1741

Methodus universalis serierum convergentium summas quam proxime inveniendi

Leonhard Euler

METHODVS VNIVERSALIS SERIERVM CONVERGENTIVM SVMMAS QVAM PROXIME INVENIENDI.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

INcidi iam pridem in peculiarem ſerierum ſummas proxime inueniendi modum, qui integratione perficiebatur, et admodum facile cuiusuis ſeriei propoſitae conuergentis ſummam exhibebat. Dedi etiam huius methodi ſpecimina iam aliquoties, in diſſertatione de ſeriebus harmonicis; eam autem fuſius exponere magisque perficere tum temporis non vacabat, etiamſi perſpicerem ex ea multa praeclara ſubſidia ad ſummationem ſerierum poſſe deriuari. Hac autem ratione ſerierum ſummationem ad integrationem reducebam. Poſito numero terminorum n, eorumque ſumma s, ſi creſcat n vnitate, ſummae s augmentum erit terminus ſeriei ſequens, qui per n dabitur. Sit is x, eritque Tabula I.

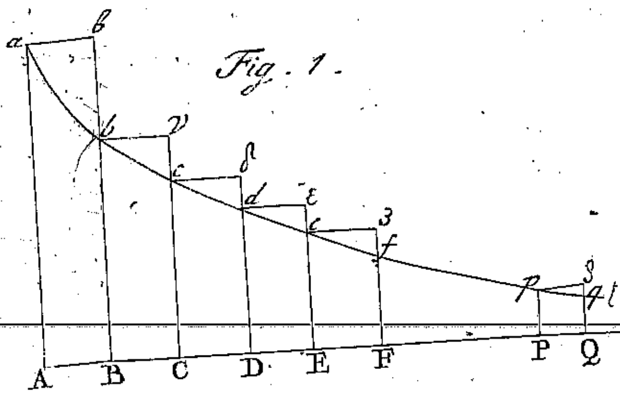

Fig. 1.

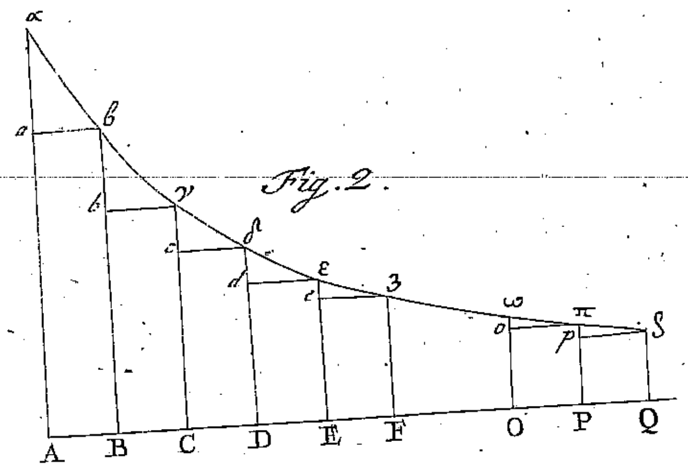

Fig. 2.

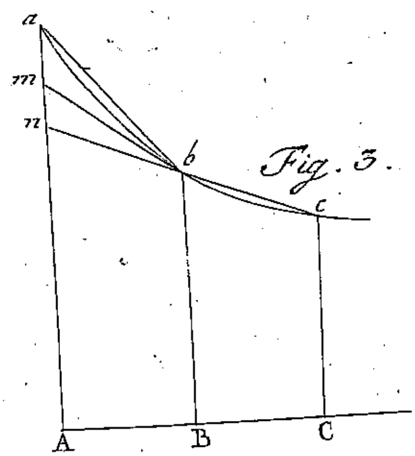

Fig. 3.

x quantitas valde exigua, si n fuerit numerus satis magnus. Consideratis nunc 1 et x instar incrementorum momentaneorum quantitatum n et s erit $dn:ds = 1:x$ ideoque $ds = xdn$ et $s = \int xdn$. In qua integratione quidem constantem incognitam addi oportet, quae autem si summa s a summa seriei in infinitum continuatae, quae ex eadem integratione innotescit, subtrahatur, rursus exit ex calculo. Hoc itaque modo obtinetur terminorum ab x vsque in infinitum summa, quae ad summam s ipso actu inueniendam addita, dabit seriei propositae in infinitum continuatae summam.

§. 2. Obseruaui autem hoc modo semper summam seriei nimis paruam prodire, id quod mihi occasionem praebuit cogitandi, an alio simili tamen modo summa nimis magna possit produci, quo limites habeantur, intra quos vera seriei summa sit constituta. In quo negotio maximam afferri lucem animaduerti, si, quae ante per solum calculum praestiteram, ad considerationem linearum curuarum reducantur. Hoc enim modo inspectio figurae non solum imaginationis vim adauget, sed etiam ad iudicandum et inueniendum ingens affert subsidium. Traduxi autem sequenti modo seriei summationem ad figuram geometricam, cuius quadratura ipsam summam exhibet.

