1740

Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis eiusdem generis

Leonhard Euler

ADDITAMENTVM
AD DISSERTATIONEM
DE
INFINITIS CVRVIS
EIVSDEM GENERIS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

IN ſuperiore diſſertatione, in qua methodum tradidi aequationem pro infinitis curuis eiusdem generis inueniendi, ipſius Q valorem in aequatione $dz = Pdx + Qda$ determinare docui, ex data aequatione $z = \int Pdx$. Namque ſi P ex x, et a cum conſtantibus vtcunque fuerit compoſitum; manifeſtum eſt ſi $\int Pdx$ differentietur poſito non ſolum x ſed etiam a variabili, prodituram eſſe huius formae aequationem $dz = Pdx + Qda$, in qua valor ipſius Q neceſſario a quantitate P, quae eſt cognita, pendebit. Demonſtraui ſcilicet, ſi differentiale ipſius P poſito x conſtante fuerit Bda, fore ipſius Q differentiale poſito a conſtante, Bdx, ex quo pendentia ipſius Q a P ſatis perſpicitur.

§. 2. Cum autem inuentus fuerit valor ipſius Q, aequatio $dz = Pdx + Qda$ exprimet naturam infinitarum curuarum ordinatim datarum, quarum ſingulae ſeorſim continentur aequatione $dz = Pdx$, a ſe inuicem vero dif-

diffe-

differunt diuersitate parametri seu moduli a. Et hanc ob rem aequationem $dz = Pdx + Qda$ in qua modulus a tanquam quantitas variabilis inest, cum *Cel. Hermanno* aequationem modularem vocaui.

§. 3. Si Pdx integrationem admittit, seu si curuae ordinatim datae omnes sunt algebraicae aequatio $z = \int Pdx$ simul erit modularis; nam quia nulla adsunt differentialia, modulus a aeque variabilis ac x et z poterit considerari. Sin autem Pdx integrari nequit, aequatio etiam modularis non erit algebraica, exceptis casibus quibus est $P = AX + BY + CZ$ etc. existentibus A, B, C etc. functionibus ipsius a et constantium, atque X, Y, Z etc. functionibus ipsius x et constantium tantum, modulo a ipsas non ingrediente. Etiamsi enim ipsa aequatio $dz = Pdx$ sit differentialis, tamen aequatio modularis $z = A\int Xdx + B\int Ydx + C\int Zdx$ etc. instar algebraicae est consideranda.

§. 4. Nisi autem P talem habuerit valorem aequatio modularis vel erit differentialis gradus primi vel altioris gradus. Differentialis quidem primi gradus erit, si Q vel erit quantitas algebraica, vel integrale ipsius Pdx inuoluet, hoc enim casu z loco $\int Pdx$ substitutum tollet quoque signum summatorium, ita vt aequatio modularis differentialis pura sit proditura.

§. 5. Deprehendi vero in superiore dissertatione, Q toties algebraicum habere valorem quoties P talis fuerit ipsarum a et x functio, vt numerus dimensionum, quas a et x constituunt sit vbique idem atque -1, seu

 quo-

quoties Px vel Pa fuerit functio ipſarum a et x nullius dimenſionis. Deinde etiam obſeruaui, quoties in P litterae a et x eundem tantum vbique conſtituant dimenſionum numerum, toties Q ab integratione ipſius Pdx pendere. Ex quo, cum tam eximia conſequantur ſubſidia ad aequationes modulares inueniendas, maxime iuuabit inueſtigare, num forte aliae dentur huiusmodi functiones ipſius P, quae iisdem praerogatiuis gaudeant. Has igitur a priore inueſtigare conſtitui, quo ſimul methodus tales functiones inueniendi aperiatur.

§. 6. Si P eſt functio ipſarum a et x dimenſionum -1, ſeu z functio ipſarum a et x nullius dimenſionis, oſtendi fore $Px + Qa = o$, ſeu $Q = -\frac{Px}{a}$. Sumamus igitur eſſe $Q = -\frac{Px}{a}$ et quaeramus, qualis ſit P functio ipſarum a et x. At ſi $Q = -\frac{Px}{a}$ erit $dz = Pdx - \frac{Pxda}{a}$. Quamobrem P talis eſſe debebit functio ipſarum a et x, vt $dx - \frac{xda}{a}$ per eam multiplicatum euadat integrabile. Hic autem per integrabile non ſolum intelligo, quod integratione ad quantitatem algebraicam, ſed etiam quod ad quadraturam quamcunque reducitur. Si igitur generaliter inuenerimus quantitatem, in quam $dx - \frac{xda}{a}$ ductum ſit integrabile, ea erit quaeſitus valor ipſius P, eius proprietatis, vt ſit $Q = -\frac{Px}{a}$.

