione $x = \frac{y - na}{ma}$ facile separatur.

§. 9. Cum igitur hae aequationes, quae ex aequationibus modularibus differentialibus primi gradus eliciuntur, receptas regulas constructionum non superent, pregrediendum est ad aequationes modulares differentiales secundi gradus. Retinebo vero priorem formam $z = \int e^{ax} X dx$ et inuestigabo, cuiusmodi functionem ipsius x esse oporteat X, quo aequatio modularis ad differentio-differentialia ascendat. Erit vero $P = e^{ax} X$, $Q = e^{ax} X x$, et $R = e^{ax} X x^2$. quare pono $\int e^{ax} X x^2 dx = \alpha \int e^{ax} X x dx + \beta \int e^{ax} X dx + K - C$. Sumatur $K = e^{ax} X p$, habebitur sumtis differentialibus $X x^2 dx = \alpha X x dx + \beta X dx + X dp + p dX + a X p dx$, vnde fit $\frac{dX}{X} = \frac{x^2 dx - \alpha x dx - \beta dx - dp - ap dx}{p}$. Ponatur $p = \frac{(x - \gamma)(x - \delta)}{a}$ erit $\frac{dX}{X} = \frac{-dp}{p} + \frac{a(\gamma + \delta - \alpha) x dx - a(\gamma\delta + \beta) dx}{(x - \gamma)(x - \delta)}$. Sit $a\gamma + a\delta - \alpha a = f$ seu $\alpha = \gamma + \delta - \frac{f}{a}$ et $\beta = \frac{g}{a} - \gamma\delta$, existentibus γ, δ, et f, g, quantitatibus ab a non pendentibus. Erit ergo $\frac{dX}{X} = \frac{-dp}{p} + \frac{fx dx - g dx}{(x - \gamma)(x - \delta)}$ atque $lX - lc = \frac{\gamma f - g - \gamma + \delta}{\gamma - \delta} l(x - \gamma) + \frac{\delta f - g - \delta + \gamma}{\delta - \gamma} l(x - \delta)$ seu $X = c (x - \gamma)^{\frac{\gamma f - g - \gamma + \delta}{\gamma - \delta}} (x - \delta)^{\frac{\delta f - g - \delta + \gamma}{\delta - \gamma}}$.

§. 10.

§. 10. Ponatur $\frac{\gamma f - g - \gamma + \delta}{\gamma - \delta} = \lambda$ et $\frac{\delta f - g - \delta + \gamma}{\delta - \gamma} = \mu$ erit $f = \lambda + \mu + 2$ et $g = \gamma\mu + \delta\lambda + \gamma + \delta$. Hinc erit $X = c(x-\gamma)^\lambda (x-\delta)^\mu$, $\alpha = \gamma + \delta - \frac{\lambda - \mu - 2}{a}$ et $\mathfrak{C} = \frac{\gamma\mu + \delta\lambda + \gamma + \delta}{a} - \gamma\delta$, atque $K = c\frac{e^{ax}(x-\gamma)^{\lambda+1}(x-\delta)^{\mu+1}}{a}$ et $C = \frac{c(-\gamma)^{\lambda+1}(-\delta)^{\mu+1}}{a}$. Quocirca fiet $z = \int e^{ax}(x-\gamma)^\lambda (x-\delta)^\mu c\,dx$, quae dabit sequentem aequationem modularem $d\left(\frac{dz - e^{ax}(x-\gamma)^\lambda (x-\delta)^\mu c\,dx}{da}\right) = e^{ax}(x-\gamma)^\lambda(x-\delta)^\mu c\,x\,dx + (\gamma+\delta)dz - \frac{(\lambda+\mu+2)dz}{a} - (\gamma+\delta - \frac{\lambda-\mu-2}{a})e^{ax}(x-\gamma)^\lambda(x-\delta)^\mu c\,dx + \frac{(\gamma\mu+\delta\lambda+\gamma+\delta)z\,da}{a} - \gamma\delta z\,da + \frac{e^{ax}(x-\gamma)^{\lambda+1}(x-\delta)^{\mu+1}c\,da}{a} - \frac{(-\gamma)^{\lambda+1}(\delta)^{\mu+1}}{a}$

Siue quod eodem redit $z = \int e^{ax}(\varepsilon x + \eta)^\lambda (\zeta x + \theta)^\mu dx$ dat istam aequationem modularem.

$$d\left(\frac{dz - e^{ax}(\varepsilon x+\eta)^\lambda(\zeta x + \theta)^\mu dx}{da}\right) = e^{ax}(\varepsilon x + \eta)^\lambda (\zeta x + \theta)^\mu x\,dx$$
$$-\left(\frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{\theta}{\zeta} + \frac{\lambda+\mu+2}{a}\right)(dz - e^{ax}(\varepsilon x + \eta)^\lambda(\zeta x + \theta)^\mu dx)$$
$$-\left(\frac{\eta(\mu+1)}{\varepsilon a} + \frac{\theta(\lambda+1)}{\zeta a} + \frac{\eta\theta}{\varepsilon\zeta}\right)z\,da + e^{ax}(\varepsilon x + \eta)^{\lambda+1}(\zeta x + \theta)^{\mu+1}\frac{da}{\varepsilon\zeta a}$$
$$-\frac{\eta^{\lambda+1}\theta^{\mu+1}da}{\varepsilon\zeta a}$$

, in qua litterae $\varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \lambda, \mu$ denotant quantitates constantes ab a non pendentes.