Figura 1. §. 3. Sit series, cuius summa inuestigatur, $a + b + c + d + e +$ etc. in qua terminus cuius index est n sit x quantitas scilicet ex n vtcunque composita. Sumantur in axe AP partes AB, BC, CD, DE etc. inter se aequales et vnitate denotentur. In punctis A, B, D,

etc.

etc. erigantur applicatae Aa, Bb, Cc, Dd etc. respectiue aequales terminis seriei propositae a, b, c, d, etc. Atque sumta AP $= n - 1$ fiat applicata P$p = x$. Ad has applicatas et portiones axis $= 1$ compleantur parallelogramma Aβ, Bγ, Cδ, Dε, etc. vsque ad Pϱ. Horum igitur parallelogrammorum summa exprimet seriei $a + b + c + d +$ etc. - - - - - - - $+ x$ summam. Quare ad huius seriei summam inueniendam methodo opus est commoda, qua horum parallelogrammorum aggregatum quam proxime possit definiri.

§. 4. Per puncta a, b, c, d, e, f - - - - p intelligatur ducta linea curua $abcdef$ - - - - p, cuius haec erit natura, vt posita abscissa AP $= n - 1 = t$ sit applicata Pp $= x$. Quia autem x est quantitas ex n et constantibus composita, si loco n ponatur $t + 1$, habebitur aequatio inter coordinatas t et x pro ista curua. Vel si terminus seriei vltimum x sequens ponatur y, cuius ergo index erit $n + 1$, aequatio inter n seu AQ et y seu Qq exprimet quoque naturam curuae abc - - - pq. Data autem hac serie dabitur etiam y per n, vnde oritur aequatio inter n et y curuae naturam exprimens.

§. 5. Facta iam hac linea curua perspicuum est aream curuae inter abscissam AQ et applicatas Aa ac Qq contentam minorem esse quam aggregatum omnium rectangulorum Aβ + Bγ etc. - - - - + Pϱ; quippe differentia est summa omnium triangulorum $ab\beta$, $bc\gamma$ - - - - - - $pq\varrho$. Cum autem aggregatum illorum rectangulorum exhibeat summam seriei $a + b + c$ - - - $+ x$, erit haec summa maior quam area AaqQ. Quae vero ro area cum sit $= \int y\,dn$, hoc integrali ita accepto vt euanescat posito $n = 0$; erit $a + b + c - - - - - + x > \int y\,dn$.

Figura 2. §. 6. Inuento ergo vno limite, quo summa seriei est maior, alterum similem sequenti modo inuestigo. Sumtis iterum in axe AP partibus aequalibus AB, BC, CD, - - - - - PQ, quae singulae vnitate exprimantur; applicatae ita constituantur vt sit $B\beta = a$, $C\gamma = b$, $D\delta = c$, sumtoque $AP = n$ sit $P\pi = x$, et $Q\varrho = y$. Quemadmodum autem est y terminus vltimum x sequens; ita sit A terminus primum a antecedens; cui aequalis capiatur $A\alpha$. Quo facto aggregatum rectangulorum $Ba + Cb + Dc - - - - Po$ erit aequale summae seriei $a + b + c + d - - - - - - + x$.

§. 7. Nunc simili modo per puncta $\alpha, \beta, \gamma - - - \pi$ concipiatur ducta linea curua $\alpha\beta\gamma\pi$, cuius haec erit natura, vt sumta abscissa $AP = n$ sit applicata $P\pi = x$. Area ergo, quae inter hanc curuam et abscissam AP comprehenditur, erit $= \int x\,dn$ integrali hoc ita accepto vt euanescat posito $n = 0$. Area vero ista maior est quam rectangulorum Ba, $Cb - - - - - Po$ aggregatum, quocirca erit $a + b + c + d - - - - - - - + x < \int x\,dn$. Sunt ergo huius seriei limites $\int x\,dn$ et $\int y\,dn$.

§. 8. Obtinebimus autem adhuc propiores summae huius seriei determinationes, consideratis triangulis paruis, in vtraque figura neglectis. Addi autem oportet in prima figura haec triangula ad aream curuae $\int y\,dn$, vt summa seriei obtineatur. Haec vero triangula sunt curui-

curuilinea, atque maiora quam ſi eſſent rectilinea, quia curua conuexitatem obuertit. Summa autem horum triangulorum rectilineorum eſt aequalis $(Aa - Qq) AB : 2$ ſeu $\frac{a-y}{2}$. Quare ſi ad $\int y\,dn$ addatur $\frac{a-y}{2}$ non ſatis addetur; ideoque erit $a + b + c - - - - - - + x > \int y\,dn + \frac{a-y}{2}$.