§. 7. Fit autem $dx - \frac{xda}{a}$ integrabile ſi multiplicatur per $\frac{1}{a}$, integrale enim erit $\frac{x}{a} + c$, deſignante c quantitatem conſtantem quamcunque ab a non pendentem. Quocirca, ſi $f(\frac{x}{a} + c)$ denotet functionem quamcunque

cunque ipsius $\frac{x}{a}+c$, fiet quoque $dx-\frac{xda}{a}$ integrabile, si multiplicetur per $\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$. Qui valor cum sit maxime generalis, erit $P=\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$, et $Q=-\frac{Px}{a}$. Est vero $f(\frac{x}{a}+c)$ functio quaecunque ipsarum a et x nullius demensionis. Quamobrem quoties Pa fuerit functio nullius dimensionis ipsarum a et x, toties erit $Q=-\frac{Px}{a}$, ideoque aequatio modularis $dz=Pdx-\frac{Pxda}{a}$.

§. 8. Sit $Q=A-\frac{Px}{a}$, et A functio quaecunque ipsius a et constantium; erit $dz=Pdx+Ada-\frac{Pxda}{a}$ seu $dz-Ada=Pdx-\frac{Pxda}{a}$. In qua aequatione cum $dz-Ada$ sit integrabile, debebit $Pdx-\frac{Pxda}{a}$ quoque esse integrabile. Hoc autem per praecedentem operationem euenit si $P=\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$. Tum igitur erit $Q=A-\frac{x}{a^2}f(\frac{x}{a}+c)$. Simili ratione intelligitur si fuerit $P=X+\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$, denotante X functionem ipsius x tantum, fore $Q=A-\frac{x}{a^2}f(\frac{x}{a}+c)$, vbi vt ante $f(\frac{x}{a}+c)$ exprimit functionem quamcunque ipsarum a et x nullius dimensionis.

§. 9. Sit $Q=-\frac{nPx}{a}$, vbi n indicet numerum quemcunque; erit $dz=Pdx-\frac{nPxda}{a}$. Debebit ergo P talis esse quantitas, quae $dx-\frac{nxda}{a}$ si in id multiplicetur, reddat integrabile. Fit autem $dx-\frac{nxda}{a}$ integrabile, si ducatur in $\frac{1}{a^n}$, integrale enim erit $\frac{x}{a^n}$. Quare generaliter erit $P=\frac{1}{a^n}f(\frac{x}{a^n}+c)$. Atque quoties P talem ha-

habuerit valorem erit $Q = -\frac{nx}{a^{n+1}} f(\frac{x}{a^n} + c)$. Intelligitur etiam si fuerit $P = X + \frac{1}{a^n} f(\frac{x}{a^n} + c)$, fore quoque generalius $Q = A - \frac{nx}{a^{n+1}} f(\frac{x}{a^n} + c)$. Vbi vt ante ~~et in posterum semper f denotat functionem quamcunque~~ quantitatis sequentis. At A est functio quaecunque ipsius a, et X functio quaecunque ipsius x tantum.

§. 10. Quo igitur dignosci queat, an datus quispiam valor ipsius P in formula inuenta contineatur, poni debebit $a = b^{\frac{1}{n}}$, quo facto videndum est, an Pb fiat functio ipsarum b et x nullius dimensionis, vel an prodeat aggregatum ex functione quadam ipsius x tantum, et tali functione. Quod si deprehendetur, habebit P proprietatem requisitam, eritque Q aequale huic ipsi functioni in $-\frac{nx}{a}$ ductae vna cum functione quacunque ipsius A. In vniuersum autem notandum est quantitatem P functione ipsius x vt X, et Q functione ipsius a vt A posse augeri. Nam si fuerit $dz = Pdx + Qda$ aequatio modularis, talis quoque erit aequatio $dz = Pdx + Xdx + Qda + Ada$. Posito enim du loco $dz - Xdx - Ada$ habebitur $du = Pdx + Qda$, quae cum priore prorsus congruit. Hancobrem superfluum foret in posterum ad valorem ipsius Q assumtum, functionem A ipsius a adiicere. Quare hanc apparentem generalitatem negligemus.

