



1741

# Investigatio binarum curvarum, quarum arcus eidem abscissae respondententes summam algebraicam constituent

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

## Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Investigatio binarum curvarum, quarum arcus eidem abscissae respondententes summam algebraicam constituent" (1741). *Euler Archive - All Works*. 48.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/48>

RIEY



INVESTIGATIO  
 BINARVM CURVARVM,  
 QUARVM  
 ARCVS EIDEM ABSCISSAE  
 RESPONDENTES  
 SVMMAM ALGEBRAICAM  
 CONSTITVANT.

AUCTORE  
*Leonb. Eulero.*

§. I.

**P**roblema, cuius solutionem hac differtatione exponere constitui, sequentes continet condiciones. Requiritur in eo I. duae curvae algebraicae, quarum II. neutra fit rectificabilis, quae tamen ita debent esse comparatae, vt duo arcus III. eidem abscissae respondententes IV. summam constituent algebraicam. Harum quatuor conditionum quacunque omiffa problema fit soluta admodum facile, omnibus autem satisfacere maxime videtur difficile. Prima quidem conditione omiffa, si admittantur curvae transcendentes, reliquis conditionibus facile satisfiet. Si secunda omittatur, quaelibet duae curvae algebraicae et rectificabiles problemati satisficient. Tertia quidem neglecta difficilior est solutio, sed tamen ex iis quae Celeb. Viri *Herimanus* et *Bernoullius* de reductione quadraturatum ad rectificationes

cur-

n, qua  
 $\frac{1}{p}$  - etc.  
 ralis est  
 $\frac{1}{x}$ . Ad  
 tiendam  
 $\frac{x-1}{x-2}$ ; et  
 etc. Ex  
 ma  $S =$   
 $(-1)^2) +$   
 $\frac{x}{(4x-3)^2}$   
 o series  
 uergit,  
 Con-  
 circuli

NVE-

curvarum algebraicarum dederunt, solutio facile deducitur. Quarta autem conditio, si omittatur, ne quidem problema erit, cum omnes curvae algebraicae non rectificabiles reliquis conditionibus satisfiant.

§. 2. Ad generalem huius problematis solutionem utrorumque formulis, quas citati Viri Celeb. dederunt pro curvis vel rectificabilibus, vel quarum rectificatio a data quadratura pendet. His enim formulis effici potest, ut curvae sint algebraicae, ut sint non rectificabiles, atque ut arcuum summa sit rectificabilis. Monstrabo vero etiam, quomodo abscissae aequales reddi possint. Quo facto omnibus conditionibus erit satisfactum, atque problema generaliter solutum. Tam late enim istae formulae patent, ut, nisi praeter necessitatem restrictio adhibeatur, omnes omnino curvas problemati satisfaciendas exhibere debeant.

§. 3. Designatis igitur curvis quaesitis per litteras A et B, erit ex illis formulis

in Curva A		in Curva B	
abscissa	$\frac{(dP^2 - dQ^2)^{\frac{3}{2}}}{dQddP - dPddQ}$	abscissa	$\frac{(dp^2 - dq^2)^{\frac{3}{2}}}{dqddp - dpddq}$
applicata P	$Q + \frac{dQ(dP^2 - dQ^2)}{dQddP - dPddQ}$	applicata p	$q + \frac{dq(dp^2 - dq^2)}{dqddp - dpddq}$
arcus	$Q + \frac{dP(dP^2 - dQ^2)}{dQddP - dPddQ}$	arcus	$q + \frac{dp(dp^2 - dq^2)}{dqddp - dpddq}$

His formulis iam obtinetur, quod alias maximam pareret difficultatem, ut ambae curvae sint algebraicae, si modo

si modo P ponatur quantitas algebraica. Deinde rectificabiles non erunt, si Q et q quantitates transcendentes inuoluunt. Tertio arcuum summa erit rectificabilis si Q+q fuerit quantitas algebraica, etiamsi Q et q seorsum tales non sint. Cum autem his conditionibus fuerit satisfactum, abscissae inter se aequales sunt efficiendae.

