1738

# Constructio aequationis differentialis $ax^n\,dx = dy + y^2\,dx$

Leonhard Euler

eſt ſubſidium, eo redit meo iudicio, vt $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, et $\delta$, ex $a$, $b$, $c$, et $d$ debeant determinari, non vero viciſſim; hoc enim caſu aequatio ad multo altiorem eueheretur poteſtatem, quam opus eſt. Aliis autem, quos huiusmodi occupationes iuuant, hanc rem perficiendam, vel mihi ad aliud tempus, relinquo; hoc ſolo nunc contentus, me fortaſſe ideoneam atque genuinam viam oſtendiſſe.

# CONSTRVCTIO AEQVATIONIS
## DIFFERENTIALIS $a x^n dx = dy + y^2 dx$.

AVCTORE

*Leonh. Eulero.*

§. 1.

Communicaui nuper cum Societate ſpecimen conſtructionis aequationis cuiusdam differentialis, in qua non ſolum indeterminatas a ſe inuicem ſeparare non potueram, ſed etiam monſtraueram ex ipſa conſtructione huiusmodi ſeparationem omnino non poſſe exhiberi. Differt quidem meus ibi datus conſtruendi modus ab vſitatis: attamen iis nequaquam illum eſſe poſtponendum quilibet intelliget, qui hanc ſchedam inſpexerit. Neque vero tum temporis hanc methodum vlterius extendere, atque ad alias aequationes accommodare licuit, quia ex poſita conſtructione ad aequationem demum perueneram, non autem viciſſim data aequatione conſtructionem eruere potueram. At deinceps cum hanc rem

rem diligentius contemplatus essem, voti mei compos quodammodo sum factus, ita vt hanc methodum inuertere, atque propositae aequationis constructionem inuenire potuerim.

§. 2. Selegi igitur statim ad periculum faciendum hanc maxime agitatam aequationem $ax^n dx = dy + y^2 dx$, quam Clar. *Comes Riccati* primum Geometris examinandam proposuit, nemo vero eius constructionem, nisi pro certis litterae $n$ valoribus, dedit. Meae vero methodi beneficio omnes difficultates feliciter superaui, atque vniuersalem huius aequationis constructionem inueni, in qua nihil omnino desiderari queat. Non solum autem vnicam haec methodus suppeditat constructionem, sed plures, immo etiam innumerabiles. Merito igitur mihi videor isti methodo tantam praestantiam adscribere, vt ad omnes aequationes differentiales construendas, in quibus aliae methodi frustra sunt adhibitae, viam sit commonstratura.

§. 3. Quemadmodum in superiore Dissertatione arcu Elliptico sum vsus, ad constructionem huius aequationis $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{x dx}{x^2 - 1}$, ita pro aequatione proposita alia opus erit curua, loco Ellipsis substituenda. Quam vt inueniam pono vniuersalissime eius elementum $= PRdz$, in quo P et R sunt functiones ipsius $z$ tales, quae iisdem factis operationibus, vt supra in elemento elliptico, deducant ad aequationem propositam. Pono porro, vt series quaedam in considerationem veniat, $R = 1 + AgQ + ABg^2Q^2 + ABCg^3Q^3 + ABCDg^4Q^4 + \text{etc.}$

in

in qua ſerie eſt Q functio quaedam ipſius $z$, $g$ linea data ſeu quaſi parameter curuae, A, B, C, D, etc. coefficientes conſtantes. Ponatur $\mathrm{PR}\,dz = dZ$; erit ergo $Z = \int \mathrm{P}\,dz + \mathrm{A}g\int \mathrm{PQ}\,dz + \mathrm{AB}g^2 \int \mathrm{PQ}^2\,dz + \mathrm{ABC}\,g^3 \int \mathrm{PQ}^3\,dz +$ etc.

§. 4. Ita autem P et Q a ſe inuicem pendeant, vt omnia haec integralia poſſint ad $\int \mathrm{P}\,dz$ reduci. Sit ergo $\int \mathrm{PQ}\,dz = \alpha \int \mathrm{P}\,dz + \mathrm{O}\,1$; $\int \mathrm{PQ}^2\,dz = \alpha\beta \int \mathrm{P}\,dz + \mathrm{O}\,2$; $\int \mathrm{PQ}^3\,dz = \alpha\beta\gamma \int \mathrm{P}\,dz + \mathrm{O}\,3$; etc. Denotant hic O 1, O 2, O 3 etc. quantitates algebraicas. Poſt peractam hoc modo integrationem ponatur $z = h$: eſt autem $h$ talis quantitas, quae loco $z$ ſubſtituta faciat omnes eas quantitates algebraicas O 1, O 2, O 3, etc. euaneſcere, atque tum fiat $\int \mathrm{P}\,dz = \mathrm{H}$ quantitati prorſus conſtanti. Ex his igitur, facto poſt integrationem $z = h$, erit $Z = \mathrm{H}(1 + \mathrm{A}\alpha g + \mathrm{AB}\alpha\beta g^2 + \mathrm{ABC}\alpha\beta\gamma g^3 +$ etc.) Facta iam parametro $g$ variabili obtinebuntur infiniti valores ipſius Z pro infinitis ipſius $g$, atque ex dato elemento $\mathrm{PR}\,dz$ poterit conſtrui curua, in qua, ſi abſciſſae deſignentur littera $g$, applicatae ſunt $= Z$.