§. 9. In ſecunda figura ab area $A\alpha\pi P$, quae eſt $= \int x\,dn$, ſubtrahi deberent omnia triangula $\alpha a \beta$, $\beta b \gamma$ $- - - - \omega o \pi$, ad veram rectangulorum ſummam inueniendam. Sumatur autem loco trianguli curuilinei $\alpha a \beta$ minus rectilineum triangulum, quod oritur producta recta per γ et β donec occurrat rectae $A\alpha$, quod erit $= \frac{a-b}{2}$ horumque triangulorum omnium ſumma erit $\frac{a-y}{2}$. Quia vero $\frac{a-y}{2}$ minus eſt quam ſumma omnium curuilineorum triangulorum, ſi $\frac{a-y}{2}$ ſubtrahatur a $\int x\,dn$, erit $a + b + c - - - - - + x < \int x\,dn - \frac{a+y}{2}$. Figura 2.

§. 10. Horum duorum nouorum limitum prior vero valori multo eſt propior quam poſterior. Ille autem $\int y\,dn + \frac{a-y}{2}$ aliquantulum minor eſt quam ſumma $a + b + c - - - - - - + x$ differentia enim eſt aggregatum omnium ſegmentorum arcubus ab, bc etc. et chordis ab, bc comprehenſorum. Ad haec ſegmenta vero proxime aeſtimanda producatur chorda ſequens cb in n vsque et an in m biſariam ſecetur recta lm, quae proxime pro tangente curuae in b haberi poterit. Hinc erit denuo quam proxime ſegmentum aba, pars tertia trianguli abm, et conſequenter pars ſexta trianguli abn. Figura 3.

§. 11.

§. 11. Si ergo fuerit $Aa = a$, $Bb = b$ et $Cc = c$, erit $an = a - 2b + c$, et ob $AB = 1$, triangulum $abn = \frac{a-2b+c}{2}$. Huius igitur pars ſexta $\frac{a-2b+c}{12}$ aequalis eſt ſegmento primo aba; ſimiliter ergo erit ſecundum ſegmentum $= \frac{b-2c+d}{12}$ et vltimum $= \frac{x-2y+z}{12}$, denotante z terminum indicis $n+2$. Fiet ergo ſumma omnium ſegmentorum $= \frac{a-b}{12} - \frac{y+z}{12}$, quae addita ad ſuperiorem ſummam dat $a + b + c - - - - - - + x = \int y\,dn + \frac{a}{2} - \frac{y}{2} + \frac{(a-b)}{1} - \frac{(y-z)}{12}$.

§. 12. Valor hic inuentus valde prope accedit ad veram ſeriei aſſumtae ſummam, quia in eo ne ſegmenta quidem neglesimus. Propoſita autem ſerie conuergente effici poteſt, vt haec formula quantumuis prope ad veram ſummam accedat; hocque fieri poteſt, dum aliquot terminorum initialium ſumma reipſa computetur, et ſequentes demum loco a, b, c etc. ſubſtituantur. Quo enim plures termini initiales reipſa addantur, eo exactior proueniet ſeriei ſumma. Atque ſi ſeriei in infinitum continuatae ſumma deſideretur, euaneſcent y et z; atque in $\int y\,dn$ poſito $n = \infty$ erit ſumma ſeriei infinitae $= \int y\,dn + \frac{7a}{12} - \frac{b}{12}$.

§. 13. Vt ſi quaeratur ſumma millies mille terminorum huius ſeriei $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc. addantur decem termini initiales actu prodibitque $1,928968$. Reliquorum autem terminorum $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}$ etc. $- - - - \frac{1}{1000000}$ ſumma inuenietur hoc modo: eſt $a = \frac{1}{11}$, $b = \frac{1}{12}$, $x = \frac{1}{n+10}$ et $y = \frac{1}{n+11}$ et $z = \frac{1}{n+12}$ atque $\int y\,dn = l\frac{n+11}{11}$. Poſito nunc $n = 999990$; erit ſumma deſiderata $= l\frac{1000001}{11}$

+

$+\frac{1}{22}+\frac{1}{132}-\frac{1}{144}-\frac{1}{2000002}-\frac{1}{12000012}+\frac{1}{12000024}+2,928968$ seu $=14,392669$. q. pr.

§. 14. Proposita sit nunc haec series $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}$ etc., cuius summa in infinitum desideretur. Si primo decem termini initiales addantur habebitur $1,549768$. Pro reliquis vero erit $a=\frac{1}{121}$, $b=\frac{1}{144}$; $x=\frac{1}{(n+10)^2}$ et $y=\frac{1}{(n+11)^2}$. Ex his fit $\int y\,dn=\frac{1}{11}-\frac{1}{n+11}$; atque posito $n=\infty$ erit $\int y\,dn=\frac{1}{11}$. Seriei ergo propositae in infinitum continuatae summa erit $\frac{1}{11}+\frac{7}{12.121}-\frac{1}{12.144}+1,549678$. Quae expressio in partibus decimalibus dat $1,644920$.

INVENTIO SVMMAE CVIVSQVE SERIEI EX DATO TERMINO GENERALI.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Cvm, quae superiore dissertatione de summatione serierum methodo geometrica exposui, diligentius considerassem, eandemque summandi rationem analytice inuestigassem; perspexi, id, quod geometrice elicui, deduci posse ex peculiari quadam summandi methodo, cuius iam ante triennium in Disser-

 tatio-