1740

De infinitis curvis eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis

Leonhard Euler

DE INFINITIS CVRVIS EIVSDEM GENERIS. SEV METHODVS INVENIENDI AEQVATIONES PRO INFINITIS CVRVIS EIVSDEM GENERIS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

CVruas eiusdem generis hic voco tales curuas, quae a ſe inuicem non differunt niſi ratione lineae cuiusdam conſtantis, quae alios atque alios valores aſſumens eas curuas determinat. Linea haec conſtans a *Cel. Hermanno* modulus eſt vocatus, ab aliis parameter: quia autem parametri nomen ambiguitatem creare poteſt, moduli vocabulum retinebo. Eſt itaque modulus linea conſtans et invariabilis, dum vna infinitarum curuarum quaecunque determinatur; varios autem habet valores et ideo variabilis eſt, ſi ad diuerſas curuas refertur. Sic ſi in aequatione $y^2 = ax$ ſumatur a pro modulo, ex variabilitate ipſius a innumerabiles oriuntur parabolae ſuper eodem axe poſitae et communem verticem habentes.

§. 2. Infinitae igitur curuae eiusdem generis omnes vnica aequatione exprimuntur, quam modulus cui nobis

nobis ſemper litera a indicabitur, ingreditur. Huic enim modulo, ſi ſucceſſiue alii atque alii valores tribuantur, aequatio continuo alias dabit curuas, quae omnes in vna aequatione continentur. Aequationem hanc modulum continentem cum *Hermanno* modularem vocabimus; in qua igitur praeter alias conſtantes et eiusdem valoris in omnibus curuis quantitates inſunt modulus a et duae variabiles ad curuam quamlibet pertinentes, cuiusmodi ſunt vel abſciſſa et applicata, vel abſciſſa et arcus curuae, vel area curuae et abſciſſa etc. prout problema ſoluendum poſtulat.

§. 3. Sint igitur quantitates variabiles x et z, quae cum modulo a aequationem modularem ingrediuntur. Perſpicuum eſt, ſi detur aequatio algebraica inter x et z et a, pro vnica curua, in qua a vt conſtans conſideratur, eandem fore ſimul modularem, ſeu ad omnes curuas pertinere, ſi modo a fiat variabilis. At ſi inter x et z non poterit aequatio algebraica dari, difficile erit aequationem modularem inuenire. Nam ſit $z = \int P\,dx$, vbi P in a, z et x, quomodocunque detur, ſeu $dz = P\,dx$, in qua aequatione a vt conſtans conſideratur; intelligitur aequationem modularem haberi, ſi integralis aequationis $dz = P\,dx$ denuo differentietur, poſito etiam a variabili. Sed cum integrationem perficere non liceat, eiusmodi methodus deſideratur, qua differentialis aequatio, quae prodiret, ſi integralis denuo differentietur poſita etiam a variabili, inueniri poſſit.

§. 4.

§. 4. Ad conſtruendas quidem et cognoſcendas curuas aequatio $dz = Pdx$ ſufficit. Nam, dato ipſi modulo a certo valore conſtruetur aequatio $dz = Pdx$, quo facto habebitur vna curuarum infinitarum, eodemque modo aliae reperientur aliis ponendis valoribus loco a. Sed ſi in his curuis certa puncta debeant aſſignari prout problema aliquod poſtulat; talis aequatio $z = \int Pdx$ non ſufficit ſed requiritur aequatio a ſignis ſummatoriis libera in qua ſi non eſt algebraica, etiam differentialia ipſius a inſint. Ex data igitur aequatione differentiali pro vnica curua $dz = Pdx$ in qua a vt conſtans conſideratur, quaeri oportet aequationem differentialem, in qua et a ſit variabilis, haecque erit modularis. Haec vero modularis interdum erit differentialis primi gradus, interdum ſecundi et altioris, interdum etiam penitus non poterit inueniri.

§. 5. Quo igitur methodum tradam, qua ex aequatione differentiali $dz = Pdx$, in qua a eſt conſtans, modularis poſſit inueniri, quae a vt variabilem contineat; pono primo P eſſe functionem ipſarum a et x tantum, vt $\int Pdx$ ſaltem per quadraturas exhiberi poſſit. Erit igitur $z = \int Pdx$, in integratione ipſius Pdx, a pro conſtanti habita. Quaeritur nunc differentiale ipſius $\int Pdx$ ſi etiam a vt variabilis tractetur; quo inuento ipſique dz aequali poſito habebitur aequatio modularis. Differentiale autem ipſius $\int Pdx$ habebit hanc formam $Pdx + Qda$, eritque $dz = Pdx + Qda$ aequatio modularis, ſi modo valor ipſius Q eſſet cognitus.

§. 6.

§. 6. Ad inueniendum autem valorem ipſius Q ſequens inſeruit theorema. *Quantitas A ex duabus variabilibus t et u vtcunque compoſita, ſi differentietur poſito t conſtante, hocque differentiale denuo differentietur poſito u conſtante et t variabili, idem reſultat ac ſi inuerſo ordine A primo differentietur poſito u conſtante hocque differentiale denuo differentietur poſito t conſtante et u variabili.* Vt ſit $A = \sqrt{(t^2 + nu^2)}$, differentietur poſito t conſtante, habebitur $\frac{nudu}{\sqrt{(t^2+nu^2)}}$. Hoc denuo differentietur poſito u conſtante et prodibit $\frac{-ntudtdu}{(t^2+nu^2)^{\frac{3}{2}}}$. Iam ordine inuerſo differentietur $\sqrt{(t^2+nu^2)}$ poſito u conſtante, eritque differentiale $\frac{tdt}{\sqrt{(t^2+nu^2)}}$, quod denuo differentiatum poſito t conſtante dabit $\frac{-ntudtdu}{(t^2+nu^2)^{\frac{3}{2}}}$, id quod congruit cum prius inuento. Atque ſimilis conuenientia in quibusque aliis exemplis cernetur.

