University of the Pacific
Scholarly Commons

Euler Archive - All Works | Euler Archive

1741

Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works

Part of the Mathematics Commons

Record Created:
2018-09-25

Recommended Citation
Euler, Leonhard, "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis" (1741). *Euler Archive - All Works*. 53.
https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/53

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

SOLVTIO PROBLEMATIS AD GEOMETRIAM SITVS PERTINENTIS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula VIII. PRaeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates verſatur, et omni tempore ſummo ſtudio eſt exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam ſitus vocauit. Iſta pars ab ipſo in ſolo ſitu determinando, ſitusque proprietatibus eruendis occupata eſſe ſtatuitur; in quo negotio neque ad quantitates reſpiciendum, neque calculo quantitatum vtendum ſit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc ſitus Geometriam pertineant, et quali methodo in iis reſoluendis vti oporteat, non ſatis eſt definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio eſſet facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque ſolutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam ſitus referre haud dubitaui: praeſertim quod in eius ſolutione ſolus ſitus in conſiderationem veniat, calculus vero nullius prorſus ſit vſus. Methodum ergo meam quam ad huius generis problemata

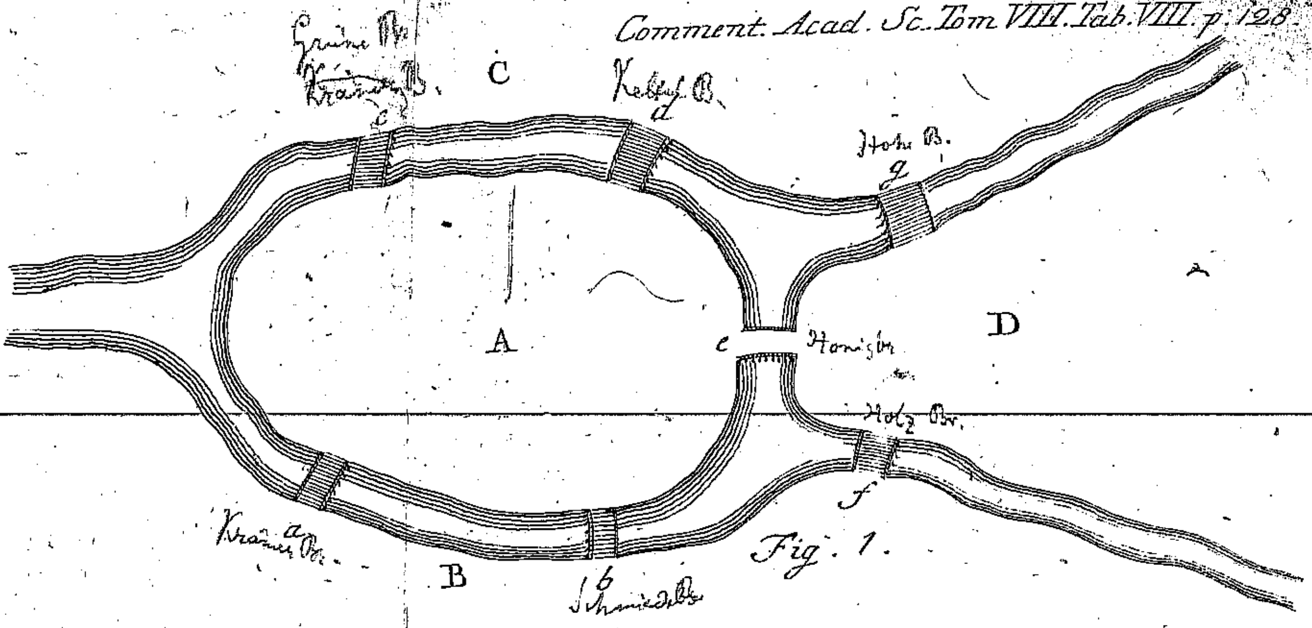

Fig. 1.

