1741

Solutio problematum rectivicationem ellipsis requirentium

Leonhard Euler

SOLVTIO PROBLEMATVM RECTIFICATIONEM ELLIPSIS REQVIRENTIVM.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula VI. AGitata iam ſuperiori ſeculo inter Geometras ſunt huiusmodi problemata, in quibus linea curua requirebatur, quae ab infinitis poſitione datis curuis arcus aequales abſcinderet. Communicauerunt etiam illo tempore Cl. Cl. Geometrae elegantes ſolutiones pro caſu, quo curuae poſitione datae inter ſe ſunt ſimiles, vti cum ab infinitis circulis, vel parabolis arcus aequales abſcindendi eſſent. Nemo autem, quantum conſtat, vlterius eſt progreſſus, neque quisquam pro curuis diſſimilibus problemati ſatisfecit, etiamſi iam tum quaeſtio de infinitis ellipſibus proponeretur. Atque etiamnum, cum Inſigni Geometrae per litteras ſignificaſſem, me aequationem pro curua, quae ab infinitis ellipſibus diſſimilibus arcus aequales abſcinderet, inueniſſe; ille mihi reſpondit huius problematis ſolutionem in ſua non eſſe poteſtate, meque ſimul rogauit, vt meam ſolutionem in non contemnendum analyſeos augmentum communicarem.

§. 2. Huius autem quaeſtionis ſumma difficultas in hoc conſiſtit, quod diuerſarum et diſſimilium ellipſium rectificationes a ſe mutuo non pendeant. Hanc enim ob

Fig. 1.

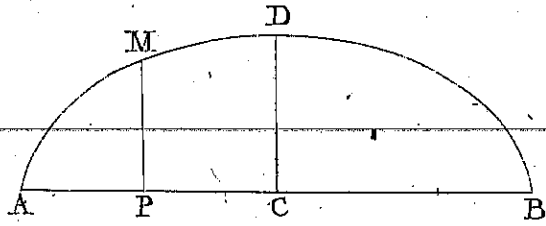


Fig. 2.

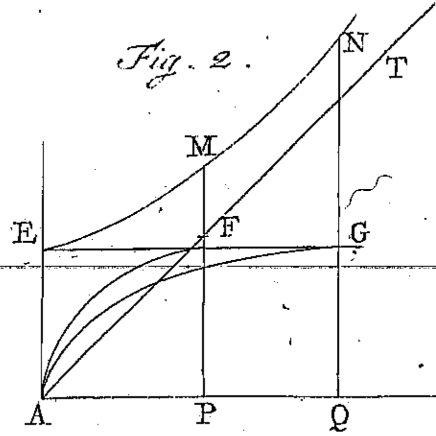


Fig. 3.

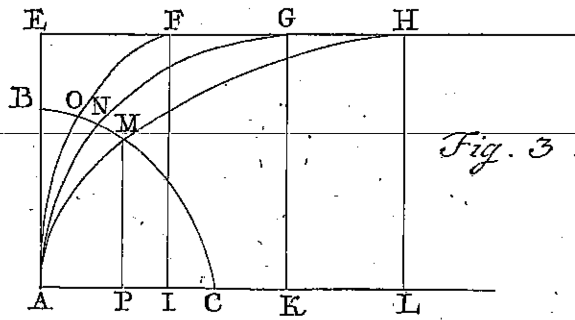
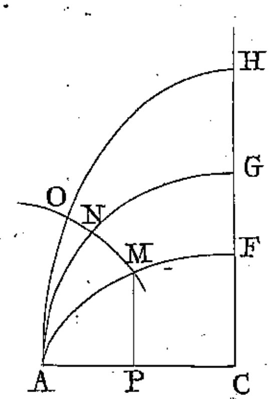


Fig. 4.



ob causam curuae ab infinitis ellipsibus arcus aequales abscindentis aequationem inuentu maxime difficilem esse oportet, eo quod etiam concessa vnius ellipsis rectificatione, reliquarum tamen omnium rectificatio ab ista non pendeat. Deinde methodus, qua in huiusmodi problematis vti solent, ita est comparata, vt tantum ad curuas similes accommodari possit; pro curuis dissimilibus autem nullam afferat vtilitatem.