§. 7. Quamuis autem huius theorematis veritatem exercitati facile perſpiciant, demonſtrationem tamen ſequentem adiiciam ex ipſius differentiationis natura petitam. Cum A ſit functio ipſarum t et u, abeat A in B ſi loco t ponatur $t + dt$; at poſito $u + du$ loco u abeat A in C. Poſito autem ſimul $t + dt$ loco t et $u + du$ loco u mutetur A in D. Ex his perſpicuum eſt, ſi in B ſcribatur $u + du$ loco u, prouenire D; ſimilique modo ſi in C ponatur $t + dt$ loco t proditurum quoque D. His praemiſſis, ſi differentietur A poſito t conſtante prodibit C − A, nam poſito $u + du$ loco u abit A in C, dif-

differentiale autem est $C-A$. Si porro in $C-A$ ponatur $t+dt$ loco t prodibit $D-B$, quare differentiale erit $D-B-C+A$. Inuerso nunc ordine posito $t+dt$ loco t in A habebitur B, eritque differentiale ipsius A posito tantum t variabili $B-A$. Hoc differentiale posito $u+du$ loco u abit in $D-C$, quare eius differentiale erit $D-B-C+A$, id quod congruit cum differentiali priori operatione inuento. Q. E. D.

§. 8. Istud autem theorema hoc modo inseruit ad valorem ipsius Q inueniendum. Cum P et Q sint functiones ipsarum a et x, fit $dP = A\,dx + B\,da$ et $dQ = C\,dx + D\,da$, atque z cum fit $=\int P\,dx$, erit quoque functio ipsarum a et x, positum autem est $dz = P\,dx + Q\,da$. Iam secundum Theorema differentietur z posito x constante, eritque differentiale $Q\,da$ hoc porro differentiatum posito a constante dabit $C\,da\,dx$. Altera operatione differentiale ipsius z posito primo a constante est $P\,dx$, huius vero differentiale posito x constante est $B\,da\,dx$. Quare vi theorematis aequalia esse debent $C\,da\,dx$ et $B\,da\,dx$, ex quo fit $C = B$. Datur autem B ex P; differentiale enim ipsius P posito x constante diuisum per da dat B. Cum igitur sit $dQ = B\,dx + D\,da$, erit $Q = \int B\,dx$, si in hac integratione a vt constans consideretur.

§. 9. Ex his ergo habebitur $dz = P\,dx + da\int B\,dx$, existente $dP = A\,dx + B\,da$. Si igitur $B\,dx$ integrari poterit, desiderata habebitur aequatio modularis. At si integrari non potest aeque inutilis est haec aequatio ac

prima

prima $z = \int P\,dx$, vtraque enim inuoluit integrationem differentialis, in qua a vt conſtans debet conſiderari, id quod eſt contra naturam aequationis modularis, quippe in qua a aeque variabile eſſe debet ac x et z.

§. 10. Quando autem $B\,dx$ integrationem non admittit: non tamen aequatio inuenta vt inutilis omnino eſt negligenda. Nam ſi integratio ipſius $B\,dx$ pendeat a $\int P\,dx$ aequatio modularis poterit exhiberi. Si enim fuerit $\int B\,dx = \alpha \int P\,dx + K$ exiſtente K functione ipſarum a et x algebraica, erit ob $\int P\,dx = z$, $\int B\,dx = \alpha z + K$ et $dz = P\,dx + \alpha z\,da + K\,da$, quae aequatio reuera erit modularis. Quoties igitur $B\,dx$ vel reipſa poterit integrari, vel ad integrationem ipſius $P\,dx$ deduci, aequatio habebitur modularis, quae erit differentialis primi gradus. At ſi $P\,dx$ eſt integrabile, ne hoc quidem opus eſt: ſed $z = \int P\,dx$ erit ſimul aequatio modularis.

§. 11. Si autem $\int B\,dx$ neque algebraice exhiberi neque ad $\int P\,dx$ reduci poteſt, diſpiciendum eſt, num $\int B\,dx$ ad integrationem alius differentialis, in qua a non ineſt, poſſit reduci. Tale enim integrale in qua a non ineſt non turbat aequationem modularem, cum ſi libuerit per differentiationem tolli poſſit. Atque eodem iure, ſi $\int P\,dx$ reduci poterit ad aliud integrale, quod a non continet, nequidem hac ipſius Q determinatione opus eſt, ſed $z = \int P\,dx$ ſtatim dat aequationem modularem, vt ſi ſit $\int P\,dx = b \int K\,dx$ data b per a et K per x tantum, erit aequatio modularis $z = b \int K\,dx$ ſeu $dz = \frac{z\,db}{b} + K\,b\,dx$.