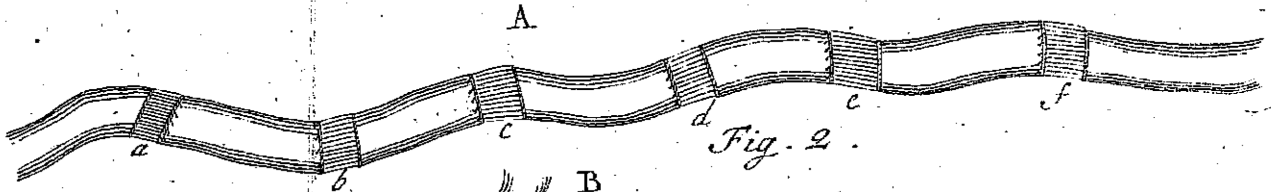

Fig. 2.

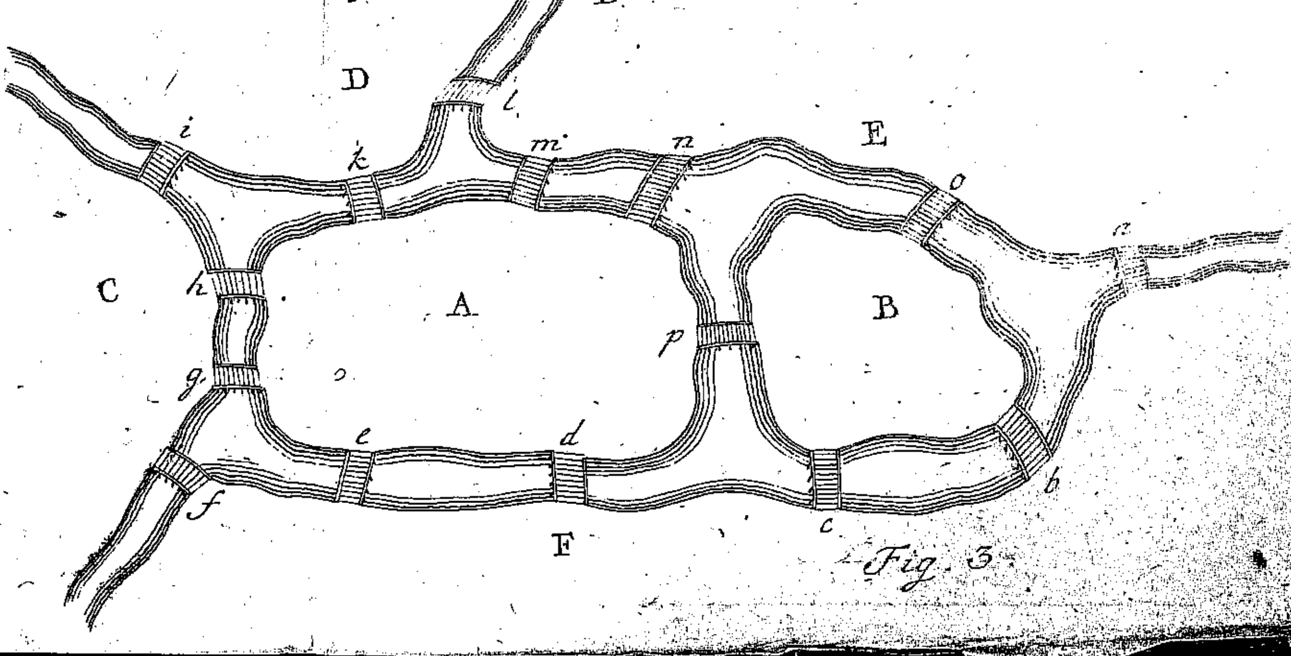

Fig. 3.

mata soluenda inueni, tanquam specimen Geometriae situs hic exponere constitui.

§. 2. Problema autem hoc, quod mihi satis notum esse perhibebatur, erat sequens: Regiomonti in Borussia esse insulam A der Kneiphof dictam, fluuiumque eam cingentem in duos diuidi ramos, quemadmodum ex figura videre licet: ramos vero huius fluuii septem instructos esse pontibus, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, et *g*. Circa hos pontes iam ista proponebatur quaestio, num quis cursum ita instituere queat, vt per singulos pontes semel et non plus quam semel transeat. Hocque fieri posse, mihi dictum est, alios negare alios dubitare; neminem vero affirmare. Ego ex hoc mihi sequens maxime generale formaui problema; quaecunque sit fluuii figura et distributio in ramos, atque quicunque fuerit numerus pontium, inuenire, vtrum per singulos pontes semel tantum transiri queat, an vero secus? Figura 1.