§. 5. Hoc itaque modo poterit conſtrui ſumma ſeriei $1 + \mathrm{A}\alpha g + \mathrm{AB}\alpha\beta g^2 + \mathrm{ABC}\alpha\beta\gamma g^3 +$ etc. quamuis forte ex ſui ipſius conſideratione ſumma prorſus non poſſit determinari. Vtor autem ad ſummam huius ſeriei inueſtigandam methodo mea ſummae ſerierum inuentionem ad reſolutionem aequationum reducendi, quam anno praeterito expoſui, vt nanciſcar aequationem, cuius reſolutio a ſeriei illius ſumma pendeat. Perſpicuum

 enim

enim est, vtcunque haec aequatio resultans fuerit perplexa, eius tamen constructionem in promtu futuram. Nunc igitur nihil aliud est faciendum, nisi vt quantitates A, B, C, etc. et $\alpha, \beta, \gamma,$ etc. efficiantur eiusmodi, vt summae seriei istius inuentio ad resolutionem huius aequationis $ax^n dx = dy + y^2 dx$ deducatur. Hoc vero loco id est efficiendum vt series $1 + AgQ + ABg^2Q^2 + ABCg^3Q^3 +$ etc. possit in summam redigi, quia alias valor ipsius R non esset cognitus, et proinde integra constructio inutilis. Quamobrem non licebit loco A, B, C etc. valores quosuis pro arbitrio accipere, sed tales, quae hanc seriem summabilem reddant.

§. 6. Quo igitur appareat, cuiusmodi esse debeat series $1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 + ABC\alpha\beta\gamma g^3 +$ etc. vt eius summatio perducatur ad resolutionem aequationis $ax^n dx = dy + y^2 dx$; hanc ipsam aequationem in seriem resoluo. Quod vt commodius effici possit, pono $y = \frac{dt}{t\,dx}$, sumtoque $dx$ constante erit $ax^n dx = \frac{ddt}{t\,dx}$ seu $ax^n t\,dx^2 = ddt$. Nunc more consueto substituo loco $t$ hanc seriem $1 + \mathfrak{A}x^{n+2} + \mathfrak{B}x^{2n+4} + \mathfrak{C}x^{3n+6} +$ etc. erit $ddt = (n+1)(n+2)\mathfrak{A}x^n dx^2 + (2n+3)(2n+4)\mathfrak{B}x^{2n+2} dx^2 + (3n+5)(3n+6)\mathfrak{C}x^{3n+4} dx^2 +$ etc. Huic igitur seriei aequalis esse debet $ax^n t\,dx^2$, seu ista series $ax^n dx^2 + \mathfrak{A}ax^{2n+2} dx^2 + \mathfrak{B} b x^{3n+4} dx^2 +$ etc.; propterea aequales facio terminos homogeneos determinandis litteris $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ etc. pro arbitrio assumtis, fietque $\mathfrak{A} = \frac{a}{(n+1)(n+2)}$, $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}a}{(2n+3)(2n+4)}$

$\mathfrak{C} =$

$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}\alpha}{(3n+5)(3n+6)}$ etc. Ponatur $a x^{n+2} = f$ breuitatis gratia, erit $t = 1 + \frac{f}{(n+1)(n+2)} + \frac{f^2}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)} + \frac{f^3}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)(3n+5)(3n+6)} +$ etc. Huius ergo seriei summatio pendet a constructione aequationis propositae $a x^n dx = dy + y^2 dx$. Quamobrem si series $1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 +$ etc. in eam possit transmutari, habebitur simul constructio aequationis propositae.