§. 3. Quod autem mihi primum viam ad huiusmodi difficilia problemata patefecit, est praecipue vniuersalis mea series summandi methodus. Hac enim inuenta statim aequationem differentialem, in qua indeterminatae nullo pacto a se inuicem separari possunt, ope rectificationis ellipsium dissimilium construxi; atque paulo post maxime agitatae aequationis Riccatianae constructionem et resolutionem communicaui.

§. 4. Postmodum autem, cum haec per series operandi methodus nimis operosa et non satis genuina videretur; in aliam magis naturalem methodum, et huiusmodi quaestionibus magis accommodatam inquisiui; atque tandem ex voto obtinui, ita vt eius beneficio non solum priora problemata, quae serierum ope resolueram, sed etiam innumera alia, ad quae tractanda series non sufficiunt, perficere potuerim. Methodum etiam hanc fuse exposui in dissertatione de infinitis curuis eiusdem generis anno praecedente proposita; quia vero ne nimis essem prolixus, nulla adieci exempla, non satis apparet, quam late ea pateat, quamque amplum in re analytica aperiat campum.

§. 5.

§. 5. Quo igitur huius methodi vis et vtilitas melius percipiatur, hac dissertatione eam ad infinitas ellipses accommodabo, atque non solum monstrabo, quomodo ab infinitis ellipsibus arcus aequales abscindi debeant, sed etiam innumerabilium tam primi quam secundi gradus aequationum differentialium resolutionem ope rectificationis ellipsium perficere docebo.

§. 6. Quod enim ad curuam, quae ab infinitis ellipsibus arcus aequales abscindat, attinet, eius constructio eo ipso est facilis, quod ope rectificationis curuarum quae facillime describi possunt, perfici queat. Atque hanc ipsam constructionem longe anteferendam esse censeo aliis per quadraturas curuarum peractis constructionibus. Non igitur tam illius curuae constructio requiritur, quam eius aequatio, quo quales aequationes tam facile construi queant cognoscatur. Hanc ob rem analysis non parum augmenti accipiet, si illae aequationes proferantur, quae ope rectificationis ellipsium constructionem admittunt.

Figura 1. §. 7. Considero igitur primum infinitas ellipses AMDB, quae omnes alterum axem, cuius semissis est CD, habeant eundem, axes vero transuersos AB diuersos. Si nunc vel ab his omnibus ellipsibus vel arcus aequales sint abscindendi, vel in data ratione inaequales, vel curua sit inuenienda, cuius constructio ope harum ellipsium quomodocunque praescribitur; ad talia problemata omnia soluenda opus est, vt aequatio habeatur inter arcum AM, abscissam AP et axem AB, in qua hae tres quantitates insint tanquam variabiles.

§. 8.

§. 8. Huiusmodi ergo problematum solutio perficietur, si quaeratur aequatio modularis, quemadmodum in citata dissertatione de curuis infinitis eiusdem generis docui, inter arcum AM, et abscissam AP et axem AB quoque variabilem. Quo igitur ad huiusmodi aequationem modularem perueniam pono abscissam AP $= t$; applicatam PM $= u$; arcum AM $= z$; semiaxem variabilem AC $= a$; semiaxem constantem CD $= c$. His vero positis erit $u = \frac{c}{a}\sqrt{(2at - tt)}$ seu posito $t = ax$ erit $u = c\sqrt{(2x - xx)}$; atque $dt = adx$ et $du = \frac{cdx - cxdx}{\sqrt{(2x - xx)}}$. Ex his igitur fiet $dz = \frac{dx\sqrt{(2a^2x - a^2x^2 + c^2 - 2c^2x + c^2x^2)}}{\sqrt{(2x - xx)}}$, positoque $a^2 - c^2 = b^2$ erit $z = \int\frac{dx\sqrt{[c^2 + b^2(2x - xx)]}}{\sqrt{(2x - xx)}}$.

§. 9. Integrali huic inuento aequatur ergo z, si integratio fiat posito tantum x variabili, b vero et c constantibus. Praeterea in integratione talis addi debet constans, vt euanescat z posito $x = 0$. At quia aequatio desideratur in qua a seu eius loco b aeque tanquam variabilis insit ac x et z; quaeritur aequatio differentialis quae proditura esset, si $\int\frac{dx\sqrt{[c^2 + b^2(2x - xx)]}}{\sqrt{(2x - xx)}}$ denuo differentietur, posito praeter x etiam b variabili.