§. 12. Si autem haec omnia nullum inueniant locum indicio eſt, aequationem modularem primi gradus differentialem non dari. Quamobrem in altioris gradus differentialibus quaeri debebit. Ad hoc differentio denuo aequationem $dz = P\,dx + da\int B\,dx$. Pono autem $dB = E\,dx + F\,da$, quo facto erit ipſius $\int B\,dx$ differentiale $B\,dx + da\int F\,dx$. Differentiatione igitur peracta et loco $\int B\,dx$ eius valore ex eadem aequatione nempe $\frac{dz}{da} - \frac{P\,dx}{da}$ poſito, habebitur $ddz = P\,ddx + dP\,dx + \frac{dz\,dda}{da} - \frac{P\,dx\,dda}{da} + B\,da\,dx + da^2\int F\,dx$. Erit igitur $\int F\,dx = \frac{ddz}{da^2} - \frac{dz\,dda}{da^3} - \frac{P\,ddx}{da^2} - \frac{dP\,dx}{da^2} + \frac{P\,dx\,dda}{da^3} - \frac{B\,dx}{da}$. Cum autem ſit $\int B\,dx = \frac{dz}{da} - \frac{P\,dx}{da}$ et $\int P\,dx = z$, ſi $\int F\,dx$ reduci poterit ad integralia $\int B\,dx$ et $\int P\,dx$ vel ſi reipſa poterit integrari, habebitur aequatio modularis, quae erit differentialis ſecundi gradus. Vt ſi fuerit $\int F\,dx = \alpha\int B\,dx + \beta\int P\,dx + K$, datis α et β vtcunque per a et conſtantes, et K per a et x conſtantes, erit aequatio modularis haec $\frac{da\,ddz - dz\,dda - P\,da\,ddx + P\,dx\,dda - dP\,da\,dx}{da^3} - \frac{B\,dx}{da} = \frac{\alpha\,dz - \alpha P\,dx}{da} + \beta z + K$. At B et F ex dato P facile reperiuntur.

§. 13. Si $\int F\,dx$ quod autem rariſſime euenit vel non amplius in ſe contineat a, vel ad aliud poſſit reduci, in quo a non inſit, aequatio inuenta differentialis ſecundi gradus pro legitima modulari poterit haberi. Sed ſi haec omnia nondum ſuccedant, adhuc differentiatio eſt inſtituenda, in qua differentiale ipſius $\int F\,dx$ erit $F\,dx + da\int H\,dx$ poſito $dF = G\,dx + H\,da$. Quo facto videndum eſt vel an $\int H\,dx$ re ipſa poſſit exhiberi, vel an pendeat a praecedentibus $\int F\,dx$, $\int B\,dx$ et $\int P\,dx$, vel an poſſit ex ſigno ſummatorio a eliminari. Quorum ſi quod obtigerit, habebitur aequatio modularis differentialis tertii gradus; ſin vero nullum locum habuerit, continuanda eſt differentiatio ſimili modo donec ſigna ſummatoria potuerint eliminari.

§. 14. His generalibus praemiſſis ad ſpecialia accedo, caſus euoluturus, quibus functio P quodammodo determinatur. Sit igitur P functio ipſius x tantum, a prorſus non inuoluens, quam littera X deſignabo, erit ergo $dz = X\,dx$, quae quidem aequatio quia non continet a, ad vnicam videtur curuam pertinere, neque ad modularem praebendam apta eſſe. Sed cum in integratione conſtantem addere liceat, poterit eſſe $z = \int X\,dx + na$ ſeu differentiando $dz = X\,dx + n\,da$, quae eſt vera aequatio modularis. Eadem aequatio prodiiſſet, ſi iuxta regulam X differentiaſſem poſito x conſtante, vnde prodit $B = 0$ et $\int B\,dx = n$ conſtanti, orta igitur eſſet aequatio modularis $dz = X\,dx + n\,da$ cuius loco potius integralis $z = \int X\,dx + na$ vſurpatur.

§. 15. Sit nunc $P = AX$, exiſtente A functione ipſius a, et X ipſius x tantum. Cum igitur ſit $z = \int P\,dx$ erit $z = \int AX\,dx$ ſeu quia in integratione a vt conſtans debet conſiderari, $z = A\int X\,dx$. Quae aequatio ſeu eius differentialis $A\,dz - z\,dA = A^2 X\,dx$ erit aequatio modularis quaeſita. Loco A quidem cum ſit functio ipſius a tantum, poni poteſt ipſe modulus a: nam loco moduli eius functio quaecunque eodem iure pro modulo haberi poteſt.

§. 16. Sit $P = A + X$ litteris A et X eosdem vt ante retinentibus valores. Erit ergo $dz = A\,dx + X\,dx$ atque $z = Ax + \int X\,dx$, quae aequatio iam est modularis; quia modulus A non est in signo summatorio inuolutus. Si quem autem $\int X\,dx$ offendat, differentialem aequationem $dz = A\,dx + x\,dA + X\,dx$ pro modulari habere potest.

§. 17. Simili ratione modularem aequationem inuenire licet, si fuerit $P = AX + BY + CZ$ etc. vbi A, B, C sunt functiones quaecunque ipsius moduli a, et X, Y, Z functiones quaecunque ipsius x et constantium excepta a. Namque ob $dz = AX\,dx + BY\,dx + CZ\,dx$ erit $z = A\int X\,dx + B\int Y\,dx + C\int Z\,dx$, quae simul est modularis, cum modulus a nusquam post signum summatorium reperiatur.