§. 3. Quod quidem ad problema Regiomontanum de septem pontibus attinet, id resolui posset facienda perfecta enumeratione omnium cursuum, qui institui possunt; ex his enim innotesceret, num quis cursus satisfaceret, an vero nullus. Hic vero soluendi modus propter tantum combinationum numerum et nimis esset difficilis atque operosus, et in aliis quaestionibus de multo pluribus pontibus ne quidem adhiberi posset. Hoc porro modo si operatio ad finem perducatur multa inueniuntur, quae non erant in quaestione; in quo procul dubio tantae difficultatis causa consistit. Quamobrem missa hac methodo, in aliam inquisiui, quae plus non lar-

largiatur, quam ostendat, vtrum talis cursus institui queat, an secus; talem enim methodum multo simpliciorem fore sum suspicatus.

§. 4. Innititur autem tota mea methodus idoneo modo singulos pontium transitus designandi, in quo vtor litteris maiusculis A, B, C, D, singulis regionibus adscriptis, quae flumine sunt separatae. Ita si quis ex regione A in regionem B transmigrat per pontem *a* siue *b*, hunc transitum denoto litteris AB, quarum prior praebet regionem ex qua exierat viator, posterior vero dat regionem in quam pontem transgressus peruenit. Si deinceps viator ex regione B abeat in regionem D per pontem *f*, hic transitus repraesentabitur litteris BD; duos autem hos transitus successiue institutos AB et BD denoto tantum tribus litteris ABD, quia media B designat tam regionem, in quam primo transitu peruenit, quam regionem ex qua altero transitu exit.

§. 5. Simili modo si viator ex regione D progrediatur in regionem C per pontem *g*, hos tres transitus successiue factos quatuor litteris ABDC denotabo. Ex his enim quatuor litteris ABDC intelligetur viatorem primo in regione A existentem transiisse in regionem B, hinc esse progressum in regionem D, ex hacque vltra esse profectum in C: cum vero hae regiones fluuiis sint a se inuicem separatae, necesse est vt viator tres pontes transierit. Sic transitus per quatuor pontes successiue instituti quinque litteris denotabuntur; et si viator trans quotcunque pontes eat, eius migratio per litterarum numerum, qui vnitate est maior

ior quam numerus pontium, denotabitur. Quare tranſitus per ſeptem pontes ad deſignandum octo requirit litteras.

§. 6. In hoc deſignando modo non reſpicio, per quos pontes tranſitus ſit factus, ſed ſi idem tranſitus ex vna regione in aliam per plures pontes fieri poteſt, perinde eſt per quemnam transeat, modo in deſignatam regionem perueniat. Ex quo intelligitur, ſi curſus per ſeptem figurae pontes ita inſtitui poſſet, vt per ſingulos ſemel ideoque per nullum bis transeatur; hunc curſum octo litteris repraeſentari poſſe, easque litteras ita eſſe debere diſpoſitas, vt immediata litterarum A et B ſucceſſio bis occurrat, quia ſunt duo pontes *a* et *b* has regiones A et B iungentes, ſimili modo ſucceſſio litterarum A et C quoque debet bis occurrere in illa octo litterarum ſerie; deinde ſucceſſio litterarum A et D ſemel occurret; ſimiliterque ſucceſſio litterarum B et D, itemque C et D ſemel occurrat neceſſe eſt.

§. 7. Quaeſtio ergo huc reducitur, vt ex quatuor litteris A, B, C et D ſeries octo litterarum formetur, in qua omnes illae ſucceſſiones toties occurrant quoties eſt praeceptum. Antequam autem ad talem diſpoſitionem opera adhibeatur, oſtendi conuenit, vtrum tali modo hae litterae diſponi queant an non. Si enim demonſtrari poterit talem diſpoſitionem omnino fieri non poſſe, inutilis erit omnis labor, qui ad hoc efficiendum locaretur. Quamobrem regulam inueſtigaui, cuius ope tam pro hac quaeſtione, quam pro

omnibus similibus, facile discerni queat, num talis litterarum dispositio locum habere queat.