§. 10. Ponatur nunc secundum methodum anno praeterito traditam x constans et differentietur quantitas $\frac{\sqrt{[cc + bb(2x - xx)]}}{\sqrt{(2x - xx)}}$ prodibit $\frac{bdb\sqrt{(2x - xx)}}{\sqrt{[cc + bb(2x - xx)]}}$. Quamobrem posito quoque b variabili erit $dz = \frac{dx\sqrt{[cc + bb(2x - xx)]}}{\sqrt{(2x - xx)}} + db\int\frac{bdx\sqrt{(2x - xx)}}{\sqrt{[cc + bb(2x - xx)]}}$, quod postremum integrale ita debet accipi vt euanescat posito $x = 0$; in eo vero iterum b tanquam conſtans ineſt. Ponatur breuitatis gratia $R = \frac{dz}{db} - \frac{dx\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}{db\sqrt{(2x-xx)}}$, erit $R = \int \frac{bdx\sqrt{(2x-xx)}}{\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$.

§. 11. Si nunc integrale, cui R aequatur reduci poſſet ad integrationem formulae, cui z aequalis eſt, pro R inueniri poſſet valor finitus per z; qui ſubſtitutus in altera aequatione daret aequationem modularem quaeſitam. Sed hae duae integrationes a ſe inuicem non pendent, vt facile tentanti animaduertetur. Quamobrem vlterius progredi oportet, et vltimam aequationem denuo differentiare, vti primam, ponendo quoque b variabilem. Inuenietur autem hoc modo $dR = \frac{bdx\sqrt{(2x-xx)}}{\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}} + db\int \frac{ccdx\sqrt{(2x-xx)}}{[cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}}$, quod integrale iterum ita accipi debet vt euaneſcat poſito $x = 0$.

§. 12. Ponatur iterum $S = \frac{dR}{db} - \frac{bdx\sqrt{(2x-xx)}}{db\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$, erit $S = \int \frac{ccdx\sqrt{(2x-xx)}}{[cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}}$; quae formula cum non ſit integrabilis, videndum eſt, num eius integratio ab alterutra praecedentium vel ab vtraque pendeat. Quod quo appareat ponatur $S + \alpha R + \beta z = Q$, vbi α et β ab x et z ſint quantitates liberae; Q vero vtcunque ex x et b et conſtantibus compoſita; debet autem Q talis eſſe quantitas vt euaneſcat poſito $x = 0$. Poſito ergo b conſtante debebit eſſe $dQ = dS + \alpha dR + \beta dz$; vbi in differentiali ipſius Q b tanquam conſtans conſiderari debet.

§. 13. At poſito b conſtante eſt $dS = \frac{ccdx\sqrt{(2x-xx)}}{[cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}}$

et

et $dR = \frac{b\,dx\sqrt{(2x-xx)}}{\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$ et $dz = \frac{dx\sqrt{[cc+bb(2x\ xx)]}}{\sqrt{(2x-xx)}}$. Hanc ob rem erit $\frac{dQ}{dx} = [cc(2x-xx) + \alpha bcc(2x-xx) + \alpha b^3(2x-xx)^2 + \beta c^4 + 2\beta b^2c^2(2x-xx) + \beta b^4 (2x-xx)^2] : [cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}\sqrt{(2x-xx)}$. Ponatur ad fimilem formam obtinendam $Q = \frac{(\gamma x+\delta)\sqrt{(2x-xx)}}{\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$ qui valor per fe euanefcit pofito $x=0$.

§. 14. Differentietur nunc Q pofito tantum x variabili erit $\frac{dQ}{dx} = [\gamma cc(2x-xx) + \gamma bb(2x-xx)^2 + \gamma ccx + \delta cc - \gamma ccx^2 - \delta ccx) : (cc+bb(cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}\sqrt{(2x-xx)}$. Quia ergo denominatores iam funt inter fe aequales, fiant numeratores quoque aequales, aequandis terminis in quibus ipfius x fimiles funt dimenfiones; erit

I. $\gamma bb = \alpha b^3 + \beta b^4$;
II. $\gamma b^2 = \alpha b^3 + \beta b^4$;
III. $4\gamma bb - 2\gamma cc = 4\alpha b^3 + 4\beta b^4 - cc - \alpha bcc - 2\beta b^2c^2$;
IV. $3\gamma cc - \delta cc = 2cc + 2\alpha bcc + 4\beta b^2c^2$; et
V. $\delta cc = \beta c^4$.