§. 7. Sed quo haec series, quippe quae nimis est generalis, aliquanto magis restringatur, et determinatio litterarum arbitrariarum facilior efficiatur, pono in formula $PR\,dz$ initio assumta $P = \frac{1}{(1+bz^\mu)^\nu}$, et $Q = \frac{z^\mu}{1+bz^\mu}$. Erit ergo $\int P\,dz = \int \frac{dz}{(1+bz^\mu)^\nu}$, $\int PQ\,dz = \int \frac{z^\mu dz}{(1+bz^\mu)^{\nu+1}}$, et $\int PQ^2\,dz = \int \frac{z^{2\mu} dz}{(1+bz^\mu)^{\nu+2}}$ etc. Possunt autem haec omnia integralia ad primum $\int \frac{dz}{(1+bz^\mu)^\nu}$ reduci: est enim generaliter $\int \frac{z^{\theta\mu} dz}{(1+bz^\mu)^{\nu+\theta}} = \frac{(\theta-1)\mu+1}{b\mu(\nu+\theta-1)} \int \frac{z^{(\theta-1)\mu} dz}{(1+bz^\mu)^{\nu+\theta-1}} - \frac{1}{b\mu(\nu+\theta-1)} \cdot \frac{z}{(1+bz^\mu)^{\nu+\theta-1}}$. Hanc ob rem erit $\int \frac{z^\mu dz}{(1+bz^\mu)^{\nu+1}} = \frac{1}{b\mu\nu} \int \frac{dz}{(1+bz^\mu)^\nu} - \frac{1 \cdot z}{b\mu\nu(1+bz^\mu)^\nu}$, et $\int \frac{z^{2\mu} dz}{(1+bz^\mu)^{\nu+2}} = \frac{1(\mu+1)}{b^2\mu^2\nu(\nu+1)}$

 $\int dz$

$$\int \frac{dz}{(1+bz^{\mu})^{\nu}} - \frac{(\mu+1)z}{b^2\mu^2\nu(\nu+1)(1+bz^{\mu})^{\nu}} - \frac{1 \cdot z^{\mu+1}}{b\mu(\nu+1)(1+bz^{\mu})^{\nu+1}}$$

etc. Debebit ergo $b$ eiusmodi esse quantitas, vt loco $z$ substituta faciat $\frac{z^{\mu\theta+1}}{(1+bz^{\mu})^{\nu+\theta}} = 0$. Non vero poterit esse $b=0$, quia tum plerumque simul quantitas $\int \frac{dz}{(1+bz^{\mu})^{\nu}}$ euanesceret. Comparatis iam his reductionibus cum supra assumtis, determinantur litterae $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc. Erit scilicet $\alpha = \frac{1}{b\mu\nu}$, $\beta = \frac{\mu+1}{b\mu(\nu+1)}$, $\gamma = \frac{2\mu+1}{b\mu(\nu+2)}$ etc.

§. 8. Definitis hoc modo litteris $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ etc. considero alteras A, B, C etc. quarum quamlibet video huiusmodi formam $\frac{1}{\sigma\tau}$, scilicet vnitatem diuisam per factum ex duobus factoribus, habere oportere. Quo autem simul series $1 + AgQ + ABg^2Q^2 + ABCg^3Q^3$ + etc. possit summari, facio $A = \frac{1}{\pi(\pi+\rho)}$, $B = \frac{1}{(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)}$, $C = \frac{1}{(\pi+4\rho)(\pi+5\rho)}$ etc. atque tum series ope methodi meae vniuersalis series summandi poterit summari. Pono primo breuitatis gratia $gQ = q^2$, erit $R = 1 + \frac{q^2}{\pi(\pi+\rho)} + \frac{q^4}{\pi(\pi+\rho)(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)} +$ etc., facioque $R-1=S$ erit $S = \frac{q^2}{\pi(\pi+\rho)} + \frac{q^4}{\pi(\pi+\rho)(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)} +$ etc. Multiplico nunc vbique per $\rho q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}}$ sumoque differentialia, erit $\frac{\rho d . q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} S)}{dq}$

$$= \frac{q^{\frac{\pi}{\rho}}}{\pi} + \frac{q^{\frac{\pi+2\rho}{\rho}}}{\pi(\pi+\rho)(\pi+2\rho)} + \text{etc.}$$

Iam per $\rho$ multiplico sumoque denuo differentialia ponendo $dq$ constante, prodibit

$$\frac{\rho^2 dd(q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} S)}{dq^2} = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} + \frac{q^{\frac{\pi+\rho}{\rho}}}{\pi(\pi+\rho)} + \text{etc.}$$

etc. $= q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} + q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}}\left(\frac{q^2}{\pi(\pi+\rho)} + \frac{q^4}{\pi(\pi+\rho)(\pi+\rho)(\pi+3\rho)} + \text{etc.}\right)$ Habebimus ergo restituto S loco seriei $\frac{q^2}{\pi(\pi+\rho)} +$ etc. hanc aequationem $\rho^2 dd(q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} S) = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq^2 + q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} S dq^2$. Pono porro breuitatis gratia $q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} S = T$, erit $\rho^2 ddT = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq^2 + T dq^2$.

