



1740

De summis serierum reciprocarum

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De summis serierum reciprocarum" (1740). *Euler Archive - All Works*. 41.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/41>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE
**SVMMIS SERIERVM
 RECIPROCARVM.**

AVCTORE
Leonb. Eulero.

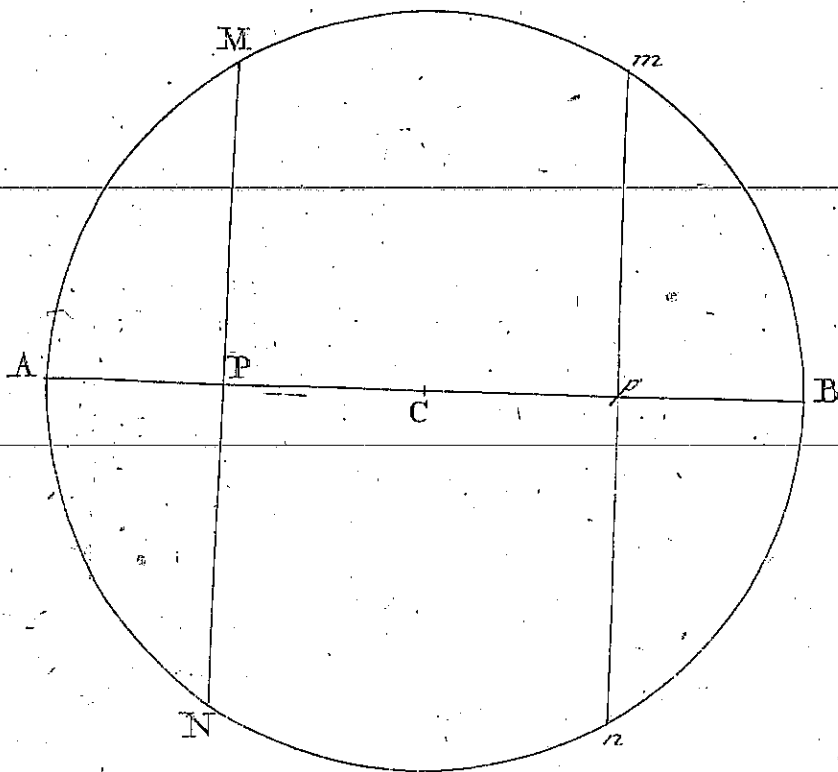
§. I.

Tantopere iam pertractatae et inuestigatae sunt series reciprocae potestatum numerorum naturalium, ut vix probabile videatur de iis noui quicquam inueniri posse. Quicumque enim de summis serierum meditati sunt, ii fere omnes quoque in summas huiusmodi serierum inquisuerunt, neque tamen vlla methode eas idoneo modo exprimere potuerunt. Ego etiam iam saepius, cum varias summandi methodos tradidissim, has series diligenter sum persecutus, neque tamen quicquam aliud sum affecutus, nisi vt earum summam vel proxime veram definiuerim vel ad quadraturas curuarum maxime transcendentium reduxerim; quorum illud in dissertatione proxime praelecta, hoc vero in praecedentibus praestiti. Loquor hic autem de seriebus fractionum, quarum numeratores sunt 1, denominatores vero vel quadrata, vel cubi, vel aliae dignitates numerorum naturalium; cuius modi sunt $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}$, item $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \text{etc.}$ atque similes superiorum potestatum, quarum termini generales continentur in hac forma $\frac{1}{x^n}$.

Tabula VII.

Q 2

§. 2.



§. 2. Deductus sum autem nuper omnino inopinato ad elegantem summae huius seriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$ expressionem, quae a circuli quadratura pendet, ita, ut si huius seriei vera summa haberetur, inde simul circuli quadratura sequeretur. Inveni enim summae huius seriei sextuplum aequale esse quadrato peripheriae circuli, cuius diameter est 1; seu posita istius seriei summa $=s$, tenebit $\sqrt{6s}$ ad 1 rationem peripheriae ad diametrum. Huius autem seriei summam nuper ostendi proxime esse 1, 6449340668482264364, ex cuius numeri sextuplo, si extrahatur radix quadrata, reipsa prodit numerus 3, 141592653589793238 exprimens circuli peripheriam, cuius diameter est 1. Iisdem porro vestigiis, quibus hanc summam sum consecutus, incedens huius seriei $1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \text{etc.}$ summam quoque a quadratura circuli pendere deprehendi. Summa nempe eius per 90 multiplicata dat biquadratum peripheriae circuli, cuius diameter est 1. Atque simili ratione etiam sequentium serierum, in quibus exponentes dignitatum sunt numeri pares, summas determinare potui.