Hinc inuenitur $\alpha = \frac{1}{b}$; $\beta = \frac{-1}{b^2+c^2}$; $\gamma = \frac{cc}{bb+cc}$ et $\delta = \frac{cc}{bb+cc}$.

§. 15. His ergo valoribus fubftitutis prodibit $\frac{cc(x-1)\sqrt{(2x-xx)}}{(bb+cc)\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}} = S + \frac{R}{b} - \frac{z}{b^2+c^2}$. Quia autem eft $R = \frac{dz}{db} - \frac{dx\sqrt{[cc+bb(2x+xx)]}}{db\sqrt{(2x-xx)}}$ et $S = \frac{dR}{db} - \frac{bdx\sqrt{(2x-xx)}}{db\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$

M 2 atque

atque $x = \frac{t}{a}$ et $bb = a^2 - c^2$; atque ideo $bb + cc = a^2$; $dx = \frac{adt - tda}{a^2}$, et $db = \frac{ada}{b}$, erit $Q = \frac{cc(t-a)\sqrt{(2at-tt)}}{a^3\sqrt{[a^2c^2 + (a^2-c^2)(2at-tt)]}}$, et $\frac{R}{b} = \frac{dz}{ada} - \frac{(adt + tda)\sqrt{[a^2 - c^2 + (a^2-c^2)(2at-tt)]}}{a^2 da \sqrt{(2at-tt)}}$ atque $S = \frac{c^2 dz}{a^2 da}$

$$+ \frac{(a^2-c^2)}{a^2 da} d.\frac{dz}{da} - \frac{(a^2-c^2)}{a^3 da} d.\frac{dt}{da}\sqrt{\frac{a^2c^2 + (a^3 - cc)(2at-tt)}{2at-tt}} + \frac{(2a^2 - 3c^2)(adt - tda)}{a^5 da}$$

$$\sqrt{\frac{a^2c^2 + (a^2-cc)(2at-tt)}{2at-tt}} - \frac{(2aa - 2cc)(adt - tda)}{a^3 da}\sqrt{\frac{2at-tt}{a^2c^2 + (a^2-cc)(2at-tt)}}$$

$$+ \frac{cc(a-t)(a^2-c^2)(adt-tda)^2}{a^3 da^2 (2at-tt)^{\frac{3}{2}}\sqrt{[a^2c^2 + (a^2-cc)(2at-tt)]}}.$$

§. 16. Ne autem in nimis prolixos calculos incidamus, retineamus literas b, x, et z, erit $S = \frac{1}{db} d.\frac{dz}{db} - \frac{1}{db} d.\frac{dx}{db}\sqrt{\frac{(cc + bb(2x-xx))}{2x-xx}} - \frac{2bdx}{db}\sqrt{\frac{cx - xx}{cc + bb(2x-xx)}} + \frac{ccdx^2(1-x)}{db^2(2x-xx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{[cc + bb(2x-xx)]}}$. His ergo loco S et R substitutis habebitur aequatio modularis ista, $\frac{z}{bb+cc} =$

$$\frac{cc(1-x)\sqrt{(2x-xx)}}{(bb+cc)\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}} - \frac{dx}{bdb}\sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}} - \frac{2bdx}{db}\sqrt{\frac{2x-xx}{cc+bb(2x-xx)}}$$

$$+ \frac{ccdx^2(1-x)}{db^2(2x-xx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}} + \frac{dz}{bdb} + \frac{1}{db}d.\frac{dz}{db}$$

$$- \frac{1}{db}d.\frac{dx}{db}\sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}}.$$

Atque haec est aequatio differentialis secundi gradus, in qua z, x et b aeque variabiles sunt positae. Ex hac autem aequatione sequentia problemata soluuntur.

Problema I.

Figura 2. §. 17. *Si curua* EMN *ad axem* APQ *ita construatur, vt eius applicata quaeque* PM *aequalis sit quadranti* AF *ellipsis, cuius semiaxium coniugatorum alter sit ipsa*

ipsa abscissa AP *alter vero constans* AE *seu* PF: *inuenire aequationem inter abscissam* AP *et applicatam* PM *naturam huius curuae exprimentem.*

Solutio.