§. 18. Sit $P = (A + X)^n$ seu $z = \int dz\,(A + X)^n$. Differentiale ipsius P posito x constante est $n(A+X)^{n-1}dA$ id quod per da diuisum dat superiorem valorem B vid. §.8. Erit igitur $dz = (A+X)^n dx + n\,dA \int (A+X)^{n-1} dx$ seu $\int dx\,(A+X)^{n-1} = \dfrac{dz - (A+X)^n dx}{n\,dA}$. Cum igitur sit $\int dx\,(A+X)^n = z$, si haec duo integralia a se inuicem pendeant, vel $\int dx\,(A+X)^{n-1}$ algebraice etiam exprimi poterit, habebitur quod quaeritur. Si neutrum contingat denuo differentiatio est instituenda. Est autem differentiale ipsius $\int dx\,(A+X)^{n-1} = dx(A+X)^{n-1}$
$$+ (n-1)\,dA \int (A+X)^{n-2} dx = \text{Diff.}\ \frac{dz - (A+X)^n dx}{n\,dA}.$$

Erit

Erit itaque $\int dx(A+X)^{n-2} = \frac{1}{(n-1)dA} \text{Diff.} \frac{dz-(A+X)^n dx}{ndA}$ $= \frac{dx(A+X)^{n-1}}{(n-1)dA}$. Quare videndum eſt an $\int dx(A+X)^{n-2}$ poſſit vel integrari vel ad priora integralia reduci.

§. 19. Si n fuerit numerus integer affirmatiuus aequatio modularis erit algebraica. Nam $(A+X)^n$ poteſt in terminos numero finitos reſolui, quorum quisque in dx ductus integrari poteſt, ita vt modulus a in ſignum ſummatorium non ingrediatur. Erit autem aequatio modularis haec $z = A^n x + \frac{n}{1} A^{n-1} \int X dx + \frac{n.n-1}{1.2} A^{n-2} \int X^2 dx$ etc. Examinandum igitur reſtat quibus caſibus ſi n non fuerit numerus integer affirmatiuus, ſupra memoratae conditiones locum habeant.

§. 20. Sit primo $X = bx^m$, vbi b etiam ab a pendere poteſt; erit ergo $z = \int (A + bx^m)^n dx$. Haec formula primo ipſa eſt integrabilis, ſi $m = \frac{1}{i}$ deſignante i numerum quemcunque affirmatiuum integrum: deinde etiam ſi $m = \frac{-1}{n+i}$. His igitur caſibus aequatio modularis fit algebraica. At ſi $m = -\frac{1}{n}$, vbi b ab a non pendere poteſt illa quidem aequatio integrationem non admittit ſed ſequens $dz = (A + bx^{\frac{-1}{n}})^n dx + ndA \int dx(A + bx^{\frac{-1}{n}})^{n-1}$ euadit integrabilis, fitque aequatio modularis differentialis primi caſus.

§. 21. Non ſolum autem, quicunque valor ipſi m tribuatur aequatio modularis differentialis primi gradus haberi poteſt, ſed etiam ſi fuerit $z = \int x^m dx(A+bx^k)^n$. Fiet enim $dz = x^m dx(A+bx^k)^n + ndA \int x^m dx(A+bx^k)^{n-1}$

Sed

Sed eſt $\int x^m dx(A+bx^k)^n = \frac{x^{m+1}(A+bx^k)^n}{m+nk+1} + \frac{nkA}{m+nk+1} \int x^m dx(A+bx^k)^{n-1}$, ſeu $\int x^m dx(A+bx^k)^{n-1} = \frac{(m+nk+1)z}{nkA} - \frac{x^{m+1}(A+bx^k)^n}{nkA}$. Conſequenter habebitur aequatio modularis haec $Akdz = (A+bx^k)^n (Akx^m dx - x^{m+1} dA) + (m+nk+1) z dA$. Simili modo modularis eſſet inuenta, ſi fuiſſet $z = B\int x^m dx (A+bx^k)^n$ alia enim non prodiiſſet differentia niſi quod loco z ſcribi debuiſſet $\frac{z}{B}$, et loco dz, $\frac{Bdz - zdB}{B^2}$ ſi quidem B ab a etiam pendeat.

§. 22. Miſſis autem huiusmodi litterae P determinationibus, quippe quae minus late patent, ad alias accedo, quae multo ſaepius vſui eſſe poſſunt. Continentur hae determinationes ea functionis cuiusdam propoſitae proprietate, qua functio eundem vbique tenet dimenſionum quantitatum variabilium numerum. Tales enim functiones peculiari modo differentiationem admittunt. Vt ſit u functio nullius dimenſionis ipſarum a et x, cuiusmodi ſunt $\frac{a}{x}$, $\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}$ aliaeque ſimiles, in quibus ipſarum a et x dimenſionum numerus in denominatore aequalis eſt numero dimenſionum numeratoris. Det autem talis functio u differentiata $Rdx + Sda$; dico fore $Rx + Sa = 0$. Nam ſi in functione u ponatur $x = ay$, omnia a ſeſe deſtruent et in ea praeter y et conſtantes nulla alia littera remanebit. Hancobrem in differentiali poſt hanc ſubſtitutionem aliud differentiale praeter dy non reperietur. Cum autem ſit $x = ay$

erit

erit $dx = ady + yda$, ideoque $du = Rady + Ryda + Sda$ Debebit ergo esse $Ry + S = o$, seu $Rx + Sa = o$.