§. 4. Efficiamus primo abscissas inter se aequales

eritque  $\frac{(dP^2 - dQ^2)^{\frac{3}{2}}}{dQ d d P - d P d d Q} = \frac{(dp^2 - dq^2)^{\frac{3}{2}}}{dq d d p - dp d d q}$ . Fiat ad

hoc praestandum  $dQ = R dP$  et  $dq = r dp$ . Quo po-

sito habebitur  $\frac{(1-R^2)^{\frac{3}{2}} dP}{-dR} = \frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}} dp}{-dr}$ , hincque  $dP =$

$\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}} dR dp}{(1-R^2)^{\frac{3}{2}} dr}$ ; quod differentiale, quia P debet esse

quantitas algebraica, est integrabile reddendum. Sunt autem R et r quantitates algebraicae, ob curuas A et

B algebraicas, quare et  $\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}} dR}{(1-R^2)^{\frac{3}{2}} dr}$  erit quantitas al-

gebraica. Posito igitur breuitatis gratia  $\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}} dR}{(1-R^2)^{\frac{3}{2}} dr}$

$= T$ , erit  $dP = T dp$ , seu  $P = T p - \int p dT$ . Quo ergo P fit quantitas algebraica, facio  $\int p dT = N$ , eritque  $p =$

$\frac{dN}{dT}$  et  $P = \frac{T dN}{dT} - N$ .

Tom. VIII.

D

§. 5.

§. 5. Hac igitur ratione iam affecti sumus valores algebraicos pro  $P$  et  $p$ , quibus substitutis vtriusque curvae abscissae fiunt aequales. Praeterea curvae ipsae erunt algebraicae, si modo  $R$ ,  $r$  et  $N$  fuerint tales. Sed quo arcuum summa fiat quoque algebraica,  $Q$  et  $q$  ita determinari debent, ut  $Q + q$  sit quantitas algebraica. Est vero  $Q + q = \int R dP + \int r dp = RP + rp - \int P dR - \int p dr$ . Ponatur igitur  $\int P dR + \int p dr = M$ , eritque  $P = \frac{dM - p dr}{dR}$ . Atque  $Q + q = RP + rp - M$ .

§. 6. Cum autem iam supra inuentum sit  $p = \frac{dN}{dT}$  et  $P = \frac{T dN}{dT} - N$ , substituantur hi valores in aequatione  $P dR + p dr = dM$ . Quo facto prodibit  $\frac{T dN dR}{dT} - N dR + \frac{dN dr}{dT} = dM$ . Quia vero  $M$  est quantitas algebraica, oportet ut hic ipsius  $dM$  valor possit integrari. Integratione autem instituta prodit  $M = \frac{T N dR}{dT} + \frac{N dr}{dT} - \int N (dR + d \cdot \frac{T dR}{dT} + d \cdot \frac{dr}{dT})$ . Sit itaque hoc integrale  $= u$ , ideoque debet esse  $N = \frac{du}{dR + d \cdot \frac{T dR}{dT} + d \cdot \frac{dr}{dT}}$ ; vbi pro  $R$ ,  $r$  et  $u$  quantitates quaecunque algebraicae accipi poterunt.

§. 7. Sumtis igitur pro  $R$ ,  $r$  et  $u$  functionibus quibuscunque indeterminatae  $z$ , dabitur quoque  $T$  in  $z$

cum sit  $T = \frac{(1 - r^2)^{\frac{3}{2}} dR}{(1 - R^2)^{\frac{3}{2}} dr}$ . Atque ex postrema aequatione reperietur quoque  $N$  in  $z$ . Inuenta autem  $N$

habebitur  $M = \frac{T N dr}{dT} + \frac{N dR}{dT} - u$ . Similique modo dabitur

buntur  $P$  et  $p$  per  $z$  ex aequationibus  $P = \frac{TdN}{dT} - N$  et  $p = \frac{dN}{dT}$ . Denique habebitur  $Q + q = RP + rp - M$ .

§. 8. His igitur determinationibus consecuti sumus primo; vt curuarum  $A$  et  $B$  abscissae sint aequales, secundo vt vtraque curua sit algebraica, et tertio vt arcuum summa sit rectificabilis. Quare videamus, an quoque conditioni reliquae, qua vtraque curua per se debet esse irreductibilis, sit satisfactum. Hoc quidem iam factum esse videtur, cum nusquam neque  $Q$  neque  $q$  seorsim integrabiles fecerimus. Attamen ne forte algebraici valores pro  $Q$  et  $q$  proueniant, cauendum tantum est ne  $\frac{drdN}{dT}$  fiat integrabile. Nam cum sit  $dq = rdp$  erit  $q = rp - \int pdr = rp - \int \frac{drdN}{dT}$ . Atque  $Q = RP - M + \int \frac{drdN}{dT}$ .