Figura 2. §. 8. Considero ad huiusmodi regulam inueniendam vnicam regionem A, in quam quotcunque pontes a, b, c, d etc. conducant. Horum pontium contemplor primo vnicum a, qui ad regionem A ducat; si nunc viator per hunc pontem transeat vel ante transitum esse debuit in regione A vel post transitum in A perueniet; quare in supra stabilito transitus designandi modo oportet vt littera A semel occurrat. Si tres pontes puta a, b, c in regionem A conducant, et viator per omnes tres transeat, tum in designatione eius migrationis littera A bis occurret, siue ex A initio cursum instituerit siue minus. Simili modo si quinque pontes in A conducant, in designatione transitus per eos omnes littera A ter occurrere debet. Atque si numerus pontium fuerit quicunque numerus impar, tum si is vnitate augeatur, eius dimidium dabit, quot vicibus littera A occurrere debeat.

Figura 1. §. 9. In casu igitur pontium transeundorum Regiomontano, quia in insulam A quinque pontes deducunt a, b, c, d, e, necesse est, vt in designatione transitus per hos pontes littera A ter occurrat. Deinde littera B, quia in regionem B tres pontes conducunt, bis debet occurrere, similique modo littera D bis debet occurrere, atque etiam littera C bis. In serie ergo octo litterarum, quibus transitus per septem pontes deberet designari, littera A ter adesse deberet, litterarum vero

B, C,

B, C, et D vnaquaeque bis; id quod in ſerie octo litterarum omnino fieri nequit. Ex quo perſpicuum eſt, per ſeptem pontes Regiomontanos talem tranſitum inſtitui non poſſe.

§. 10. Simili modo de omni alio caſu pontium ſi quidem numerus pontium, qui in quamque regionem conducit fuerit impar, iudicari poteſt, an per ſingulos pontes tranſitus ſemel fieri queat. Si enim euenit, vt ſumma omnium vicium, quibus ſingulae litterae occurrere debent, aequalis ſit numero omnium pontium vnitate aucto, tum talis tranſitus fieri poteſt; ſin autem vt in noſtro exemplo accidit, ſumma omnium vicium maior fuerit numero pontium vnitate aucto, tum talis tranſitus nequaquam inſtitui poteſt. Regula autem quam dedi pro numero vicium A ex numero pontium in regionem A deducentium inueniendo aeque valet; ſiue omnes pontes ex vna regione B, vt in figura repraeſentatur, ducant, ſiue ex diuerſis; tantum enim regionem A conſidero, et inquiro quot vicibus littera A occurrere debeat. Figura 2.

§. 11. Si autem numerus pontium, qui in regionem A conducunt, fuerit par, tum circa tranſitum per ſingulos notandum eſt, vtrum initio viator curſum ſuum ex regione A inſtituerit an non. Si enim duo pontes in A conducant, et viator ex A curſum inceperit, tum littera A bis occurrere debet, ſemel enim adeſſe debet ad deſignandum exitum ex A per alterum pontem, et ſemel quoque ad deſignandum reditum

in A per alterum pontem. Sin autem viator ex alia regione curſum inceperit, tum ſemel tantum littera A occurret, ſemel enim poſita tam aduentum in A quam exitum inde denotabit, vt huiusmodi curſus deſignare ſtatui.

§. 12. Conducant iam quatuor pontes in regionem A, et viator ex A curſum incipiat, tum in deſignatione totius curſus littera A ter adeſſe debebit, ſi quidem per ſingulos ſemel transierit. At ſi ex alia regione ambulare inceperit, tum bis tantum littera A occurret. Si ſex pontes ad regionem A conducant, tum littera A, ſi ex A initium eundi eſt ſumtum, quater occurret, at ſi non ex A initio exierit viator, tum ter tantum occurrere debebit. Quare generaliter ſi numerus pontium fuerit par, tum eius dimidium dat numerum vicium, quibus littera A occurrere debet, ſi initium non eſt in regione A ſumtum; dimidium vero vnitate auctum dabit numerum vicium, quoties littera A occurrere debet, initio curſus in ipſa regione A ſumto.