§. 11.

§. 11. Sit nunc $Q = PE$ denotante E functionem quamcunque ipsius a. Erit itaque $dz = P\,dx + PE\,da$ et P talis quantitas, quae reddit $dx + E\,da$ integrabile. At si $P = 1$ fit integrabile hoc differentiale, integrale enim erit $x + \int E\,da$. Quamobrem erit $P = f(x + \int E\,da)$ et $Q = Ef(x + \int E\,da)$. Siue si ponatur $\int E\,da = A$, fueritque $P = f(x + A)$ erit $Q = \frac{dA}{da} f(x + A)$. Num autem datus ipsius P valor in hac formula contineatur, hoc modo est inuestigandum, ponatur $x = y - A$, et quaeratur, an pro A talis accipi queat functio ipsius a et constantium, vt P fiat functio solius y et constantium, quam modulus a non amplius ingrediatur.

§. 12. Ponamus esse $Q = PY$, vbi Y sit functio quaecunque ipsius x modulum a non inuoluens. Quo posito erit $dz = P\,dx + PY\,da$, et P talis functio quae efficiat $dx + Y\,da$ integrabile. Posito autem $P = \frac{1}{Y}$, fit $z = \int \frac{dx}{Y} + a = X + a$, si ponatur $\int \frac{dx}{Y} = X$. Quamobrem erit $P = \frac{1}{Y} f(X + a)$. Quoties ergo P huiusmodi habuerit valorem erit semper $Q = f(X + a)$.

§. 13. Sit nunc generalius positum $Q = PEY$ erit $dz = P\,dx + PEY\,da$, vbi vt ante E denotat functionem ipsius a, Y vero ipsius x. Perspicuum est, si fuerit $P = \frac{1}{Y}$ formulam istam differentialem effici integrabilem, prodiret enim $z = \int \frac{dx}{Y} + \int E\,da$, seu $z = X + A$ posito $\int \frac{dx}{Y} = X$. Quamobrem erit $P = \frac{1}{Y} f(X + A) = \frac{dX}{dx} f(X + A)$ hisque in casibus fiet $Q = \frac{dA}{da} f(X + A)$. Comprehenduntur in his formulis etiam logarithmici ipsarum A et X valores, vt si sit $X = lT$ et $A = -lF$, erit $P = \frac{dT}{T\,dx} f\frac{T}{F}$ et $Q = \frac{-dF}{F\,da} f\frac{T}{F}$.

§. 14.

§. 14. Perſpicitur igitur omnes has formulas locum habere, ſi aequatio propoſita fuerit vel $dz = dX\,f(X+A)$ vel $dz = \frac{dX}{X} f \frac{X}{A}$. Quoties ergo aequatio propoſita ad has formas poterit reduci, ſubſtituendis X pro functione quacunque ipſius x et A pro functione quacunque ipſius a, toties aequatio modularis poterit exhiberi: erit enim priore caſu $dz = dX\,f(X+A) + dA\,f(X+A)$ in poſteriore vero caſu $dz = \frac{dX}{X}, f\frac{X}{A} - \frac{dA}{A} f \frac{X}{A}$. Id quod quidem in his vniuerſalibus exemplis facile perſpicitur, in ſpecialioribus vero multo difficilius. Quocirca maximum poſitum erit ſubſidium in reducendis caſibus particularibus ad has generales formas, id quod, ſi quidem talis reductio fieri poteſt, non difficulter praeſtatur.