§. 3. Quo igitur, quemadmodum haec sum adeptus, commodissime ostendam, totam rem, quo ipse usus sum, ordine exponam. In circulo AMBNA centro C radio AC vel BC $=1$ descripto contemplatus sum arcum quemcunque AM, cuius sinus est MP, cosinus vero CP. Posito nunc arcu AM $=s$, sinu PM $=y$, et cosinu CP $=x$, per methodum iam satis cognitam tam sinus y quam cosinus x ex dato arcu s per series possunt

funct definiti, est enim, vti passim videre licet $y = s - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{etc.}$ atque $x = 1 - \frac{s^2}{1 \cdot 2} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{s^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{etc.}$ Ex harum scilicet aequationum consideratione ad summas supra memoratarum serierum reciprocarum perueni; quarum aequationum quidem vtraque ad eundem fere scopum dirigitur, et hanc ob rem sufficinet alteram tantum eo, quem sum expositorus, modo tractasse.

§. 4. Aequatio ergo prior $y = s - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{etc.}$ exprimit relationem inter arcum et sinum. Quare ex ea tam ex dato arcu eius sinus, quam ex dato sinu eius arcus determinari poterit. Considero autem sinum y tanquam datum, et inuestigo, quemadmodum arcum s ex y erui oporteat. Hic vero ante omnia animaduertendum est, eidem sinui y innumerabiles arcus respondere, quos ergo innumerabiles arcus aequatio proposita praebere debebit. Si quidem in ista aequatione s tanquam incognita spectetur, ea infinitas habet dimensiones, ideoque mirum non est, si ista aequatio innumeros contineat factores simplices, quorum quisque nihilo aequalis positus, idoneum pro s valorem dare debet.

§. 5. Quemadmodum autem, si omnes factores huius aequationis cogniti essent, omnes quoque radices illius seu valores ipsius s innotescerent, ita vicissim si omnes valores ipsius s assignari poterunt, tum quoque ipsi factores omnes habebuntur. Quo autem eo melius tam de radicibus quam de factoribus iudicare queam, trans-

mutato aequationem propositam in hanc formam: $0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y} - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot y} + \text{etc.}$ Si nunc omnes radices huius aequationis seu omnes arcus, quorum idem est sinus y , fuerint A, B, C, D, E etc. tum factores quoque erunt omnes istae quantitates, $1 - \frac{s}{A}, 1 - \frac{s}{B}, 1 - \frac{s}{C}, 1 - \frac{s}{D}$ etc. Quamobrem erit $1 - \frac{s}{y} + \frac{s^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y} - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot y} + \text{etc.} = (1 - \frac{s}{A})(1 - \frac{s}{B})(1 - \frac{s}{C})(1 - \frac{s}{D})$ etc.

§. 6. Ex natura autem et resolutione aequationum constat, esse coefficientem termini, in quo inest s , seu $\frac{1}{y}$ aequalem summae omnium coefficientium ipsius s in factoribus seu $\frac{1}{y} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} + \text{etc.}$ Deinde est coefficientis ipsius s^2 , qui est $= 0$, ob hunc terminum in aequatione deficientem, aequalis aggregato factorum ex binis terminis seriei, $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$ etc. Porro erit $-\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y}$ aequale aggregato factorum ex quaternis terminis eiusdem seriei $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$ etc. Similique modo erit $0 =$ aggregato factorum ex quaternis terminis eiusdem seriei, et $+\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot y} =$ aggregato factorum ex quinis terminis istius seriei, et ita porro.