Perspicuum est curuam EMN transire per punctum E, quoniam euanescente semiaxe ellipsis AP, quadrans ellipsis abit in alterum semiaxem constantem AE. Recta porro AT ad angulum semirectum cum AP inclinata erit asymtotos curuae EMN, quia posito semiaxe AP infinite magno quadrans ellipticus huic ipsi semiaxi fit aequalis. Ad aequationem autem inueniendam sit $AE = c$; $AP = t$ et $PM = AF = z$; atque cum abscissa AP respectu ellipsis AF sit aequalis semiaxi eius, erit haec quaestio casus specialis aequationis inuentae, quo est $t = a$, seu $x = 1$. Posito ergo $x = 1$, abibit superior aequatio in hanc: $\frac{z}{bb+cc} = \frac{dz}{bdb} + \frac{1}{db} d. \frac{dx}{db}$. At quia est $bb = a^2 - c^2 = t^2 - c^2$ erit $bdb = tdt$, et $db = \frac{tdt}{\sqrt{(tt-c^2)}}$. Atque posito dt constante erit $ddb = -\frac{cc\,dt^2}{(tt-cc)^{\frac{3}{2}}}$. Hinc ergo fit $d. \frac{dz}{db} = \frac{ddz\sqrt{(tt-cc)}}{tdt} + \frac{ccdz}{tt\sqrt{(tt-cc)}}$, vnde oritur haec aequatio $\frac{z}{tt} = \frac{dz}{tdt} + \frac{ddz(tt-cc)}{ttdt^2} + \frac{ccdz}{t^3dt}$, seu $tzdt^2 = (tt+cc)dtdz + tddz(tt-cc)$, quae est aequatio quaesita pro curua proposita. Q. E. I.

§. 18. Aequationem hanc sequenti modo ad differentialia primi gradus reduco ponendo $z = e^{\int s dt}$ existente $l e = 1$; erit ergo $dz = e^{\int s dt}\, s dt$ et $ddz = e^{\int s dt}(ds dt + ss dt^2)$. Quibus valoribus substituendis oritur sequens aequatio $t dt = (t^2 + c^2) s dt + t(tt - cc) ds + t s^2 (t^2 - c^2) dt$; quae ita est comparata, vt nullis adhuc cognitis artificiis indeterminatae a se inuicem separari possint. Interim vero constructio huius aequationis ope rectificationis ellipsis constat.

§. 19. Ne vero cuiquam dubium oriatur quod posito $t = 0$ fieri debeat $z = c$; cum tamen superiores integrationes ita accipi debeant, vt posito $x = 0$ fiat quoque $z = 0$. Monendum est quod quidem in hoc casu quo $z = c$ sit $t = 0$, non vero est quoque $x = 0$; quia est $x = \frac{t}{a}$ et $t = a$, ideoque $x = 1$, ita vt in hoc casu nusquam sit $x = 0$, propterea z vspiam euanescere debeat.

§. 20. Quemadmodum in hoc problemate posuimus $t = a$; ita quoque quaecunque aequatio inter t et a et constantes potest accipi, et curua EMN definiri ita vt quaeuis applicata PM aequalis sit respondenti arcui elliptico AF. Habebitur enim loco superioris aequationis haec aequatio $\frac{z}{tt} = \frac{(tt + cc) dz}{t^3 dt} + \frac{(t - tcc) ddz}{tt dt^2} + T$, denotante T eam ipsius t functionem, quae ex terminis aequationis generalis, in quibus non inest z oritur, si loco x ponatur $\frac{t}{a}$ et loco b eius valor $\sqrt{(a^2 - c^2)}$ atque loco a eius valor in t ex aequatione inter a et t assumta substituatur. Neque vero haec aequatio tractatu est difficilior

ficilior

ficilior quam praecedens, in qua terminus T deeſt; reduci enim poteſt haec aequatio ad illam, vti iam alibi oſtendi.

Problema 2.

§. 21. *Datis infinitis ellipſibus* AOF, ANG, AMH, *quarum alter ſemiaxis* AE *ſit conſtans, alter vero variabilis vt* AI, AK, et AL; *inuenire aequationem pro curua* BONMC, *quae ab his omnibus ellipſibus arcus aequales* AO, AN, AM *abſcindat.* Figura 3.

Solutio.