§. 23. Sin vero fuerit u functio m dimensionum ipsarum a et x, atque $du = Rdx + Sda$, erit $\frac{u}{x^m}$ functio ipsarum a et x nullius dimensionis. Differentietur igitur $\frac{u}{x^m}$ et prodibit $\frac{xdu - mudx}{x^{m+1}}$ seu $\frac{Rxdx - mudx + Sxda.}{x^{m+1}}$ Quod cum sit differentiale functionis nullius dimensionis erit $Rx^2 - mux + Sax = o$, seu $Rx + Sa = mu$. Quare si fuerit u functio m dimensionum ipsarum a et x; atque ponatur $du = Rdx + Sda$ erit $Rx + Sa = mu$ ideoque $du = Rdx + \frac{da}{a}(mu - Rx)$ seu $adu = Radx - Rxda + muda$.

§. 24. His praemissis in $dz = Pdx$ seu $z = \int Pdx$ sit P functio n dimensionum ipsarum a et x, erit igitur z talis functio dimensionum $n + 1$. Quare si ponatur $dz = Pdx + Qda$, erit $Px + Qa = (n + 1)z$. Ex quo valor ipsius Q substitutus dabit aequationem modularem $dz = Pdx + \frac{da}{a}((n + 1)z - Px)$ seu $adz - (n + 1)zda = Padx - Pxda$. Quae tantum est differentialis primi gradus. Cum autem generaliter erat $Q = \int Bdx$, erit hoc casu $(n + 1)\int Pdx = a\int Bdx + Px$. Ex quo perspicitur hoc casu integrale $\int Bdx$ semper reduci ad $\int Pdx$.

§. 25. Eadem aequatio modularis proueniet ex consideratione solius P. Posito enim $dP = Adx + Bda$, erit $nP = Ax + Ba$. Cum autem sit $dz = Pdx + da$

$\int B\,dx$, erit $dz = P\,dx + \frac{da}{a}\int(nP\,dx - Ax\,dx)$ in qua integratione a conftans habetur. Erit igitur $\int nP\,dx =$ nz, et $\int Ax\,dx = Px - \int P\,dx$ ob $\int A\,dx = P$. Habebitur itaque $dz = P\,dx + \frac{da}{a}(n+1)z - Px)$, id quod prorfus congruit cum praecedentibus.

§. 26. Retinente P fuum valorem n dimenfionum. Sit $z = \int APX\,dx$, vbi A fit functio ipfius a et X ipfius x tantum. Erit igitur $\frac{z}{A} = \int PX\,dx$. Pofito $dP = A\,dx$ $+ B\,da$, (in quo littera A cum altera quae eft functio ipfius a tantum non eft confundenda) erit $nP = Ax +$ Ba. Ipfius PX differentiale igitur pofito x conftante erit $BX\,da$. Confequenter habebitur d. $\frac{z}{A} = PX\,dx +$ $da\int BX\,dx = PX\,dx + \frac{da}{a}\int(nPX\,dx - AXx\,dx)$. Eft vero $\int nPX\,dx = \frac{nz}{A}$ et $\int AXx\,dx = PXx - \int PX\,dx -$ $\int Px\,dX$. Quare fiet d. $\frac{z}{A} = PX\,dx - \frac{PXx\,da}{a} + \frac{(n+1)z\,da}{Aa}$ $+ \frac{da}{a}\int Px\,dX$. Nifi igitur $\int Px\,dX$ reduci poterit ad $\int PX\,dx$ vel prorfus integrari, aequatio modularis differentialis primi gradus dari nequit.

§. 27. At fi fuerit $z = R\int P\,dx$, exiftente R functione quacunque algebraica ex a, x et etiam ex z conftante, at P functione ipfarum a et x dimenfionum n, Quia eft $\frac{z}{R} = \int P\,dx$ erit d. $\frac{z}{R} = P\,dx + \frac{da}{a}(\frac{(n+1)z}{R} - Px)$ $= \frac{R\,dz - z\,dR}{R^2}$ feu $Ra\,dz - za\,dR - (n+1)Rz\,da = PR^2$ $a\,dx - PR^2x\,da$. In vniuerfum autem teneatur, quoties $z = \int P\,dx$ ad aequationem modularem reduci poffit, toties etiam $z = R\int P\,dx$ ad aequationem modularem reduci poffe. Nullum aliud enim difcrimen aderit,

rit, nisi quod in illo casu erat z, hoc casu debeat esse $\frac{z}{R}$. Quare si R fuerit vel quantitas algebraica, vel talis transcendens, vt eius differentiale posito etiam a variabili possit sine summatione exhiberi, aequatio modularis per praecepta data reperietur. Quamobrem in posterum tales casus, etiamsi latius pateant praetermittere licebit.