§. 9. Quo autem appareat, quomodo euitari possit integrabilitas ipsius  $\frac{drdN}{dT}$ , problema etiam quinta adiecta conditione soluam, qua postuletur vt curua vtraque non solum sit irreductibilis, sed etiam vt vtriusque rectificatio a data pendeat quadratura, puta a  $\int Z dz$ . Ad hoc igitur efficiendum debet  $\int \frac{drdN}{dT}$  ad  $\int Z dz$  reduci. Est vero  $\int \frac{drdN}{dT} = \frac{Ndr}{dT} - \int Nd \frac{dr}{dT} = \frac{Ndr}{dT} - \int \frac{du d \frac{dr}{dT}}{dR + d \frac{TdR}{dT} + d \frac{dr}{dT}}$  posito loco  $N$  eius valore §. 6. inuento.

§. 10. Ponatur breuitatis gratia  $\frac{d \frac{dr}{dT}}{dR + d \frac{TdR}{dT} + d \frac{dr}{dT}} = S$ , quae ergo quantitas ex solis  $r$  et  $R$  est composita.

posita. Quare erit  $\int \frac{dr dN}{dT} = \frac{N dr}{dT} - \int S du = \frac{N dr}{dT} - Su + \int u dS$ . Fiat igitur  $\int u dS = \int Z dz$ , vnde reperitur  $u = \frac{Z dz}{ds}$ . Hoc igitur pro  $u$  valore accepto, vtriusque curvae inuentae rectificatio a quadratura  $\int Z dz$  pendeat. Erit enim  $\int \frac{dr dN}{dT} = \frac{N dr}{dT} - \frac{SZ dz}{ds} + \int Z dz$ . Deinde cum eadem quadratura infinitis modis possit exhiberi, non solum per arbitrarios ipsarum  $R$  et  $r$  valores varietas infinita obtinetur, sed etiam per innumeros ipsius  $u$  valores; quibus tamen omnibus efficitur, vt curvarum inuentarum omnium rectificatio a quadratura proposita  $\int Z dz$  pendeat.

§. 11. Hac igitur ratione innumerabilibus modis solui problema non solum, vt initio proposueram, sed adiecta insuper conditione pendentiae rectificationis curvarum inueniendarum a data quadratura. Problema igitur hactenus solutum ita est proponendum. Duas inuenire curuas algebraicas, quarum vtriusque rectificatio a data pendeat quadratura, duorum autem arcuum eidem abscissae respondentium summa sit rectificabilis.

§. 12. Ipsae autem curvae quaesitae determinabuntur ex assumtis pro literis  $R$  et  $r$  valoribus algebraicis atque ex  $u$  propositam quadraturam introducente. Ex his enim reperiuntur  $P$  et  $p$ , quibus inuentis erit curvae  $A$  abscissa

$$= \frac{(1-R^2)^{\frac{3}{2}} dP}{-dR} \text{ et applicata } = P + \frac{R dP (1-R^2)}{-dR}. \text{ Al-}$$

$$\text{terius vero curvae } B \text{ abscissa } = \frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}} dp}{-dr}, \text{ quae aequa-}$$

lis

lis erit illius abscissae; at applicata erit  $= p + \frac{r dp(1-r^2)}{-dr}$   
 Arcus autem curvae A exprimetur formula  $\frac{dP(1-R^2)}{-dR} + \int R dP$ , et curvae B arcus eidem abscissae respondens erit  $\frac{dp(1-r^2)}{-dr} + \int r dp$ . Pendebit autem tam  $\int R dP$  quam  $\int r dp$  a  $\int Z dz$ : nihilo tamen minus  $\int R dP + \int r dp$  algebraice poterit exhiberi.

§. 13. Denique ex ipsa solutione satis intelligitur me non mōnente eadem opera solui posse problema, si non arcuum summa, sed differentia eorum debeat esse algebraica, vel etiam summa seu differentia quorumcunque multiplosum horum arcuum. Quamobrem superfluum foret, hos quoque casus attingere. Ad institutum quidem plenius persequendum requireretur, vt exempla quaedam euoluerentur, sed cum ad prolixissimos calculos esset perueniendum, ea potius omitto, aliisque inuestiganda relinquo.