§. 9. Ad hanc aequationem integrandam pono $T = rs$, erit $ddT = rdds + 2drds + sddr$, quibus substitutis habetur $\rho^2 rdds + 2\rho drds + \rho^2 sddr = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq^2 + rsdq^2$ quae in duas aequationes discerpatur, $\rho^2 rdds = rsdq^2$, et $2\rho^2 drds + \rho^2 sddr = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq^2$. Harum prior per $r$ diuisa abit in hanc $\rho^2 dds = sdq^2$, quae per $ds$ multiplicata dat hanc $\rho^2 ds\, dds = s\, ds\, dq^2$, cuius integralis est $\rho^2 ds^2 = s^2 dq^2$, siue haec $\rho ds = s dq$, quae denuo integrata dat $\rho ls = q$ atque $s = c^{\frac{q}{\rho}}$ denotante $c$ numerum, cuius logarithmus est 1. Inuento itaque $s$ assumo alteram aequationem $2\rho^2 drds + \rho^2 sddr = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq^2$, quae substituto loco $s$ valore inuento $c^{\frac{q}{\rho}}$ abit in istam $2\rho c^{\frac{q}{\rho}} dq\, dr + \rho^2 c^{\frac{q}{\rho}} ddr = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq^2$. Ponatur $dr = v dq$, erit $ddr = dv\, dq$ atque aequatio mutabitur in hanc simpliciter differentialem $2\rho c^{\frac{q}{\rho}} v dq + \rho^2 c^{\frac{q}{\rho}} dv = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$, quam multiplico per $c^{\frac{q}{\rho}}$, vt prodeat $2\rho c^{\frac{2q}{\rho}} v dq + \rho^2 c^{\frac{2q}{\rho}} dv = c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$, cuius integralis est $\rho^2 c^{\frac{2q}{\rho}} v = \int c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$. Fit igitur $v = \frac{1}{\rho^2} c^{\frac{-2q}{\rho}} \int c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$, et $\int v\, dq$,

$dq$, seu $r = \frac{1}{\rho^2}\int c^{\frac{-2q}{\rho}} dq \int c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$. Erit ergo $rs = T$. $\frac{1}{\rho^2} c^{\frac{q}{\rho}} \int c^{\frac{-2q}{\rho}} dq \int c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$, et $S = \frac{1}{\rho^2} c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\rho-\pi}{\rho}} \int c^{\frac{-2q}{\rho}} dq \int c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$.

§. 10. Quoniam in hac forma inuenta duplex inuoluitur integratio, notandum eſt eas ita inſtitui debere vt tam S quam $\frac{dS}{dq}$ fiant $= o$, poſito $q = o$, quemadmodum ex ſerie, cui S eſt aequale, apparet. His obſeruatis habetur tandem $R = 1 + \frac{1}{\rho^2} c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\rho-\pi}{\rho}} \int c^{\frac{-2q}{\rho}} dq \int c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$. Eſt vero $q = \sqrt{gQ}$, atque ob $Q = \frac{z^\mu}{1 + bz^\mu}$, erit $q = \sqrt{\frac{gz^\mu}{1 + bz^\mu}}$. Dabitur igitur ex his $\int PR\,dz$ ſeu $\int \frac{R\,dz}{(1+bz^\mu)^\nu}$ Quare ſi litteris $\pi$, $\varrho$, $\mu$ et $\nu$ tribuantur debiti valores in $n$, in promtu erit aequationis propoſitae $ax^n dx = dy + y^2 dx$ conſtructio.

§. 11. Hoc facto reuertor ad propoſitum, atque reſumo ſeriem $1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 +$ etc. quae poſitis loco $A, \alpha, B, \beta, C, \gamma$, etc. electis valoribus transmutatur in hanc $1 + \frac{g}{b\mu\nu\pi(\pi+\rho)} + \frac{(\mu+1)g^2}{b^2\mu^2\nu(\gamma+1)\pi(\pi+\rho)(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)}$ etc. cuius haec eſt lex, vt terminus indicis $\theta + 1$ diuiſus per terminum indicis $\theta$ ſit $= \frac{g(1+(\theta-1)\mu)}{b\mu(\nu+\theta-1)(\pi+(2\theta-2)\rho)(\pi+(2\theta-1)\rho)}$. In ſerie vero quam §. 6. ex aequatione propoſita elicuimus, eſt ſimilis quotus termini indicis $\theta + 1$ per terminum indicis $\theta$ diuiſi $= \frac{f}{(\theta n + 2\theta - 1)(\theta n + 2\theta)}$. Quo igitur hae duae ſeries congruant, oportet vt hi duo quoti ſint inter ſe aequales. Fiat ergo primo $\frac{g}{b} = f$ ſeu $g = bf$, hoc poſito debebit eſſe $\frac{1}{(\theta n + 2\theta - 1)(\theta n + 2\theta)} = \frac{\theta\mu - \mu + 1}{(\mu\nu + \mu\theta - \mu)(\pi + 2\theta\rho - 2\rho)(\pi + 2\theta\rho - \rho)}$. Vnde ſi aequatio ſecundum dimenſiones ipſius $\theta$ ordinetur, et coefficientes cuiusque ipſius $\theta$ potentiae ponantur $= o$,