§. 28. Ponamus esse $z = \int(P + Q)dx$, seu $z = \int P dx + \int Q dx$ et P esse functionem ipsarum a et x dimensionum $n-1$, Q vero functionem earundem a et x dimensionum $m-1$. Cum igitur differentiale ipsius $\int P dx$ sit $\frac{P(adx - xda)}{a} + \frac{da}{a}\int nP\,dx$ et differentiale ipsius $\int Q dx$ sit $\frac{Q(adx - xda)}{a} + \frac{da}{a}\int mQ\,dx$; erit $dz = \frac{(P+Q)(adx - xda)}{a} + \frac{da}{a}(n\int P dx + m\int Q dx)$. Ponatur $\frac{adz - (P+Q)(adx - xda)}{da} = u$, eritque $u = n\int P dx + m\int Q dx$. Si igitur porro differentietur erit $du = \frac{(nP + mQ)(adx - xda)}{da} + \frac{da}{a}(n^2\int P dx + m^2 \int Q dx)$. Posito igitur $\frac{adv - (nP + mQ)(adx - xda)}{da} = t$ erit $t = n^2\int P dx + m^2 \int Q dx$. Eliminatis nunc ex his tribus aequationibus ipsarum z, u et t integralibus $\int P dx$ et $\int Q dx$, prodibit haec aequatio $mnz - (m+n)u + t = o$. Quae aequatio, si loco u et t valores assumti substituantur, erit modularis quaesita.

§. 29. Simili modo si fuerit $z = \int(P + Q + R)dx$ et P functio $n-1$, Q functio $m-1$ et R functio $k-1$ dimensionum ipsarum a et x. Ponatur $u = \frac{adz - (P+Q+R)(adx - xda)}{da}$ et $t = \frac{adu - (nP + mQ + kR)(adx - xda)}{da}$, et $s = \frac{adt - (n^2P + m^2Q + k^2R)(adx - xda)}{da}$

 Quo

Quo facto erit aequatio modularis haec: $kmnz-(km+kn+mn)u+(k+m+n)t-s=0$.

§. 30. Sit porro $z=\int(P+Q)^k dx$, vbi P sit functio n dimensionum, Q vero functio m dimensionum ipsarum a et x. Quando igitur est $dP=A\,dx+B\,da$ et $dQ=C\,dx+D\,da$, erit $nP=Ax+Ba$ et $mQ=Cx+Da$. Differentiale autem ipsius $(P+Q)^k$ posito x constante diuisum per da est $k(B+D)(P+Q)^{k-1}$. Hanc ob rem erit $dz=(P+Q)^k dx+\frac{k\,da}{a}\int(P+Q)^{k-1}(Ba+Da)dx$. Cum autem sit $Ba=nP-Ax$ et $Da=mQ-Cx$, et $A\,dx=dP$ et $C\,dx=dQ$ ob a in hac integratione constans, erit $dz=(P+Q)^k dx+\frac{da}{a}\int(P+Q)^{k-1}(nP\,dx+mQ\,dx-x\,dP-x\,dQ)$, seu $dz=\frac{(P+Q)^k(a\,dx-x\,da)}{a}+\frac{da}{a}\int(P+Q)^{k-1}((nk+1)P\,dx+(mk+1)Q\,dx)$. Ponatur $\frac{adz-(P+Q)^k(adx-xda)-zda}{k\,da}=u$ erit $u=\int(nP\,dx+mQ\,dx)(P+Q)^{k-1}$. Quare si integrale $\int(nP\,dx+mQ\,dx)(P+Q)^{k-1}$ pendet ab integrali $\int(P+Q)^k dx$ habebitur aequatio modularis differentialis gradus primi; sin minus differentiatio est continuanda. Fit autem $du=(nP\,dx+mQ\,dx)(P+Q)^{k-1}+\frac{uda}{a}-\frac{da}{a}(nP+mQ)(P+Q)^{k-1}x+\frac{da}{a}\int(kn^2P^2\,dx+(2kmn+n^2-2mn+m^2)PQ\,dx+km^2Q\,dx)\int(P+Q)^{k-2}$. Et posito $t=\frac{adu-uda-(nP+mQ)(P+Q)^{k-1}(adx-xda)}{da}$ erit $t=\int(kn^2P^2\,dx+(2kmn+n^2-2mn+m^2)PQ\,dx+km^2Q^2\,dx)(P+Q)^{k-2}$.

§. 31.

§. 31. Cum igitur habeantur tria integralia videndum est, num ea a se inuicem pendeant, hoc enim si fuerit, habebitur aequatio algebraica inter t, u et z, quae, dabit loco t et u substitutis assumtis valoribus aequationem modularem differentialem secundi gradus. Quo autem facilius in casibus particularibus perspici possit, an pendeant a se inuicem, ad alias formas eas reduci conuenit. Cum igitur sit $z = \int (P+Q)^k dx$ erit $u = mz + (n-m)\int (P+Q)^{k-1} P\,dx$ et $t = (2km + n - m)u - (km^2 - m^2 + mn)z + (n-m)^2 (k-1) \int (P+Q)^{k-2} P^2 dx$. Quaerendum itaque est an $\int (P+Q)^{k-2} P^2 dx$ reduci possit ad haec $\int (P+Q)^{k-1} P\,dx$ et $\int (P+Q)^k dx$ Vel an sit $\int (P+Q)^{k-2} P^2 dx = \alpha \int (P+Q)^{k-1} P\,dx + \beta \int (P+Q)^k dx + V$ designante V quantitatem algebraicam quamcunque per a et x datam, et α ac β sunt coefficientes ex constantissimis et a compositae.