Ducta ad axem AC quacunque applicata MP curuae quaeſitae; ſit $AP = t$, $PM = u$ et $AE = c$; Ellipſis vero AMH ſemiaxis variabilis AI ſit $= a$; et arcus abſciſſus AM qui eſt conſtantis quantitatis ſit $= f$. Poſitis nunc $x = \frac{t}{a}$; et $b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$ erit $z = f$; et $u = c\sqrt{(2x - xx)}$. His igitur ſubſtitutis generalis aequatio inter z, x et b abit in hanc $\frac{f}{bb+cc} = \frac{cc(1-x)\sqrt{(2x-xx)}}{(bb+cc)\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$

$$- \frac{dx}{bdb}\sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}} - \frac{zbdx}{db}\sqrt{\frac{2x-xx}{cc+b(2x-xx)}}$$

$$+ \frac{ccdx^2(1-x)}{db^2(2x-xx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}} - \frac{1}{db}\,\mathrm{d}.\frac{dx}{db}$$

$\sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}}$. Quia vero eſt $2x - xx = \frac{u^2}{c^2}$ multiplicetur vbique per $\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]} = \frac{\sqrt{(c^4+bbuu)}}{c}$ et prodibit $\frac{f\sqrt{(c^4+bbuu)}}{a^2c} = \frac{cu(1-x)}{a^2} - \frac{c^3dx}{budb} - \frac{3budx}{cdb} + \frac{c^5dx^2(1-x)}{u^3db^2} - \frac{(c^4+bbuu)}{cudb}\,\mathrm{d}.\frac{dx}{db}$. In hac aequatione ſi loco b ſubſtifubftituatur $\frac{\sqrt{(tt-ccxx)}}{x}$ et propter $x = \frac{c-\sqrt{(cc-uu)}}{c}$ prodibit tandem aequatio differentialis fecundi gradus inter t et u, nempe coordinatas curuae quaefitae. Q. E. I.

Figura 4. §. 22. At fi infinitae ellipfes AMF, ANG et AOH omnes habeant axem horizontalem communem ita vt C fit centrum omnium, pro hoc cafu peculiarem aequationem modularem erui oportet, antequam curuam MNO definire licet, quae ab omnibus arcus aequales AM, AN, AO abfcindat. Sit igitur $AC = c$, $CF = a$, AP $= t$, $PM = u$ et arcus $AM = z$. His pofitis erit $u = \frac{a}{c} \sqrt{(2ct-tt)}$ et $du = \frac{acdt - atdt}{c\sqrt{(2ct-tt)}}$ ideoque fiet $z = \int \frac{dt}{c} \sqrt{\frac{a^2c^2 + (cc-aa)(cct-tt)}{2ct-tt}} = \int \frac{du}{a} \sqrt{\frac{aa-uu}{a^4 - a^2u^2 + ccuu}}$, atque pofito $u = ay$ erit $z = \int dy \sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1-yy})}$, quod integrale ita debet accipi vt z euanefcat pofito $y = 0$.

§. 23. Si haec denuo differentietur pofito praeter y et a variabili habebitur $dz = dy\sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1-yy})} + da$

$$\int \frac{a\,dy}{\sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1-yy})}}$$ atque pofito $\frac{dz}{da} - \frac{dy}{da}\sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1-yy})} = R$

erit $R = \int \frac{a\,dy}{\sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1-yy})}}$. Hinc eodem modo fiet

$$dR = \frac{a\,dy}{\sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1-yy})}} + da \int \frac{ccyy\,dy}{(1-yy)(a^2 + \frac{ccyy}{1-yy})^{\frac{3}{2}}}$$ feu

$$\frac{dR}{da} - \frac{a\,dy}{\sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1-yy})}} = \int \frac{ccyy\,dy}{(1-yy)(aa + \frac{ccyy}{1-yy})^{\frac{3}{2}}} = S$$ breuitatis gratia. Ponatur nunc $S + \alpha R + \beta z = Q$; vbi α et β funt quantitates ab y liberae; Q vero functio ipfarum

ipsarum a et y quae euanescat posito $y = 0$. Nunc ad α et β et Q inuenienda differentietur haec aequatio posito a constante, erit

$$\frac{ccyydy\sqrt{(1-yy)}}{[aa(1-yy)+ccyy]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha a dy\sqrt{(1-yy)}}{\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}} + \frac{\beta dy\sqrt{[a^2(1-yy)+ccyy]}}{\sqrt{(1-yy)}}$$

$$= (ccyy - ccy^4 + \alpha a^3 - 2\alpha a^3 y^2 + \alpha a^3 y^4 + \alpha a c c yy - \alpha a c c y^4 + \beta a^4 - 2\beta a^4 y^2 + \beta a^4 y^4 + \beta a^2 c^2 y^2 - 2\beta a^2 c^2 y^4 + \beta c^4 y^4)$$

$$dy : (a^2(1-yy)+ccyy)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1-yy)} = dQ.$$