§. 15. Si ponatur $Q = PR$, deſignante R functionem quamcunque ipſarum a et x, erit $dz = P\,dx + PR\,da$. Ad inueniendum nunc valorem ipſius P, ſumatur formula $dx + R\,da$, ſeu aequatio $dx - R\,da = o$ conſideretur, et quaeratur quomodo indeterminatae a et x a ſe inuicem poſſint ſeparari, ſeu quod idem eſt, per quamnam quantitatem $dx + R\,da$ debeat multiplicari, vt fiat integrabilis. Sit haec quantitas S et ipſius $S\,dx + RS\,da$ integrale T erit $P = S f T$. Hisque in caſibus erit $Q = RSfT$. Haec operatio latiſſime patet et omnes caſus complectitur, quibus Q cognitum et a z non pendentem habet valorem.

§. 16. Progrediamur autem vlterius et in eos ipſius P valores inquiramus, in quibus Q non ſolum a P ſed etiam

etiam a $\int P\,dx$ seu a z pendet. Ponatur igitur primo $Q = \frac{nz}{a} - \frac{Px}{a}$, denotante n numerum quemcunq; Erit ergo $dz = P\,dx + \frac{nz\,da}{a} - \frac{Px\,da}{a}$, seu $dz - \frac{nz\,da}{a} = P\,dx - \frac{Px\,da}{a}$. Multiplicetur vtrinque per $\frac{1}{a^n}$, quo prodeat haec aequatio $\frac{dz}{a^n} - \frac{nz\,da}{a^{n+1}} = \frac{P\,dx}{a^n} - \frac{Px\,da}{a^{n+1}}$, in qua prius membrum est integrabile. Debebit ergo etiam integrabile esse alterum membrum $\frac{P\,dx}{a^n} - \frac{Px\,da}{a^{n+1}}$, ex quo idoneus ipsius P valor est quaerendus. Euenit hoc si $P = a^{n-1}$, erit enim integrale $\frac{x}{a} + c$. Quare erit vniuersaliter $P = a^{n-1} f(\frac{x}{a} + c)$, id quod contingit si $\frac{P}{a^{n-1}}$ est functio ipsarum a et x nullius dimensionis seu P functio ipsarum a et x dimensionum $n-1$. Hoc igitur casu est $nz = Px + Qa$ vt in superiore dissertatione ostendimus.

§. 17. Sit $Q = \frac{nz}{a} + PEY$, vbi E ex a, et Y ex x vtcunque est compositum. Erit itaque $dz - \frac{nz\,da}{a} = P\,dx + PEY\,da$, et $\frac{dz}{a^n} - \frac{nz\,da}{a^{n+1}} = \frac{P\,dx}{a^n} + \frac{PEY\,da}{a^n}$. Quamobrem P ita debet accommodari, vt $\frac{dx + EY\,da}{a^n}$ per id multiplicatum euadat integrabile. Fit hoc autem si $P = \frac{a^n}{Y}$, quo casu integrale est $\int \frac{dx}{Y} + \int E\,da$ seu $X + A$ posito $\int \frac{dx}{Y} = X$ et $\int E\,da = A$. Quare debebit esse $P =$

$\frac{a^n dX}{dx} f(X+A)$, et in his casibus erit $Q = \frac{a^n dA}{da} f(X+A) + \frac{nz}{a}$. Si X et A a logarithmis pendeant prodibit P huius valoris $\frac{a^n dX}{X dx} f \frac{X}{A}$ cui respondebit $Q = \frac{nz}{a} - \frac{a^n dA}{A da} f \frac{X}{A}$.

§. 18. Si ponatur $Q = Fz + PEY$, et F et E functiones sint ipsius a, Y vero ipsius x. Tum erit $dz - Fz da = P dx + PEY da$. Ponatur $\int F da = lB$, ita vt B sit functio ipsius a, et diuidatur per B habebitur $\frac{dz}{B} - \frac{z dB}{B^2} = \frac{P dx}{B} + \frac{PEY da}{B}$. Cum igitur prius membrum sit integrabile, et alterum tale effici debet. Fit hoc si $P = \frac{B}{Y}$ tumque erit integrale $\int \frac{dx}{Y} + \int E da$ seu $X + A$. Quocirca erit ipsius P valor quaesitus $\frac{B dX}{dx} f(X+A)$, Q vero erit $\frac{z dB}{B da} + \frac{B dA}{da} f(X+A)$. Perspicitur quoque si fuerit $P = \frac{B dX}{X dx} f \frac{X}{A}$ fore $Q = \frac{z dB}{B da} - \frac{B dA}{A da} f \frac{X}{A}$.