§. 32. Fiat igitur $V = T(P+Q)^{k-1}$ huius differentiale posito a constante sit $dT(P+Q)^{k-1} + (k-1)(T\,dP + T\,dQ)(P+Q)^{k-2}$. Prodibit ergo sequens aequatio $P^2 dx = \alpha P^2 dx + \alpha PQ\,dx + \beta P^2 dx + 2\beta PQ\,dx + \beta Q^2 dx + P\,dT + Q\,dT + (k-1) T\,dP + (k-1) T\,dQ$, quae per dx diuidi poterit. At T ita debet accipi, vt termini repondentes sese destruant, sumtis ad hoc idoneis pro α et β valoribus.

§. 33. At si per $\int P\,dx$ non absolute determinetur z sed quantitas $\int Q\,dz$, data Q vtcunque per a et z, atque P per a et x; habebitur ista aequatio $Q\,dz = P\,dx$ in qua indeterminatae x et z sunt a se inuicem sepa-

ſeparatae. Modularis vero aequatio hoc modo inuenietur: Quia eſt $\int Q dz = \int P dx$ differentietur vtrumque membrum ponendo etiam a variabili ope $dP = A dx + B da$ et $dQ = C dz + D da$. Erit ergo $Q dz + da \int D dz = P dx + da \int B dx$ ſeu $Q dz = P dx + da (\int B dx - \int D dz)$. Quae aequatio, ſi $\int B dx$ et $\int D dz$ poterunt eliminari, dabit modularem quaeſitam.

§. 34. Sit P functio $^{m-1}$ dimenſionum ipſarum a et x, et Q functio $^{n-1}$ dimenſionum ipſarum a et z. His poſitis erit Diff. $\int P dx = \frac{m da \int P dx + P(a dx - x da)}{a}$, et Diff. $\int Q dz = \frac{n da \int Q dz + Q(a dz - z da)}{a}$. Ex quo eruitur iſta aequatio $(m-n)\int P dx = \frac{Q(a dz - z da)}{da} - \frac{P(a dx - x da)}{da}$ ob $\int P dx = \int Q dz$. Quare ſi fuerit $m = n$, erit $Q a dz - Q z da = P a dx - P x da$. quae eſt aequatio modularis, ſeu $\frac{da}{a} = \frac{Q dz - P dx}{Q z - P x}$.

§. 35. Sin vero m et n non ſint aequales, aequatio modularis erit differentialis ſecundi gradus. Nam cum ſit $(m-n)\int P dx = \frac{Q(a dz - z da) - P(a dx - x da)}{da}$ erit Diff. $\frac{Q(a dz - z da) - P(a dx - x da)}{da} = \frac{m(m-n) da \int P dx}{a} + \frac{(m-n) P (a dx - x da)}{a} = \frac{m Q (a dz - z da) - n P (a dx - x da)}{a}$. Quae aequatio eſt modularis quaeſita.

§. 36. Si in aequatione propoſita $dz + P dx = 0$ indeterminatae non fuerint a ſe inuicem ſeparatae, ita vt P ſit functio involuens x et z et a; debebit per quantitatem quandam R multiplicari, quo formula $R dz + PR dx$ vt differentiale integralis cuiusdam S poſſit conſiderari. Erit itaque $dS = R dz + PR dx = 0$,

ideoque

ideoque $S = \text{Const.}$ Sed ad quantitatem R inueniendam, sit $dP = A\,dx + B\,dz$ et $dR = D\,dx + E\,dz$, vbi a tantisper pro constante habemus. His positis erit $d.PR = (DP + AR)\,dx + (EP + BR)\,dz$, quocirca debet esse $D = EP + BR$. At ob $D = \frac{dR - E\,dz}{dx}$ fiet $E\,dz + EP\,dx + BR\,dx = dR$. Cum vero sit $dz + P\,dx = 0$, habebitur $dR = BR\,dx$, et $lR = \int B\,dx$. Cognita vero est B ex dato P, et quia B et z et x inuoluit, $B\,dx$ integrari debet ope aequationis $dz + P\,dx = 0$, si quidem fieri potest. Sit itaque $\int B\,dx = K$, eritque $R = e^K$ posito $le = 1$.

§. 37. Cum igitur sit $dS = e^K\,dz + e^K P\,dx = 0$, ad aequationem modularem inueniendam sit $dK = F\,dx + G\,dz + H\,da$, eritque $de^K = e^K(F\,dx + G\,dz + H\,da)$. Sumatur deinde integrale ipsius $e^K H\,dz$ posito tantum z variabili, x vero et a constantibus, quo facto erit aequatio modularis $e^K\,dz + e^K P\,dx + da\int e^K H\,dz = 0$, seu diuiso per e^K haec $dz + P\,dx + e^{-K}\,da\int e^K H\,dz = 0$. Alia aequatio modularis inuenitur, posito $dP = A\,dx + B\,dz + C\,da$, erit enim ipsius $e^K P$ differentiale posito x et z constante hoc $e^K(C\,da + PH\,da)$. Integretur $e^K\,dx(C + PH)$ posito tantum x variabili, quo facto erit aequatio modularis $dz + P\,dx + e^{-K}\,da\int e^K\,dx\,(C + PH) = 0$. Sed huiusmodi aequationes modulares nisi R possit sine aequatione proposita $dz + P\,dx = 0$ determinari, nullius fere sunt vsus.