§. 7. Posito autem minimo arcu $AM = A$, cuius sinus est $PM = y$, et semiperipheria circuli $= p$, erunt $A, p - A, 2p + A, 3p - A, 4p + A, 5p - A, 6p + A$ etc. item $-p - A, -2p + A, -3p - A, -4p + A, -5p - A$, etc. omnes arcus, quorum sinus est idem y . Quam igitur ante assumpsimus seriem $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$, etc. ea transmutatur in hanc $\frac{1}{A}, \frac{1}{p - A}, \frac{1}{-p - A}, \frac{1}{2p + A}, \frac{1}{-2p - A}, \frac{1}{3p - A}, \frac{1}{4p + A}, \frac{1}{-4p - A}$ etc. Horum ergo omnium termi-

terminorum summa est $\frac{1}{y}$; summa autem factorum ex binis terminis huius seriei est aequalis 0; summa factorum ex ternis $\frac{-1}{1.2.3.y}$, summa factorum ex quaternis $\frac{+1}{1.2.3.4.5.y}$; summa factorum ex quinis $\frac{-1}{1.2.3.4.5.y}$; summa factorum ex senis $\frac{+1}{1.2.3.4.5.y}$. Atque ita porro.

§. 8. Si autem habeatur series quaecunque $a + b + c + d + e + f + \text{etc.}$ cuius summa sit α , summa factorum ex binis terminis $= \beta$; summa factorum ex ternis $= \gamma$; summa factorum ex quaternis $= \delta$, etc. erit summa quadratorum singulorum terminorum, hoc est $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.}$ $= \alpha^2 - 2\beta$; summa vero cuborum $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \text{etc.}$ $= \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma$; summa biquadratorum $= \alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 4\alpha\gamma + 2\beta^2 - 4\delta$. Quo autem clarius appareat, quomodo hae formulae progrediantur, ponamus ipsorum terminorum $a, b, c, d, \text{etc.}$ summam esse $= P$, summam quadratorum $= Q$, summam cuborum $= R$, summam biquadratorum $= S$, summam potestatum quintarum $= T$, summam sextarum $= V$ etc. His positis erit $P = \alpha$; $Q = P\alpha - 2\beta$; $R = Q\alpha - P\beta + 3\gamma$; $S = R\alpha - Q\beta + P\gamma - 4\delta$; $T = S\alpha - R\beta + Q\gamma - P\delta + 5\varepsilon$; etc.

§. 9. Cum igitur in nostro casu series $\frac{1}{\Delta}, \frac{1}{p-\Delta}, \frac{1}{p-\Delta^2}, \frac{1}{2p-\Delta^2}, \frac{1}{2p-\Delta^3}, \frac{1}{3p-\Delta^3}, \frac{1}{3p-\Delta^4}, \text{etc.}$ summa omnium terminorum seu α sit $\frac{1}{y}$; summa factorum ex binis seu $\beta = 0$, atque ulterius $\gamma = \frac{-1}{1.2.3.y}$; $\delta = 0$; $\varepsilon = \frac{+1}{1.2.3.4.5.y}$; $\zeta = 0$; etc. erit summa ipsorum illorum terminorum $P = \frac{1}{y}$; summa quadratorum illorum terminorum $Q = \frac{P}{y} = \frac{1}{y^2}$; summa

o = r -
radices
dem est
quoque
 $\frac{s}{c}, 1 - \frac{s}{d}$
y + etc.

ationum
t s, seu
is s in
nde est
minum
storum
erit -
rminis
it o =
seriei,
rminis

cuius
erunt
y + A
+ A,
m y.
c. ea
+ A,
num
rmi-

summa cuborum illorum terminorum $R = \frac{Q}{y} - \frac{1}{1.2.y}$; summa biquadratorum $S = \frac{R}{y} - \frac{P}{1.2.3.y}$. Atque porro $T = \frac{S}{y} - \frac{Q}{1.2.3.y} + \frac{1}{1.2.3.4.y}$; $V = \frac{T}{y} - \frac{R}{1.2.3.y} + \frac{P}{1.2.3.4.5.y}$; $W = \frac{V}{y} - \frac{S}{1.2.3.y} + \frac{Q}{1.2.3.4.5.y} - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.y}$. Ex qua lege facile reliquarum altiorum potestatum summae determinantur.