§. 19. Latissime patebit solutio si ponatur $Q = Fz + PR$ et R fuerit functio ipsarum a et x. Erit enim $dz - Fz da = P dx + PR da$. Posito $\int F da = lB$ diuidatur per B habebitur $\frac{dz}{B} - \frac{z dB}{B^2} = \frac{P}{B}(dx + R da)$. Sit iam S functio efficiens $dx + R da$ integrabile sitque $\int (S dx + SR da) = T$. Quo inuento erit $P = BS fT$ huic respondet $Q = \frac{z dB}{B da} + BRS fT$.

§. 20. Possunt praeterea plures huiusmodi valores ipsius P coniungi, hocque modo multo latius extendi

vt

vt si ponatur $P = \frac{BdX}{dx} f(X+A) + \frac{BdY}{dx} f(Y+E)$ erit $Q = \frac{zdB}{Bda} + \frac{BdA}{da} f(X+A) + \frac{BdE}{da} f(Y+E)$. Atque simili modo numerus terminorum quantum libuerit, poterit augeri. In his igitur casibus omnibus aequatio modularis differentialis primi casus inuenitur. Quamobrem his expeditis pergo ad eos casus inuestigandos, inquibus aequatio modularis primi gradus differentialis non datur, sed qui tamen ad aequationem modularem differentio-differentialem perducuntur.

§. 21. Si igitur Q neque algebraice per a et x neque per z potest exprimi, ii inuestigandi sunt casus quibus differentiale ipsius Q poterit exhiberi. Est autem $Q = \frac{dz - Pdx}{da}$, ergo $dQ = d\frac{dz - Pdx}{da}$. Quare si differentiale ipsius Q vel per sola a et x vel per haec et Q vel etiam simul per z poterit exprimi, habebitur aequatio modularis, quae erit differentialis secundi gradus. Ostensum autem est superiore dissertatione si ponatur $dP = Ldx + Mda$ fore $dQ = Mdx + Nda$, ita vt haec differentialia communem literam M inuoluant. Quia autem ex dato P etiam M datur, nil aliud requiritur, nisi vt N determinetur. Quamobrem in eos inquiremus casus, quibus N vel algebraice, vel per Q vel per Q et z exprimi potest. Tum enim habebitur aequatio modularis $Mdx + Nda = d.\frac{dz - Pdx}{da}$, posito in N loco Q eius valore $\frac{dz - Pdx}{da}$.

§. 22. Ex praecedentibus satis intelligitur, si N per sola a et x determinetur, fore $M = \frac{dX}{dx} f(X+A)$ et $N = \frac{dA}{da} f(X+A)$, seu $M = V + \frac{dX}{dx} f(X+A)$ et N

 $=I$

$= I + \frac{dA}{da} f(X + A)$ denotante V functionem quamcunque ipsius x et I ipsius a. Ex dato itaque P quaeratur M, differentiando P posito x constante, et differentiali inuento per da diuidendo. Quo facto quaeratur an valor ipsius M in formula $V + \frac{dX}{dz} f(X + A)$ contineatur. Quod si fuerit compertum et X et A et V definitae, erit $Vdx + dX f(X + A) + I da + dA f(X + A) = d. \frac{dz - Pdx}{da}$ aequatio modularis desiderata. Notandum est in posterum semper loco $\frac{dX}{dx} f(X + A)$ poni posse aggregatum ex quotuis huiusmodi formulis $\frac{dX}{dx} f(X + A) + \frac{dY}{dx} f(Y + B) +$ etc. At loco $\frac{dA}{da} f(X + A)$ tunc poni debebit $\frac{dA}{da} f(X + A) + \frac{dB}{da} f(Y + B)$ etc. Hoc igitur monito in posterum tantum vnica formula $\frac{dX}{dx} f(X + A)$ eique respondente $\frac{dA}{da} f(X + A)$ vtemur.