deterprodibunt quatuor aequationes ex quibus $\mu$, $\nu$, $\pi$, et $\varrho$ determinabuntur in $n$. Neque vero vnica datur solutio, sed sunt quatuor diuersae quae ad nostrum institutum pertinent. Prima dat $\mu = \frac{2n+4}{3n+4}$, $\nu = 1$, $\pi = n + 1$, et $\varrho = \frac{n+2}{2}$. Secunda dat $\mu = \frac{2n+4}{n}$, $\nu = 1$, $\pi = \frac{n}{2}$, et $\varrho = \frac{n+2}{2}$. Tertia dat $\mu = 2$, $\nu = \frac{n+1}{n+2}$, $\pi = \frac{n+2}{2}$ et $\varrho = \frac{n+2}{2}$. Quarta dat $\mu = \frac{1}{3}$, $\nu = \frac{n+1}{n+2}$, $\pi = (n+2)\sqrt{2}$ et $\varrho = \frac{n+2}{\sqrt{2}}$.

§. 12, Quatuor harum solutionum non vnaquaeque pro lubitu potest adhiberi; sed pro variis casibus exponentis $n$ alia atque alia eligi debet. Quae diiudicatio deducenda est ex ista conditione §. 7 memorata, quod $\frac{z^{\mu\theta+1}}{(1+bz^{\mu})^{\nu+\theta}}$ euanescere debeat facto $z = h$. Fit hoc quidem si $z = o$, sed cum praeter hunc alius requiratur, facile apparet, id non euenire posse, nisi ponatur $h = \infty$. In quolibet igitur casu ipsius $n$ talis eligenda est solutio, vt $\frac{z^{\mu\theta+1}}{(1+bz^{\mu})^{\nu+\theta}}$ fiat $= o$ posito $z = \infty$. Denotat hic autem $\theta$ numerum quemcunque integrum affirmatiuum non excepta cyphra, quamobrem et $\nu$ nunquam esse poterit numerus negatiuus, quia alioquin binomium $1 + z^{\mu}$ in numeratorem veniret. At $\mu$ tam affirmatiuum quam negatiuum numerum significare potest, ex quo duplex existit huius rei consideratio, prout fuerit $\mu$ vel affirmatiuus numerus vel negatiuus. Sit primo $\mu$ numerus affirmatiuus $= + \lambda$, perspicuum est quo $\frac{z^{\lambda\theta+1}}{(1+bz^{\lambda})^{\nu+\theta}}$ fiat $= o$, posito $z = \infty$, oportere maximum ipsius $z$ exponentem in denominatore, qui est $\lambda$

$\nu + \lambda\theta$

$\nu + \lambda\theta$ maiorem esse eiusdem $z$ exponente in numeratore, qui est $\lambda\theta + 1$ Erit igitur $\lambda\nu > 1$. Sin autem fuerit $\mu$ numerus negatiuus seu $= -\lambda$, fiet $\frac{z^{-\lambda\theta+1}}{(1 + bz^{-\lambda})^{\nu+\theta}}$ $= \frac{z^{\lambda\nu+1}}{(z^{\lambda} + b)^{\nu+\theta}}$, quae quantitas vt fiat $= 0$ posito $z = \infty$ debebit esse $\lambda\nu + \lambda\theta > \lambda\nu + 1$, seu $\lambda\theta > 1$, idquod in casu $\theta = 0$ fieri nequit. Quocirca $\mu$ nunquam esse poterit numerus negatiuus. In prima igitur solutione, quia est $\nu = 1$, quoties fuerit $\lambda$ i. e. $\frac{2n+4}{3n+4}$ numerus positiuus, toties simul esse debebit numerus vnitate maior, excipiuntur igitur ii casus quibus $\frac{2n+4}{3n+4}$ est 1 vel vnitate minor. Nisi ergo $n$ contineatur intra hos limites $0$ et $-\frac{4}{3}$ prima solutio adhiberi nequit. In secunda solutione, quia iterum est $\nu = 1$, similiter excipiuntur casus, quibus $\lambda$ seu $\frac{2n+4}{n}$ est vnitas seu vnitate minor. Semper igitur haec solutio locum habebit, his tantum exceptis casibus, quando $n$ continetur intra hos limites $-4$ et $0$. Pro tertia solutione, quia $\mu$ iam est numerus positiuus nempe $= 2$ debebit tantum $\frac{2n+2}{n+2}$ esse numerus vnitate maior. Hac igitur semper vti poterimus nisi $n$ contineatur intra hos limites $-2$ et $0$; quoties ergo secunda locum habet, toties et tertia poterit vsurpari. In quarta denique solutione quia $\mu$ quoque est numerus affirmatiuus, scilicet $\frac{1}{3}$, requiritur vt $\frac{n+1}{3n+6}$ sit numerus vnitate maior, id quod accidit, quoties $n$ continetur intra hos limites $-2$ et $-\frac{5}{2}$. In his igitur casibus quarta solutione vti conueniet. Ex quibus inuicem comparatis perspicitur, semper hoc modo aequationis propositae con-