§. 11. Tribuatur ipsi x valor vel constans vel ab a quomodocunque pendens, et sumto da constante loco omnium terminorum, in quibus non inest z scribatur $A\,da^2$

 deno-

denotante A functionem reſultantem ipſius a et conſtantium. Quo facto abibit aequatio modularis in ſequentem aequationem duas tantum variabiles z et a inuoluentem: $ddz + (\frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{\theta}{\zeta} + \frac{\lambda + \mu + 2}{a}) dz + (\frac{\eta(\mu + 1)}{\varepsilon a} + \frac{\theta(\lambda + 1)}{\zeta a} + \frac{\eta\theta}{\varepsilon\zeta}) z da = A da$, ſeu $\frac{ddz}{da} + (b + \frac{c}{a}) dz + (f + \frac{g}{a}) z da = A da$ poſitis $\frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{\theta}{\zeta} = b$, $\lambda + \mu + 2 = c$, $\frac{\eta\theta}{\varepsilon\zeta} = f$, et $\frac{\eta(\mu + 1)}{\varepsilon} + \frac{\theta(\lambda + 1)}{\zeta} = g$. Haec ergo aequatio differentio-differentialis ope aequationis $z = \int e^{ax} (\varepsilon x + \eta)^{\lambda}) (\zeta x + \theta)^{\mu} dx$ poterit conſtrui. Simili modo ſi ipſi z tribuatur valor vel conſtans vel ab a pendens, aequatio modularis abibit in aequationem differentio differentialem inter x et a multo magis implicatam, cuius nihilo minus conſtructio poteſt exhiberi.

§. 12. Quo autem obtineamus aequationes differentialis primi gradus, quae hoc modo conſtrui queant, oportet, vt aequationes ita erutae ad differentiales primi gradus reduci queant. Id quod ſuccederet ſi talis ipſius x valor poſſet aſſignari, vt A euaneſcat, hoc vero admodum difficulter poteſt praeſtari, niſi plures litterarum arbitrariarum definire velimus. Aſſumo ergo aequationem fundamentalem magis compoſitam hanc $z = E \int e^{ax} (\eta + \varepsilon x)^{\lambda} (\theta + \zeta x)^{\mu} dx + F \int e^{-ax} (\eta - \varepsilon x)^{\lambda} (\theta - \zeta x)^{\mu} dx$, vbi E, F, ε, ζ, η, θ, λ, μ ſint quantitates conſtantes ab a non pendentes. Poſito vero vt ante $b = \frac{\theta}{\zeta} + \frac{\mu}{\varepsilon}$, $c = \lambda + \mu + 2$, $f = \frac{\eta\theta}{\varepsilon\zeta}$ et $f = \frac{\eta(\mu + 1)}{\varepsilon} + \frac{\theta(\lambda + 1)}{\zeta}$, inuenietur ex hac aequatione ſequens modularis:

$d(dz$

$$d\left(\frac{dz - \mathrm{E}e^{ax}(\eta+\varepsilon x)^\lambda(\theta+\zeta x)^\mu dx - \mathrm{F}e^{-ax}(\eta-\varepsilon x)^\lambda(\theta-\zeta x)^\mu dx}{da}\right)$$
$$= \mathrm{E}e^{ax}(\eta+\varepsilon x)^\lambda(\theta+\zeta x)^\mu x dx - \mathrm{F}e^{-ax}(\eta-\varepsilon x)^\lambda(\theta-\zeta x)^\mu x dx$$
$$-(b+\tfrac{c}{a})(dz - \mathrm{E}e^{ax}(\eta+\varepsilon x)^\lambda(\theta+\zeta x)^\mu dx - \mathrm{F}e^{-ax}(\eta-\varepsilon x)^\lambda(\theta-\zeta x)^\mu dx)$$
$$-\left(f+\frac{g}{a}\right)z da + \frac{\mathrm{E}e^{ax}(\eta+\varepsilon x)^{\lambda+1}(\theta+\zeta x)^{\mu+1} da}{\varepsilon\zeta a} -$$
$$\frac{\mathrm{F}e^{-ax}(\eta-\varepsilon x)^{\lambda+1}(\theta-\zeta x)^{\mu+1} da}{\varepsilon\zeta a} - \frac{(\mathrm{E}-\mathrm{F})\eta^{\lambda+1}\theta^{\mu+1} da}{\varepsilon\zeta a}.$$