§. 23. Pendeat N simul etiam a Q sitque $N = R + DQ$, vbi D sit functio ipsius a, et R functio ipsarum a et x ex conditionibus sequentibus determinanda. Erit igitur $dQ - DQda = Mdx + Rda$, sit $Dda = \frac{dH}{H}$ et diuidatur vtrinque per H prodibit $\frac{dQ}{H} - \frac{QdH}{H^2} = \frac{Mdx + Rda}{H}$. In qua aequatione, cum illud membrum sit integrabile, tale quoque hoc $\frac{Mdx + Rda}{H}$ est efficiendum. Fiet igitur per praecedentem methodum $M = \frac{Hdx}{dx} f(X + A)$ et $R = \frac{Hda}{da} f(X + A)$. Quare si in exemplo quopiam proposito ex P reperiatur M talis valoris, erit $N = \frac{HdA}{da} f(X + A) + \frac{dH}{Hda^2}(dz - Pdx)$ posito $\frac{dH}{Hda}$ loco D et $\frac{dz - Pdx}{da}$ loco Q. Atque hinc in promptu erit aequatio modularis.

§. 24.

§. 24. Si N non a Q ſed a z pendeat, ita vt ſit $N = R + Cz$, denotante C functionem ipſius a quamcunque; erit $dQ - Czda = Mdx + Rda$. At quia eſt $dz - Qda = Pdx$, addatur huius multiplum $Fdz - QFda = PFdx$, exiſtente F functione ipſius a, quo facto orietur aequatio $dQ - QFda + Fdz - Czda = (M + PF)dx + Rda$. Ponatur $Fda = \frac{dB}{B}$ et $\frac{Cda}{F} = \frac{dG}{G}$, ita vt ſit $F = \frac{dB}{Bda}$ et $C = \frac{dBdG}{BGda^2}$. Perſpicuum itaque eſt $dQ - QFda$ integrabile reddi ſi diuidatur per B ſeu multiplicetur per $\frac{1}{B}$, $Fdz - Czda$ autem fit integrabile, ſi multiplicetur per $\frac{1}{FG}$. Quare quo idem factor ſummam horum differentialium reddat integrabilem debebit eſſe $FG = B$ ſeu $\frac{GdB}{Bda} = B$, vnde fiet $G = \frac{B^2da}{dB}$. Hancobrem alterum quoque membrum per B diuiſum eſt integrabile efficiendum ſcilicet $\frac{(M+PF)dx + Rda}{B}$. Quocirca facio $R = \frac{BdA}{da} f(X + A)$ et $M + PF = \frac{BdX}{dx} f(X + A) = M + \frac{PdB}{Bda}$. Inueſtigari igitur debet propoſito exemplo, an loco A, B et X tales functiones inueniri queant, quae exhibeant formulam $\frac{PdX}{dx} f(X + A)$ aequalem ipſi $M + \frac{PdB}{Bda}$. Hisque inuentis erit $N = \frac{BdA}{da} f(X + A) + \frac{zdBdG}{BGda^2}$ exiſtente $G = \frac{B^2da}{dB}$, qui valor in aequatione $Mdx + Nda = d.\frac{dz - Pdx}{da}$ ſubſtitutus dabit aequationem modularem.

§. 25. Sit nunc generaliſſime $N = R + DQ + Cz$, tenentibus R, D et C iisdem quibus ante valoribus. Erit ergo $dQ - DQda - Czda = Mdx + Rda$, addatur ad hanc aequatio $Fdz - FQda = PFdx$, quo habeatur $dQ - DQda - FQda + Fdz - Czda = (M + PF)dx +$

 Rda

$R\,da$. Positis autem vt ante $D\,da = \frac{dH}{H}$, $F\,da = \frac{dB}{B}$, et $\frac{C\,da}{F} = \frac{dG}{G}$, fit $dQ - DQ\,da - FQ\,da$ integrabile si ducatur in $\frac{1}{HB}$, et $F\,dz - Cz\,da$ integrabile fit ductum in $\frac{1}{FG}$. Quare debebit esse $HB = FG = \frac{G\,dB}{B\,da}$ et $G = \frac{B^2 H\,da}{dB}$. Atque $\frac{(M+PF)\,dx + R\,da}{HB}$ reddendum est integrabile: fiet ergo facto $HB = E$, $R = \frac{E\,dA}{da}\,f(X+A)$ et $M + PF = \frac{E\,dX}{dx}\,f(X+A)$. Quocirca in casu proposito A, X, E et F si fieri potest ita debent definiri, vt $\frac{E\,dX}{dx}\,f(X+A)$ aequale fiat ipsi $M + PF$. Hocque inuento erit $N = \frac{E\,dA}{da}\,f(X+A) + \frac{dH}{H\,da^2}(dz - P\,dx) + \frac{Fz\,dG}{G\,da}$, vnde aequatio modularis reperitur.