constructionem exhiberi posse, nisi $n$ contineatur intra hos angustos limites $-\frac{4}{3}$ et $-2$.

§. 13. Quo autem totum hoc negotium euidentius percipiatur, accommodabo, quae hactenus tradita sunt, ad casum particularem, quo est $n=2$, vt itaque construenda sit haec aequatio $ax^2 dx = dy + y^2 dx$. Pro hoc casu eligo solutionem tertiam, eritque propterea $\mu = 2$, $\nu = \frac{3}{4}$, $\pi = \varrho = 2$. His valoribus substitutis habebitur $S = \frac{1}{4} c^{\frac{q}{2}} \int c^{-q} dq \int c^{\frac{q}{2}} dq$. Est vero $\int c^{\frac{q}{2}} dq = 2 c^{\frac{q}{2}} + i$, ergo $\int c^{-q} dq \int c^{\frac{q}{2}} dq = \int 2 c^{\frac{-q}{2}} dq + i \int c^{-q} dq = -c^{\frac{-q}{2}} - i c^{-q} + k$. Consequenter prodit $S = \frac{k}{4} c^{\frac{q}{2}} - \frac{i}{4} c^{\frac{-q}{2}} - \frac{1}{4}$. Quia iam posito $q = o$ debet euanescere $s$, habebitur ista aequatio $\frac{k}{4} - \frac{i}{4} - \frac{1}{4} = o$, seu $k = 1 + i$. Porro cum $\frac{dS}{dq}$ debeat esse $= o$ si $q = o$, proueniet $i + k = o$. Namque est $dS = \frac{k}{8} c^{\frac{q}{2}} dq + \frac{i}{8} c^{\frac{-q}{2}} dq$, et idcirco facto $q = o$, fit $\frac{dS}{dq} = \frac{k}{8} + \frac{i}{8} = o$. Ex his igitur conditionibus inuenitur $i = -\frac{1}{2}$, et $k = \frac{1}{2}$: quamobrem erit $S = \frac{c^{\frac{q}{2}} + c^{\frac{-q}{2}}}{8} - \frac{1}{4}$, atque $R = \frac{3}{4} + \frac{c^{\frac{q}{2}} + c^{\frac{-q}{2}}}{8}$. Quoniam vero est $\mu = 2$ et $g = bf$, erit $q = \surd \frac{bfz^2}{1+bz^2}$, adeoque $R = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} c^{\frac{1}{2}\surd \frac{bfz^2}{1+bz^2}} + \frac{1}{8} c^{-\frac{1}{2}\surd \frac{bfz^2}{1+bz^2}}$. Consequenter reperitur $\int PR\, dz = \frac{3}{4} \int \frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{3}{4}}} + \frac{1}{8} \int \frac{dz \left(c^{\frac{1}{2}\surd \frac{bfz^2}{1+bz^2}} + c^{-\frac{1}{2}\surd \frac{bfz^2}{1+bz^2}}\right)}{(1+bz^2)^{\frac{3}{4}}}$

Quod integrale ita capiatur, vt posito $z=0$ ipsum fiat $=0$, quo facto ponatur $z=\infty$, et prodibit quantitas, quae vt functio ipsius $f$ potest spectari. Fiat deinde $f$ variabilis, eiusque loco ponatur $ax^4$, erit ista functio per H diuisa $=t$ (vid. §. 6.). Atque inuento hoc $t$ erit $y=\frac{dt}{t\,dx}$, qui est verus valor ipsius $y$ ex aequatione proposita $ax^2dx=dy+y^2dx$.