§. 24. Sit $Q = \frac{\gamma y\sqrt{(1-yy)}}{\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}}$; sumtoque huius differentiali posito a constante, et aequatis terminis homologis erit $\alpha a + \beta a^2 = \gamma$; $\beta cc = -\gamma$; et $1 + \alpha a + 2\beta a^2 = 0$. Ex his fit $\alpha = \frac{a^2+c^2}{a(a^2-cc)}$; $\beta = \frac{-1}{a^2-c^2}$ et $\gamma = \frac{cc}{aa-cc}$. Hisque valoribus substitutis peruenietur tandem ad hanc aequationem modularem:

$$\frac{z}{aa-cc} = \frac{(a^2+c^2)dz}{ada(a^2-c^2)} + \frac{1}{da}\mathrm{d}.\frac{dz}{da} - \frac{ccyy\sqrt{(1-yy)}}{(a^2-c^2)\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}} - \frac{(a^2+c^2)dy\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}}{a(a^2-c^2)\,da\sqrt{(1-yy)}}$$

$$- \frac{2ady\sqrt{(1-yy)}}{da\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}} - \frac{ccydy^2}{da^2(1-yy)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}}$$

$$- \frac{1}{da}\mathrm{d}.\frac{dy}{da}\sqrt{\frac{a^2(1-yy)+ccyy}{1-yy}},$$

in qua a aeque sumtum est variabile ac y et z, estque $y = \frac{u}{a}$.

§. 25. Si nunc ex infinitis ellipsibus, quarum omnium alter axis est constans $2c$; alter variabilis $2a$; construatur curua EMN hac lege vt cuicunque abscissae AP $= a$ respondeat applicata PM, quae aequalis est quadranti elliptico sub semiaxibus a et c. Hoc ergo casu erit $u = a$ et $y = 1$, atque PM $= z$. Quare posito da constanti ha- Figura 2.

habebitur pro curua EMN haec aequatio: $azda^2 = (a^2 + c^2)dadz + a(aa - cc)ddz$. Quae aequatio est ea ipsa quam in solutione problematis I. (§. 17.) inuenimus; congruit enim hic casus cum illo problemate: atque quod ibi erat t hic est a.

Problema 3.

Figura 4. §. 26. *Descriptis infinitis ellipsibus* AMF, ANG, AOH *commune centrum* C *communemque verticem* A *habentibus; inuenire curuam* MNO *quae ab his omnibus ellipsibus arcus aequales* AM, AN, AO *abscindat.*

Solutio.

Posito omnium harum ellipsium semiaxe constante $AC = c$; ellipsisque cuiusuis AMF semiaxe altero variabili $CF = a$; atque curuae MNO abscissa $AP = t$; et applicata $PM = u$. Fiat $\frac{u}{a} = y$; sitque longitudo $= f$ cui omnes arcus AM, AN, aequales sumantur. His positis et cum antecedentibus collatis erit $z = f$; ideoque

$$\frac{f}{a^2 - c^2} + \frac{ccyy\sqrt{(1-yy)}}{(a^2-c^2)\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}} + \frac{(a^2+c^2)dy\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}}{a(a^2-c^2)da\sqrt{(1-yy)}} +$$
$$\frac{2ady\sqrt{(1-yy)}}{da\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}} + \frac{ccydy^2}{da^2(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}}$$
$$+ \frac{1}{da}d.\frac{dy}{da}\sqrt{\frac{a^2(1-yy)+ccyy}{1-yy}} = 0$$ seu $$\frac{f\sqrt{(1-yy)}}{(a^2-c^2)\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}}$$
$$+ \frac{ccyy(1-yy}{(a^2-c^2)(a^2(1-yy)+ccyy)} + \frac{(a^2+c^2)dy}{a(a^2-c^2)da} + \frac{2ady(1-yy)}{da(a^2(1-yy)-ccyy}$$
$$\frac{ccdy^2}{da^2(1-yy)(a^2(1-yy)+ccyy)} + \frac{1}{da}d.\frac{dy}{da} = 0.$$ In qua aequatione si loco a ponatur $\frac{u}{y}$ et deinde loco y hic valor $\frac{\sqrt{(2ct-tt)}}{c}$; prodibit aequatio inter coordinatas t et u curuae quaesitae. Q. E. I.

DE