§. 10. Ponamus nunc sinum $PM = y$ aequalem radio, ut sit $y = 1$, erit minimus arcus A cuius sinus est x quarta peripheriae pars, $= \frac{1}{2}p$, seu denotante q quartam peripheriae partem erit $A = q$ et $p = 2q$. Superior ergo series abibit in istam $\frac{1}{q}, \frac{1}{q}, \frac{1}{3q}, -\frac{1}{5q}, \frac{1}{7q}, +\frac{1}{9q}, -\frac{1}{11q}, +\frac{1}{13q}, +\frac{1}{15q}, +\frac{1}{17q}$, etc. binis terminis existentibus aequalibus. Horum ergo terminorum summa, quae est $\frac{x}{q}$ ($1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ etc.) aequalis est ipsi $P = 1$. Hinc igitur oritur $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ etc. $= \frac{q}{2} = \frac{p}{4}$. Huius ergo seriei quadruplum aequatur semiperipheriae circuli, cuius radius est 1 , seu toti peripheriae circuli, cuius diameter est 1 . Atque haec est ipsa series a *Leibnitio* iam pridem prolata, qua circuli quadraturam definiuit. Ex quo magnum huius methodi, si cui forte ea non satis certa videatur, firmamentum elucet; ita ut de reliquis, quae ex hac methodo deriuabantur, omnino non liceat dubitari.

§. 11. Sumamus nunc inuentorum terminorum pro calu quo $y = 1$, quadrata, prodibitque haec series $+\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{9q^2} + \frac{1}{9q^2} + \frac{1}{25q^2} + \frac{1}{25q^2} +$ etc. cuius summa est $\frac{1}{q^2} (\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} +$ etc.), quae ergo aequalis esse debet ipsi $Q = P = 1$. Ex quo sequitur huius seriei $1 + \frac{1}{3} +$
+

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \text{etc.}$ summam esse $= q^2 = \frac{p^2}{8}$; denotante p
 totam circuli peripheriam, cuius diameter est $= 1$. Sum-
 ma autem huius seriei $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \text{etc.}$ pendet a sum-
 ma seriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}$ quia haec quarta
 sui parte minuta illam dat. Est ergo summa huius
 seriei aequalis summae illius cum sui triente. Quam-
 obrem erit $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.} = \frac{p^2}{6}$, ideo-
 que huius seriei summa per 6 multiplicata aequalis est
 quadrato peripheriae circuli cuius diameter est 1; quae
 est ipsa propositio cuius initio mentionem feci.

§. 12. Cum igitur casu quo $y = 1$, sit $P = 1$ et
 $Q = 1$, erunt reliquarum litterarum R, S, T, V etc.
 ut sequitur: $R = \frac{1}{2}$; $S = \frac{1}{3}$; $T = \frac{1}{2^2}$; $V = \frac{1}{3^2}$; $W = \frac{67}{720}$;
 $X = \frac{17}{32}$ etc. Cum autem summa cuborum ipsi $R = \frac{1}{2}$
 sit aequalis, erit $\frac{1}{q^3} (1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \text{etc.}) = \frac{1}{2}$.
 Quare erit $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \text{etc.} = \frac{q^3}{4} = \frac{p^3}{8}$. Huius
 ideo seriei summa per 32 multiplicata dat cubum pe-
 ripheriae circuli cuius diameter est 1. Simili modo sum-
 ma biquadratorum, quae est $\frac{1}{p^4} (1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} +$
 $\text{etc.})$ aequalis esse debet $\frac{1}{8}$, ideoque erit $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} +$
 $\frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.} = \frac{q^4}{6} = \frac{p^4}{36}$. Est vero haec series per $\frac{1}{15}$
 multiplicata aequalis huic $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \text{etc.}$
 quare ista series aequalis est $\frac{p^4}{55}$; seu seriei $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4}$
 $+ \frac{1}{4^4} + \text{etc.}$ summa per 90 multiplicata dat biquadra-
 tum peripheriae circuli cuius diameter est 1.

§. 13. Simili modo inuenientur summae superio-
 rum potestatum; prodibit autem ut sequitur $1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5}$
 $- \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \text{etc.} = \frac{59^5}{4^8} = \frac{5^5 p^5}{15^5 3^6}$; atque $1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6}$
 $+ \text{etc.}$

Tom. VII.