§. 14. Non difficilior euadit constructio aequationis generalis $ax^n dx=dy+y^2dx$, dummodo $n$ non contineatur intra hos limites $0$ et $-2$. Vti enim poterimus solutione tertia, in qua fit $\mu=2$, $\nu=\frac{n+1}{n+2}$, $\pi=\varrho=\frac{n+2}{2}$. Erit igitur $S=\frac{1}{\rho^2}c^{\frac{q}{\rho}}\int c^{\frac{-2q}{\rho}}dq\int c^{\frac{q}{\rho}}dq$. Integratione simili quo supra modo instituta, reperitur $S=\frac{k}{\rho^2}c^{\frac{q}{\rho}}-\frac{i}{\rho^2}c^{\frac{-q}{\rho}}-\frac{1}{\rho^2}$, vbi $i$ et $k$ ex his aequationibus debent definiri $k=1+i$, et $k+i=0$, est ergo vt ante $i=-\frac{1}{2}$ et $k=\frac{1}{2}$. Quapropter est $S=\frac{1}{2\rho^2}c^{\frac{q}{\rho}}+\frac{1}{2\rho^2}c^{\frac{-q}{\rho}}-\frac{1}{\rho^2}$ atque $R=1-\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{2\rho^2}c^{\frac{q}{\rho}}+\frac{1}{2\rho^2}c^{\frac{-q}{\rho}}$ vel posito loco $\varrho$ valore $\frac{n+2}{2}$ habebitur $R=\frac{n(n+4)+2c^{\frac{2q}{n+2}}+2c^{\frac{-2q}{n+2}}}{(n+2)^2}$.

Est vero vt ante $q=\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}$, at $P\,dz=\frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}}$.

Quamobrem erit $\int PR\,dz=\frac{1}{(n+2)^2}\int\frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}}$ $(n(n+4)+2c^{\frac{2q}{n+2}}+2c^{\frac{-2q}{n+2}})$ vbi loco $\sqrt{\frac{bf^2}{1+bz^2}}$ relinquo

quo $q$. Integrale huius $PR\,dz$ ita capiatur, vt posito $z=0$, ipsum euanescat, quo facto ponatur $z=\infty$, denotetque H id quod prouenit, si tantum $\int\frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}}$ hoc modo integretur vt fiat $=0$ posito $z=0$, et postmodum ponatur $z=\infty$. Tum ergo erit integrale ipsius $PR\,dz$ praescripto modo acceptum, quod posuimus Z §. 4. functio ipsius $f$. Aequale id autem erat positum quantitati H, in hanc seriem $1+A\alpha g+AB\alpha\beta g^2$ + etc. multiplicatae, quae series in sequentem est transmutata $1+\frac{f}{(n+1)(n+2)}+\frac{f^2}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)}+$ etc. cuius summa est $t$, vid. §. 6. vbi $f$ designat $ax^{n+2}$. Erit ergo $Z=Ht$, inquo H est quantitas constans, quia in ea non inest $f$, adeoque nec $x$. Prouenit itaque $t=\frac{Z}{H}$, at est $y=\frac{dt}{t\,dx}$: ergo pro aequatione proposita $ax^n dx = dy+y^2\,dx$ prodibit $y=\frac{dZ}{Z\,dx}$. Ad illam igitur aequationem construendam habemus hanc regulam: Integretur haec formula $\frac{1}{(n+2)^2}\;\frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}}\,(n(n+4)+$ $2c^{\frac{2}{n+2}}\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}+2c^{\frac{-2}{n+2}}\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}})$ ita vt euanescat facto $z=0$. Tum ponatur $z$ infinitum, et loco $f$ substituatur $ax^{n+2}$. Id quod prouenit sit Z, quo cognito erit $y=\frac{dZ}{Z\,dx}$. Si quem offendat, quod post integrationem debeat fieri $z=\infty$, is loco $z$ substituat $\frac{u}{1-u}$ et post integrationem ponatur $u=1$, quo facto pro Z idem prodibit valor, qui ante. Quamuis autem analytica pro Z expressio obtineri non potest, quando formula illa non eſt integrabilis tamen, per quadraturas vel rectificationes valor ipſius Z conſtrui poterit.