§. 26. At si nequidem differentialis secundi gradus aequatio modularis obtineri poterit; ad differentialia tertii gradus erit procedendum. Fiet ergo $N = \frac{d\left(\frac{dz - P\,dx}{da}\right) - M\,dx}{da}$ atque hinc posito $dN = s\,dx + t\,da$, erit $s\,dx + t\,da = d\left(\frac{d\left(\frac{dz - P\,dx}{da}\right) - M\,dx}{da}\right)$. Datur autem s ex M, cum sit $s\,da$ differentiale ipsius M, quod prodit, si x ponatur constans. Quamobrem t tantum debebit inuestigari. Sit ergo $t = R + EN + DQ + Cz$, ideoque $dN - EN\,da - DQ\,da - Cz\,da = s\,dx + R\,da$. Cum sit autem $dQ - N\,da = M\,dx$ et $dz - Q\,da = P\,dx$, addantur horum multipla ad illam aequationem, vt prodeat haec aequatio $dN - EN\,da - FN\,da + F\,dQ - DQ\,da - GQ\,da + G\,dz - Cz\,da = (s + MF + PG)\,dx + R\,da$. Sit $E\,da + F\,da = \frac{df}{f}$, $\frac{D\,da + G\,da}{F} = \frac{dg}{g}$ et $\frac{C\,da}{G} = \frac{dh}{h}$, fiatque $f = Fg = Gh$.

$= G h$. Quo facto aequationis inuentae prius membrum fit integrabile diuisum per f; hanc ob rem et $\frac{(s + MF + PG) dx + R da}{f}$ efficiendum est integrabile. Ponendum igitur est $R = \frac{f dA}{da} f(X + A)$ et $s + MF + PG = \frac{f dX}{da} f(X + A)$. In aequatione ergo proposita, quia s et M ex P dantur, debent F, G et f et X ex hac aequatione determinari. Quo facto sumatur $g = \frac{f}{F}$ et $h = \frac{f}{G}$, et $C = \frac{G dh}{h da}$, et $D = \frac{F dg}{g da} - G$ et $E = \frac{df}{f da} - F$. Atque ex his cognita erit aequatio $t = R + EN + DQ + Cz$, ex qua aequatio modularis facile conflatur. Simili modo ex his intelligitur quomodo pro altioribus differentialium gradibus operatio debeat institui, vt ad aequationes modulares perueniatur.

§. 27. In compendium nunc, quae hactenus tradidimus, redigamus tum quo facilius quaeuis aequatio proposita reduci queat, tum quo processus ad cuiusque gradus differentialia clarius perspiciatur. Proposita igitur aequatione $dz = P dx$, ponatur x constans et a tantum variabile sitque $dP = M da$, $dM = p da$, $dp = r da$ etc. Sit porro $Q = \frac{dz - P dx}{da}$, $N = \frac{dQ - M dx}{da}$, $q = \frac{dN - p dx}{da}$ et $s = \frac{dq - r dx}{da}$ etc. vbi dQ, dN, et dq, etc. sunt differentialia ipsorum Q, N et q, quae ex valoribus $\frac{dz - P dx}{da}$, $\frac{dQ - M dx}{da}$ et $\frac{dq - r dx}{da}$, inueniuntur positis a, x et z variabilibus. Hanc igitur ob rem cognitae erunt M, p, r etc. ex solo P, ex his vero habebuntur Q, N, q etc. Sint praeterea A, B, C, D, E, F etc. functiones ipsius a et constantium, et X, Y etc. functiones ipsius x non inuoluentes a.

§. 28. His praemissis si fuerit P talis functio ipsius x et a, vt BP comprehendatur in hac forma $\frac{dX}{dx}$f (X + A) seu plurium huiusmodi formularum aggregato, semper dari poterit aequatio modularis differentialis primi gradus. Namque erit $P\,dA\,dx = z\frac{dB\,dX}{B} + Q\,da\,dX$ seu $BP\,dA\,dx = z\,dB\,dX + BQ\,da\,dX$. Quae aequatio ob datum Q est modularis respondens aequationi propositae.