§. 13. Quia autem in tali curſu nonniſi ex vna regione initium fieri poteſt, ideo ex numero pontium, qui in quamuis regionem deducunt, ita numerum vicium, quoties littera quamque regionem denotans occurrere debet, definio, vt ſumam numeri pontium vnitate aucti dimidium, ſi numerus pontium fuerit impar; ipſius vero numeri pontium medietatem, ſi fuerit par. Deinde ſi numerus omnium vicium adaequet numerum pontium vnitate auctum, tum tranſitus deſideratus ſuccedit, at initium ex regione, in quam impar pontium nume-

numerus ducit, capi debet. Sin autem numerus omnium vicium fuerit vnitate minor, quam pontium numerus vnitate auctus, tum transitus succedet incipiendo ex regione, in quam par pontium numerus ducit, quia hoc modo vicium numerus vnitate est augendus.

§. 14. Proposita ergo quacunque aquae pontiumque figura, ad inuestigandum, num quis per singulos semel transire queat, sequenti modo operationem instituo. Primo singulas regiones aqua a se inuicem diremtas litteris A, B, C etc. designo. Secundo sumo omnium pontium numerum, eumque vnitate augeo, atque sequenti operationi praefigo. Tertio singulis litteris A, B, C etc. sibi subscriptis, cuilibet adscribo numerum pontium ad eam regionem deducentium. Quarto eas litteras, quae pares adscriptos habent numeros signo asterisco. Quinto singulorum horum numerorum parium dimidia adiicio, imparium vero vnitate auctorum dimidia ipsis adscribo. Sexto hos numeros vltimo scriptos in vnam summam coniicio, quae summa, si vel vnitate minor fuerit vel aequalis numero supra praefixo, qui est numerus pontium vnitate auctus, tum concludo transitum desideratum perfici posse. Hoc vero est tenendum, si summa inuenta fuerit vnitate minor, quam numerus supra positus, tum initium ambulationis ex regione asteristico notata fieri debere, contra vero ex regione non signata si summa fuerit aequalis numero praescripto. Ita ergo pro casu Regiomontano operationem instituo, vt sequitur:

Nume-

Numerus pontium 7, habetur ergo 8

	Pontes	
A,	5	3
B,	3	2
C,	3	2
D,	3	2

Quia ergo plus prodiit quam 8, huiusmodi tranſitus nequaquam fieri poteſt.

Figura 3. §. 15. Sint duae inſulae A et B aqua circumdatae, quacum aqua communicent quatuor fluuii, quemadmodum figura repraeſentat. Traiecto porro ſint ſuper aquam inſulas circumdantem et fluuios quindecim pontes *a*, *b*, *c*, *d*, etc. et quaeritur, num quis curſum ita inſtituere queat, vt per omnes pontes transeat, per nullum autem plus quam ſemel. Deſigno ergo primum omnes regiones, quae aqua a ſe inuicem ſunt ſeparatae litteris A, B, C, D, E, F cuiusmodi ergo ſunt ſex regiones. Dein numerum pontium 15 vnitate augeo, et ſummam 16 ſequenti operationi praefigo.

		16
A*	– 8	4
B*	– 4	2
C*	– 4	2
D	— 3	2
E	— 5	3
F*	– 6	3
		16

Tertio

Tertio litteras A, B, C etc. sibi inuicem subscribo, et ad quamque numerum pontium, qui in eam regionem ducunt pono, vt ad A octo ducunt pontes, ad B quatuor etc. Quarto litteras, quae pares adiunctos habent numeros asterisco noto. Quinto in tertiam columnam vniscribo parium numerorum dimidia, impares vero vnitate augeo, et semisses appono. Sexto tertiae columnae numeros inuicem addo, et obtineo summam 16, quae cum aequalis sit numero supra posito 16, sequitur transitum desiderato modo fieri posse, si modo cursus vel ex regione D vel E incipiatur, quippe quae non sunt asterisco notatae. Cursus autem ita fieri poterit E*a*F*b*B*c*F*d*A*e*F*f*C*g*A*b*C*i*D*k*A*m*E*n*A*p*B*o*E*l*D vbi inter litteras maiusculas pontes simul collocaui, per quos fit transitus.

§. 16. Hac igitur ratione facile erit in casu quam maxime composito iudicare, vtrum transitus per omnes pontes semel tantum fieri queat, an non. Hoc tamen adhuc multo faciliorem tradam modum idem dignoscendi, qui ex hoc ipso modo non difficulter eruetur, postquam sequentes obseruationes in medium protulero. Primo autem obseruo omnes numeros pontium singulis litteris A, B, C adscriptos simul sumtos duplo maiores esse toto pontium numero. Huius rei ratio est, quod in hoc computo, quo pontes omnes in datam regionem ducentes numerantur, quilibet pons bis numeretur; refertur enim quisque pons ad vtramque regionem, quas iungit.