§. 15. Quanquam autem in hac conſtructione ii caſus excluduntur, in quibus $n$ continetur intra limites $-2$ et $o$, nihilo tamen minus haec ſolutio pro vniuerſali eſt habenda. Nam quia, ſi aequatio poteſt reſolui in caſu $n=m$, reſolutio quoque habetur in caſu $n=-m-4$, vt conſtat, ex iis, quae de caſibus ſeparabilibus ſunt detecta; perſpicuum eſt, ſi $m$ ſit numerus intra limites $o$ et $-2$ contentus, fore $-m-4$ intra terminos $-2$ et $-4$ comprehenſum, adeoque in ſolutione noſtra contineri. Quamobrem ſi occurrat caſus, quo $n$ contineatur intra $o$ et $-2$, hic ſtatim reducatur ad alium per dictum theorema, qui intra $-2$ et $-4$ contineatur, huiusque conſtructio erit in promptu.

§. 16. In formula differentiali §. 13. eruta obſeruo, quoties habuerit $\frac{n+1}{n+2}$ huiusmodi formam $k+\frac{1}{2}$, vbi $k$ numerum integrum affirmatiuum denotat, integram formulam poſſe integrari, et hanc ob rem valorem ipſius Z re ipſa exhiberi. His igitur in caſibus valor ipſius $y$ quoque poterit definiri et aequatio integrari. Fiet tum autem $n=\frac{-4k}{2K-1}$, quoties ergo $n$ talem habuerit formam, aequatio $ax^n dx=dy+y^2 dx$ integrationem admittet. Deinde quia caſus, ſi $n=\frac{-m}{m+1}$ vel $n=-m=4$ reduci poteſt ad caſum $n=m$, integrabilis etiam erit aequatio ſi $n=\frac{-4k}{2k+1}$ vel $\frac{-4k-4}{2k+1}$ denotante $k$ numerum integrum affirmatiuum. Atque

hi

hi ſunt illi ipſi caſus integrabiles vel ſeparabiles, ab aliis iam eruti, vbi videre licet in noſtris Commentariis A. 1726.

§. 17. Eſſe autem aequationem integrabilem, quoties ſit $\frac{n+1}{n+2} = k + \frac{1}{2}$ hoc modo oſtendo. Pono $\frac{bz^2}{1+bz^2} = u^2$; erit $z = \frac{u}{\sqrt{b(1-u^2)}}$ $1 + bz^2 = \frac{1}{1-u^2}$ ideoque $dz = \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{b}}$ Fiet igitur $\frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}} = \frac{du}{\sqrt{b}}(1-u^2)^{k-1}$. Hanc ob rem formula §. 14 integranda trans formabitur in hanc $\frac{1}{(n+2)^2\sqrt{b}}(n(n+4)du(1-u^2)^{k-1} + 2c^{\frac{2u\sqrt{f}}{n+2}}du(1-u^2)^{k-1} + 2c^{\frac{-2u\sqrt{f}}{n+2}}du(1-u^2)^{k-1})$, quae vt facile perſpicitur re ipſa integrari poteſt, quoties $k$ fuerit numerus integer affirmatiuus. Atque hinc non parum praeſtantiae accedere arbitro huic meae methodo, quad tam ſit facilis et perſpicua, vt caſus etiam omnes qui reipſa integrationem vel ſeparationem admittunt, vno obtutu oſtendat.

§. 18. Exempli gratia aſſumo $k = 1$, erit $n = -4$, qui caſus, vti conſtat, eſt facillimus eorum, qui ſeparationem admittunt. Formula igitur integranda abibit in hanc $\frac{1}{2\sqrt{b}}(c^{-u\sqrt{f}}du - c^{u\sqrt{f}}du)$, cuius integralis eſt $\frac{1}{2\sqrt{bf}}(c^{u\sqrt{f}} - c^{-u\sqrt{f}})$. Conſtantem non adiicio quia poſito $z = o$, ſeu quod eodem recidit $u = o$, totum integrale iam euaneſcit. Fiat nunc $z = \infty$ ſeu in noſtro caſu $u = 1$ et ponatur $ax^{-2}$ loco $f$ habebitur $Z = \frac{x}{2\sqrt{ab}}(c^{\frac{\sqrt{a}}{x}} - c^{\frac{-\sqrt{a}}{x}})$. Hoc inuento, erit vt iam eſt oſtenſum $y$

$= \frac{dZ}{Zdx}$. Differentiato igitur $Z$ et differentiali per $Zdx$ diuiſo prodibit $y = \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{a}}{x^2}\left(\frac{c^{\frac{2\sqrt{a}}{x}} + 1}{c^{\frac{2\sqrt{a}}{x}} - 1}\right)$ ſiue $\frac{2\sqrt{a}}{x} = l\frac{xxy - x - \sqrt{a}}{xxy - x + \sqrt{a}}$, quae aequatio eſt integralis huius differentialis $a x^{-4} dx = dy + y^2 dx$. Atque ſimili modo pro reliquis caſibus, qui ſeparationem admittunt, aequationes integrales inueniuntur.

CLAS-