§. 29. Deinde si P talis sit functio ipsarum a et x vt BP + CM aequalis fieri possit $\frac{dX}{dx}$f(X + A) seu quotcunque huiusmodi formularum aggregato, aequatio modularis ad differentialia secundi gradus ascendet. Erit enim $BP\,dA\,dx + CM\,dA\,dx = z\,dB\,dX + BQ\,da\,dX + Q\,dC\,dX + CN\,da\,dX$. Quae est aequatio modularis quaesita, et inuoluit differentialia secundi gradus, quia eam littera N ingreditur, quae per dQ ideoque per ddz, ddx et dda determinatur.

§. 30. At si fuerit BP + CM + Dp aequalis huic formulae $\frac{dX}{dx}$f(X + A) vel aggregato quotcunquae huiusmodi formularum; aequatio modularis erit differentialis tertii gradus, prodibit enim ista aequatio $BP\,dA\,dx + CM\,dA\,dx + Dp\,dA\,dx = z\,dB\,dX + BQ\,da\,dX + Q\,dC\,dX + CN\,da\,dX + N\,dD\,dX + Dq\,da\,dX$. Quemadmodum ex ante traditis colligere licet, si modo quantitates ab a tantum pendentes ad has formulas accommodantur.

§. 31. Simili modo ad altiora differentialia progressus facile absoluitur. Nam si BP + CM + Dp + Er

$+ Er$ aequetur formulae $\frac{dX}{dx}f(X+A)$ vel talium plurium formularum aggregato, orietur aequatio modularis ista $BPdAdx + CMdAdx + DpdAdx + ErdA\,dx = zdBdX + BQdadX + QdCdX + CNdadX + NdDdX + DqdadX + qdEdX + EsdadX$ quae erit differentialis quarti gradus. Atque hoc modo quousque libuerit hae operationes facile continuantur ex sola allatarum inspectione.

§. 32. His autem omnibus perspectis maxima tamen difficultas saepenumero posita erit in dignoscenda functione P, an in his expositis generibus contineatur et in quonam genere. Etiam si enim generales ipsius P valores, qui ex assumtis formulis obtinentur nihil difficultatis in se habere videantur, tamen exemplis particularibus propositis accommodatio saepissime erit difficillima. Cuius rei ratio nequaquam methodo traditae est tribuenda, sed imperfectae functionum cognitioni, quae adhuc habetur. Quamobrem non solum in hoc negotio, sed in plurimis etiam aliis casibus maxime vtile foret, si functionum doctrina magis perficeretur, et excoleretur.

§. 33. Quantum quidem mihi hac de re meditari licuit, eximium subsidium inueni, si P statim ad huiusmodi formam $\frac{dX}{dx}f(X+A)$ vel huiusmodi formularum aggregatum reducatur, id quod sequenti modo facillime praestatur, Prima aequatio proposita non constituatur inter z et x sed inter z et y, ita vt aequatio ad modularem perducenda sit $dz = T\,dy$, existente T

 functione

functione ipsius y et moduli a. Tum accipiatur pro x talis functio ipsarum a et y, quae transmutet T in functionem ipsarum a et x contentam in formula $f(X + A)$, vel pluribus huic similibus, earumque multiplis, in quibus X est functio ipsius x tantum, et A ipsius a. Hoc igitur facto prodeat aequatio $dz = S\,dx\,f(X + A)$ vbi S sit quantitas tam simplex quam fieri potest. Quare P erit $S f(X + A)$ ideoque cum M, p etc. coniuncta facilius cum generalibus formulis comparatur. Inuenta autem hoc modo aequatione modulari, valor ipsius x in a et y assumtus, vbique loco x, loco dx autem differentiale huius valoris positis a et y variabilibus substituatur. Quo facto habebitur aequatio modularis inter a, y et z, quae quaerebatur.

§. 34. Ad pleniorem quidem methodi hactenus traditae cognitionem maximam lucem afferrent exempla et problemata, quorum solutio istam methodum requirit. Sed quia ipsorum problematum dignitas peculiarem tractationem postulat, in aliud tempus, ne hoc tempore nimis sim longus, eam differo.

CLAS-