§. 13. Quo nunc talis valor pro x ſubſtituendus inueniatur, vt omnes termini praeter eos in quibus ineſt z euaneſcant, facio $\mathrm{E} = \mathrm{F} = 1$, quo terminus vltimus euaneſcat. Deinde pono $\frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{\theta}{\zeta} = 0$ ſeu $b = 0$, atque facio $x = \frac{-\eta}{\varepsilon}$, vt ambo termini penultimi euaneſcant, ad quod quidem requiritur vt $\lambda + 1$ et $\mu + 1$ ſint numeri affirmatiui. Quia itaque x conſtantem habet valorem, omnes termini in quibus ineſt dx euaneſcent. Fiat breuitatis gratia $\varepsilon = -1$, $\zeta = 1$, et $\eta = \theta = b$, erit $b = 0$. $c = \lambda + \mu + 2$, $f = -b^2$, et $g = \lambda b - \mu b = b(\lambda - \mu)$. atque aequatio fundamentalis abibit in hanc:

$$z = \int e^{ax}(b-x)^\lambda(b+x)^\mu dx + \int e^{-ax}(b+x)^\lambda(b-x)^\mu dx.$$

In qua ſi ſumatur $x = b$ et a tanquam variabilis tractetur prodibit ſequens aequatio inter z et a, ſi da conſtans ponatur: $\frac{ddz}{da} + \frac{cdz}{a} + (f + \frac{g}{a}) z da = 0$, quae in aequationem differentialem primi gradus transmutabitur facto $z = e^{\int t da}$, prodibit enim $dt + t^2 da + \frac{ct da}{a} + (f + \frac{g}{a}) da = 0$. Ponatur $ta^c = y$ ſeu $t = a^{-c}y$ habebitur $dy +$

$y^2 da$

$\frac{y^2 da}{a^c} + (fa^c + ga^{c-1})da = 0$. Fiat porro $a^{1-c} = u$; erit $\frac{da}{a^c} = \frac{du}{1-c}$ adeoque $dy + \frac{y^2 du}{1-c} + \frac{f}{1-c} u^{\frac{2c}{1-c}} du + \frac{g}{1-c} u^{\frac{2c-1}{1-c}} du = 0$, seu $(\lambda + \mu + 1)dy = y^2 du - b^2 u^{\frac{-2\lambda - 2\mu - 4}{\lambda + \mu + 1}} du + b(\lambda - \mu) u^{\frac{-2\lambda - 2\mu - 3}{\lambda + \mu + 1}} du$. Ponatur $\lambda + \mu = m$, $\lambda - \mu = n$, habebitur ista aequatio $(m + 1)dy = y^2 du - b^2 u^{\frac{-2m-4}{m+1}} du + nbu^{\frac{-2m-3}{m+1}} du$ quae construi potest ex aequatione $z = \int e^{ax}(b-x)^{\frac{m+n}{2}}(b+x)^{\frac{m-n}{2}} dx + \int e^{-ax}(b+x)^{\frac{m+n}{2}}(b-x)^{\frac{m-n}{2}} dx$. Nam si post integrationem ita institutam, vt posito $x = 0$, z euanescat, capiatur $x = b$, et pro a substituatur $u^{\frac{-1}{m+1}}$ habebitur functio ipsius u quae sit V, erit $y = \frac{-(m+1)dV}{Vdu}$ qui est verus valor ipsius y in aequatione inuenta. Notandum vero est $m + n$ et $m - n$ numeros affirmatiuos esse debere.

§. 14. Si tam $\frac{m+n}{2}$ quam $\frac{m-n}{2}$ fuerint numeri integri affirmatiui, tum valor ipsius z per integrationem poterit exhiberi, et proinde valor ipsius V reipsa assignari. His igitur casibus aequatio proposita $(m + 1)dy = y^2 du - b^2 u^{\frac{-2m-4}{m+1}} du + nbu^{\frac{-2m-3}{m+1}} du$ more consueto poterit integrari, eiusque integrale exhiberi. Ponatur ergo $m = i + k$, et $n = i - k$ denotantibus i et k numeros ris integris affirmatiuis, et habebimus hanc aequationem $(1+i+k)dy = y^2 du - b^2 u^{\frac{-2i-k-4}{i+k+1}} du + (i-k) b u^{\frac{-2i-2k-1}{i+k+1}} du$; quae non solum modo supra exposito construi, sed etiam consueto more separari et integrari poterit. Nam in aequatione $z = \int e^{ax} (b-x)^i (b+x)^k dx + \int e^{-ax} (b+x)^i (b-x)^k dx$ post integrationem, quae actu succedet, ita institutam, vt posito $x = 0$ euanescat z, ponatur $x = b$ et pro a substituatur hic valor $u^{\frac{-1}{i+k+1}}$; quo facto z aequabitur functioni cuidam ipsius u, quae sit V; inuento vero V erit $y = \frac{-(i+k+1)dV}{V du}$. Si fiat insuper $k = i$ prodibit aequatio a Com. *Riccato* quondam proposita $(1+2i) dy = y^2 du - b^2 u^{\frac{-4i-4}{2i+1}} du$, cuius adeo constructio vniuersalis est exhibita.