§. 38. Consideremus igitur casus particulares, sitque in aequatione $dz + P\,dx = 0$, P functio nullius dimen-

sionis

ſionis ipſarum x et z, non computatis conſtantibus et modulo a. Formula vero $dz + Pdx$ integrabilis ſemper redditur ſi diuidatur per $z + Px$, quamobrem erit $S = \int \frac{dz + Pdx}{z + Px} =$ Conſt. Fit autem $\int \frac{dz + Pdx}{z + Px} = l(z + Px) - \int \frac{xdP}{z + Px}$. Deinde poſito $z = tx$, fiet P functio ipſius t tantum quae ſit T. Quare erit $S = l(z + Px) - \int \frac{dT}{t + T}$ quod per quadraturas poteſt exhiberi.

§. 39. Ad aequationem modularem igitur inueniendam nil aliud eſt agendum, niſi vt $\int \frac{dz + Pdx}{z + Px}$ differentietur poſito quoque modulo a variabili. Ponatur igitur $dP = Adx + Bdz + Cda$, vbi erit $Ax + Bz = o$. Differentietur nunc coefficiens ipſius dx, nempe $\frac{P}{z + Px}$ poſito tantum a variabili, erit eius differentiale $\frac{Czda}{(z + Pz)^2}$. Deinde integretur $\frac{Czdx}{(z + Px)^2}$ tantum x pro variabili habita, quo facto erit aequatio modularis quaeſita $dz + Pdx + (z + Px)da\int \frac{Czdx}{(z + Px)^2} = o$. Simili modo ex coefficiente ipſius dz qui eſt $\frac{1}{z + Px}$ prodit haec aequatio modularis $dz + Pdx - (z + Px)da\int \frac{Cxdz}{(z + Px)^2} = o$, in qua integratione z tantum pro variabili habetur. Siue etiam haec $dz + Pdx = (z + Px)da\int \frac{Ddt}{(t + T)^2}$ in qua C et T per ſolum t et a dantur.

§. 40. Praetermittere hic non poſſum, quin generalem aequationum homogenearum, vti a *Cel. Ioh. Bernoulli* vocantur, quae omnes hac aequatione $dz + Pdx = o$ continentur, reſolutionem adiiciam. Namque reperitur ex (§. 38) $l(z + Px) = \int \frac{dT}{t + T} = l(t + T) - \int \frac{dt}{t + T}$ vbi $= \frac{z}{x}$ et $T = P$. Prodibit igitur. $lx + \int \frac{dt}{t + T} = o$ ſeu adiecta

iecta constante $l\frac{c}{x} = \int \frac{dt}{t+T}$. Vt si proposita sit aequatio $n\,x\,dz + dx\,\sqrt{(x^2+z^2)} = 0$ fiet $P = \frac{\sqrt{(x^2+z^2)}}{nx}$, positoque $z = tx$, erit $T = \frac{(1+tt)}{n}$ ideoque $l\frac{c}{x} = \int \frac{n\,dt}{nt+\sqrt{(1+tt)}}$ fiat $\sqrt{(1+tt)} = t+s$ erit $t = \frac{1-ss}{2s}$ et $dt = \frac{-ds(1+ss)}{2ss}$. Quare erit $l\frac{c}{x} = \int \frac{-n\,ds(1+ss)}{(n+1)s-(n-1)s^3} = \frac{-n}{n+1}\,ls + \frac{n^2}{n^2-1}\,l((n-1)\,s^2-n-1)$.

§. 41. Quo tamen vsus calculi §. 36 in casu speciali appareat, sit aequatio proposita $dz + pz\,dx - q\,dx = 0$, in qua p et q vtcunque in a et x dantur. Quae cum illa generali $dz + P\,dx = 0$ collata dat $P = pz - q$, ex quo fiet $B = p$, et $lR = \int p\,dx$ seu $R = e^{\int p dx}$. Cum igitur $\int p\,dx$ per quadraturas possit assignari, cognitus est valor ipsius R, ideoque aequatio proposita per $e^{\int p dx}$ multiplicata fit integrabilis: erit igitur $e^{\int p dx} dz + e^{\int p dx} pz\,dx - e^{\int p dx} q\,dx = 0$ huiusque integralis $e^{\int p dx} z = \int e^{\int p dx} q\,dx$ seu $z = e^{-\int p dx} \int e^{\int p dx} q\,dx$. Differentiari itaque debet $e^{-\int p dx} \int e^{\int p dx} q\,dx$ positis et a et x variabilibus, et differentiale ipsi dz aequale poni, quo facto habebitur aequatio modularis. Positis igitur $dp = f\,dx + g\,da$ et $dq = h\,dx + i\,da$ prodibit ista aequatio modularis $dz = -e^{-\int p dx}(p\,dx + da\int g\,dx)\int e^{\int p dx} q\,dx + q\,dx + e^{-\int p dx}\,da \int e^{\int p dx}(i\,dx + q\,dx\int g\,dx)$, seu posito breuitatis gratia $\int e^{\int p dx} q\,dx = T$ erit $dz = -e^{-\int p dx}\,T p\,dx + q\,dx + e^{-\int p dx}\,da \int e^{\int p dx}\,i\,dx - e^{-\int p dx}\,da \int T g\,dx$. Ex qua operatione intelligi potest, ad aequationem modularem inueniendam id maxime esse efficiendum, vt in aequatione proposita indeterminatae a se inuicem separentur.