§. 17. Sequitur ergo ex hac obſeruatione ſummam omnium pontium, qui in ſingulas regiones conducunt, eſſe numerum parem, quia eius dimidium pontium numero aequatur. Fieri ergo non poteſt, vt inter numeros pontium in quamlibet regionem ducentium vnicus ſit impar; neque etiam vt tres ſint impares, neque quinque, etc. Quare ſi qui pontium numeri litteris A, B, C, etc. adſcripti ſunt impares, neceſſe eſt vt eorum numerus ſit par, ita in exemplo Regiomontano quatuor erant pontium numeri impares litteris regionum A, B, C, D adſcripti, vti ex §. 14. videre licet; atque in exemplo praecedente §. 15., duo tantum ſunt numeri impares, litteris D et E adſcripti.

§. 18. Cum ſumma omnium numerorum litteris A, B, C etc. adiunctorum aequet duplum pontium numerum, manifeſtum eſt illam ſummam binario auctam, et per 2 diuiſam dare numerum operationi praefixum. Si igitur omnes numeri litteris A, B, C, D etc. adſcripti fuerint pares, et eorum ſingulorum medietates capiantur ad numeros tertiae columnae obtinendos, erit horum numerorum ſumma vnitate minor, quam numerus praefixus. Quamobrem his caſibus ſemper tranſitus per omnes pontes fieri poteſt. In quacunque enim regione curſus incipiatur, ea habebit pontes numero pares ad ſe conducentes, vti requiritur. Sic in exemplo Regiomontano fieri poteſt, vt quis per omnes pontes bis transgrediatur, quilibet enim pons, quaſi in duos erit diuiſus, numerusque pontium in quamuis regionem ducentium erit par.

§. 19.

§. 19. Praeterea ſi duo tantum numeri litteris A, B, C etc. adſcripti fuerint impares, reliqui vero omnes pares, tum ſemper deſideratus tranſitus ſuccedet, ſi modo curſus ex regione ad quam pontium impar numerus tendit incipiatur. Si enim pares numeri biſecentur atque etiam impares vnitate aucti, vti praeceptum eſt, ſumma harum medietatum vnitate erit maior quam numerus pontium, ideoque aequalis ipſi numero praefixo. Ex hocque porro perſpicitur, ſi quatuor vel ſex vel octo etc. fuerint numeri impares in ſecunda columna, tum ſummam numerorum tertiae columnae maiorem fore numero praefixo, eumque excedere vel vnitate, vel binario vel ternario etc. et idcirco tranſitus fieri nequit.

§. 20. Caſu ergo quocunque propoſito ſtatim facillime poterit cognoſci, vtrum tranſitus per omnes pontes ſemel inſtitui queat an non, ope huius regulae. Si fuerint plures duabus regiones, ad quas ducentium pontium numerus eſt impar, tum certo affirmari poteſt, talem tranſitum non dari. Si autem ad duas tantum regiones ducentium pontium numerus eſt impar, tunc tranſitus fieri poterit, ſi modo curſus in altera harum regionum incipiatur. Si denique nulla omnino fuerit regio, ad quam pontes numero impares conducant, tum tranſitus deſiderato modo inſtitui poterit, in quacunque regione ambulandi initium ponatur. Hac igitur data regula problemati propoſito pleniſſime ſatisfit.

§. 21. Quando autem inuentum fuerit talem transitum institui posse, quaestio superest quomodo cursus sit dirigendus. Pro hoc sequenti vtor regula; tollantur cogitatione quoties fieri potest, bini pontes, qui ex vna regione in aliam ducunt, quo pacto pontium numerus vehementer plerumque diminuetur, tum quaeratur, quod facile fiet, cursus desideratus per pontes reliquos, quo inuento pontes cogitatione sublati hunc ipsum cursum non multum turbabunt, id quod paululum attendenti statim patebit; neque opus esse iudico plura ad cursus reipsa formandos praecipere.