R

+ etc

$+ \text{etc.} = \frac{q^6}{15} = \frac{p^6}{900}$. Inuenta vero huius seriei summa, cognoscetur simul summa huius seriei $1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.}$ quae erit $= \frac{p^6}{945}$. Porro pro potestatibus septimis erit $1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \text{etc.} = \frac{6197}{1440} = \frac{61 p^7}{184320}$ ac pro octavis $1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{etc.} = \frac{179^8}{630} = \frac{17 p^8}{167280}$; vnde deducitur $1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} + \text{etc.} = \frac{p^8}{9450}$. Observandum autem est de his seriebus in potentiis exponentium imparium signa terminorum alternari, pro potestatibus paribus vero esse aequalia; hocque in causa est, quod huius generalis seriei $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.}$ iis tantum casibus summa possit exhiberi, quibus n est numerus par. Praeterea quoque notandum est, si seriei $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{24}, \frac{1}{15}, \frac{61}{720}, \frac{17}{515}$ etc. quos valores pro literis P, Q, R, S etc. inuenimus, terminus generalis posset assignari, tum eo ipso quadraturam circuli exhibitum iri.

§. 14. In his possumus sinum PM aequalem radio, videamus ergo quales series prodeant, si ipsi y alii valores tribuantur. Sit igitur $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, cui sinui minimus arcus respondens est $\frac{1}{2}p$. Posito ergo $A = \frac{1}{2}p$ erit series terminorum simplicium seu primae potestatis ista $\frac{4}{p} + \frac{4}{3p} - \frac{4}{5p} - \frac{4}{7p} + \frac{4}{9p} + \frac{4}{11p} - \text{etc.}$ cuius seriei summa P aequalis est $\frac{1}{y} = \sqrt{2}$. Habebitur ergo $\frac{p}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{etc.}$ quae series tantum ratione signorum a *Leibnitiana* differt, et a *Newtono* iam dudum est prolata. Summa vero quadratorum illorum terminorum nempe $\frac{16}{p^2}$ ($1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.}$) aequalis est ipsi $Q = 2$. Erit ergo

ergo $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{27} + \frac{1}{243} + \dots$ etc. $= \frac{p^2}{8}$, vti ante est inuen-
tum.

§. 3. Si fiat $y = \frac{1}{2}$ erit minimus arcus huic finui
respondens 60° , ideoque $A = \frac{1}{3}p$. Hoc ergo casu se-
quens prodibit series terminorum $\frac{3}{p} + \frac{3}{2p} - \frac{3}{4p} - \frac{3}{8p} + \frac{3}{16p}$
 $+ \frac{3}{32p}$ etc. quorum terminorum summa aequalis est ipsi
 $\frac{2}{y} = \frac{2}{\frac{1}{2}}$. Habebitur ergo $\frac{2p}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$
 $- \frac{1}{128} + \dots$ Summa vero quadratorum illorum termi-
norum est $= \frac{1}{y^2} = \frac{4}{9}$; vnde sequitur fore $\frac{4p^2}{27} = 1 + \frac{1}{4} +$
 $\frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \dots$ etc. in qua serie desunt termini ter-
nario constantes. Pendet autem haec series quoque ab
ista $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$ etc. cuius summa erat inuenta $= \frac{p^2}{8}$;
nam si haec series sui parte nona minuatur prodit ipsa
superior series, cuius ideo summa debet esse $= \frac{p^2}{8} (1 - \frac{1}{9})$
 $= \frac{4p^2}{27}$. Simili modo si alii assumantur finus, aliae prod-
dibunt series, tam simplicium, quam terminorum qua-
dratorum altiorumque potestatum, quarum summae qua-
draturam circuli inuoluent.

§. 16. At si ponatur $y = 0$, huiusmodi series non
amplius assignari poterunt, propter y in denominatorem
positum, seu aequationem initialem per y diuisam. Alio
autem modo series inde deduci poterunt, quae cum sint
ipsae series $1 + \frac{x}{2^n} + \frac{x}{3^n} + \frac{x}{4^n} + \dots$ etc. si n est numerus
par: quemadmodum harum serierum summae sint inue-
niendae, seorsum ex hoc casu quo $y = 0$ deducam. Po-
sito vero $y = 0$ ipsa aequatio fundamentalis abit in hanc
 $0 = s - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$ etc. cuius aequatio-
nis radices dant omnes arcus, quorum sinus est $= 0$.

Est autem vna minimaque radix $s = 0$, quare aequatio per s diuisa exhibebit reliquos arcus omnes, quorum finus est $= 0$, qui arcus proinde erunt radices huius aequationis $0 = 1 - \frac{s^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{etc.}$ Ipsi vero arcus quorum finus est $= 0$ sunt $p, -p, +2p, -2p, 3p, -3p$ etc. quorum binorum alter alterius est negatiuus, id quod quoque ipsa aequatio propter dimensiones ipsius s tantum pares indicat. Quare diuifores illius aequationis erunt $1 - \frac{s}{p}, 1 + \frac{s}{p}, 1 - \frac{s}{2p}, 1 + \frac{s}{2p}$, etc. atque coniungendis binis horum diuiforum erit $1 - \frac{s^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{etc.} = (1 - \frac{s^2}{p^2})(1 - \frac{s^2}{4p^2})(1 - \frac{s^2}{9p^2})(1 - \frac{s^2}{16p^2})$ etc.

§. 17. Manifestum iam est ex natura aequationum, fore coefficientem ipsius ss seu $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ aequalem $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{4p^2} + \frac{1}{9p^2} + \frac{1}{16p^2} + \text{etc.}$ Summa vero factorum ex binis terminis huius seriei erit $= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$; summaque factorum ex ternis $= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$ etc. Hanc ob rem erit iuxta §. 8. $\alpha = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; $\beta = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$; $\gamma = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$; etc. atque posita quoque summa terminorum $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{4p^2} + \frac{1}{9p^2} + \frac{1}{16p^2} + \text{etc.} = P$, et summa quadratorum eorundem terminorum $= Q$; summa cuborum $= R$; summa biquadratorum $= S$; etc. erit per §. 8. $P = \alpha = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$; $Q = Pa - 2\beta = \frac{1}{36}$; $R = Q\alpha - P\beta + 3\gamma = \frac{1}{540}$; $S = R\alpha - Q\beta + P\gamma - 4\delta = \frac{1}{58320}$; $T = S\alpha - R\beta + Q\gamma - P\delta + 5\varepsilon = \frac{1}{583200}$; $V = T\alpha - S\beta + R\gamma - Q\delta + P\varepsilon - 6\zeta = \frac{691}{5832000}$ etc.

§. 18. Ex his ergo deriuantur summae sequentes:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \text{ etc.} = \frac{p^2}{6} = P$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} \text{ etc.} = \frac{p^4}{90} = Q$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} \text{ etc.} = \frac{p^6}{945} = R$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} \text{ etc.} = \frac{p^8}{9450} = S$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} \text{ etc.} = \frac{p^{10}}{93555} = T$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} \text{ etc.} = \frac{691p^{12}}{6425 \cdot 93555} = V.$$

quae series ex data lege attamen multo labore ad al-
tiores potestates produci possunt. Diuidendis autem sin-
gulis seriebus per praecedentes orientur sequentes aequa-
tiones: $p^2 = 6P = \frac{15Q}{P} = \frac{21R}{2Q} = \frac{10S}{R} = \frac{90T}{10S} = \frac{6825V}{691T}$ etc. qui-
bus expressionibus singulis quadratum peripheriae cuius
diameter est 1, aequatur.

§. 19. Cum autem harum serierum summae etiam si
vero proxime facile exhiberi possent, tamen non mul-
tum adiumenti afferre queant ad peripheriam circuli ve-
ro proxime exprimendam propter radicem quadratam,
quae extrahi deberet; ex prioribus seriebus eliciemus
expressiones, quae ipsi peripheriae p sint aequales. Pro-
dibit autem vt sequitur:

$$R = 3$$

$$p = 4$$

uatio
m si-
s ae-
Ipsi
2 p,
gati-
ones
s ae-
itque
 $\frac{s^4}{16p^2}$

um,
 $\frac{1}{4p^2}$
binis
rum
uxta
tque
 $\frac{1}{16p^2}$
mi-
dra-
Q =
Q =
E =
 $\frac{1}{93555}$

18.

134 DE SYMMIS SERIERVM RECIPROCARVM.

$$p=4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.} \right)$$

$$p=2 \left(\frac{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}} \right)$$

$$p=4 \left(\frac{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.}} \right)$$

$$p=3 \left(\frac{1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \text{etc.}} \right)$$

$$p=\frac{16}{5} \left(\frac{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \text{etc.}} \right)$$

$$p=\frac{25}{8} \left(\frac{1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} + \frac{1}{11^5} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \text{etc.}} \right)$$

$$p=\frac{192}{61} \left(\frac{1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \frac{1}{11^7} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \text{etc.}} \right)$$