1738

De formis radicum aequationum cuiusque ordinis coniectatio

Leonhard Euler

$$= \frac{\frac{1}{n} - \left(\frac{a+fl}{n-lln}\right)z}{Q^2} + \frac{\frac{1}{n} - \left(\frac{b+gl}{n-lln}\right)z}{R^2} + \frac{\frac{1}{n} - \left(\frac{c+hl}{n-lln}\right)z}{S^2} + \text{etc.}$$

Q. E. I.

Atque haec sunt quibus methodum meam iam anno 1719. in Actis Eruditorum pag. 351. expositam breuiter illustrare, et occasione inuentorum Cel. *Moyvrei* paullulum extendere, visum est. Superuacaneum iudico ostendere quomodo superiores formulae in formas *Cotesii* sint transfundendae, cum hoc sit negotium ad purum calculum algebraicum spectans à quolibet Analysta facile expediendum.

DE FORMIS RADICVM AEQVATIONVM CVIVSQVE ORDINIS CONIECTATIO.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Svmmopere admirandum videtur, quod, cum ipsis rei analyticae initiis radices aequationum cubicarum et biquadraticarum essent inuentae, his tamen temporibus, quibus analysis maxima augmenta accepit, modus adhuc lateat altiorum aequationum radices eruendi: praesertim, cum haec res continuo a praestantissimis ingeniis maximo studio sit inuestigata. Quo studio, quanquam quaesito parum est satisfactum: egregia tamen ad quasque aequationes tractandas subsidia sunt detecta. Quamobrem

obrem neminem puto fore, qui hoc meum institutum, quo, quas formas habeant aequationum radices, et qua via eae forte inueniri possint, ostendo, etiamsi plus non praestiterim, sit reprehensurus. Alios enim fortasse magis iuuare, atque tandem ad intentum scopum perducere, poterit.

§. 2. Cum aequatio cuiusque potestatis omnes inferiores in se comprehendat, facile perspicitur, methodum quoque radicem ex quaque aequatione extrahendi ita esse comparatam, vt omnium inferiorum aequationum methodos inuoluat. Quamobrem inuentio radicis ex aequatione sex dimensionum haberi non potest, nisi eadem antea constet de aequationibus quinti, quarti, et tertii gradus. Ita videmus *Bombellii* methodum, ex aequationibus biquadraticis radices extrahendi, perducere ad resolutionem aequationis cubicae; atque cubicae aequationis radicem definiri non posse sine quadraticae aequationis resolutione.

§. 3. Resolutionem aequationis cubicae sequenti modo a quadratica pendentem considero. Sit aequatio cubica $x^3 = ax + b$, in qua secundus terminus deest, huius radicem x dico fore $= \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$; existentibus A et B duabus radicibus aequationis cuiusdam quadraticae $z^2 = \alpha z - \mathfrak{E}$. Quamobrem ex natura aequationum erit $A + B = \alpha$ et $AB = \mathfrak{E}$. Sed ad α et $\mathfrak{E}$ ex a et b definiendas sumo aequationem $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$, quae cubice multiplicata dat $x^3 = A + B + 3\sqrt[3]{BA}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = 3x\sqrt[3]{AB} + A + B$. Quae cum proposita

$x^3 = ax + b$ comparata dabit $a = 3\sqrt[3]{AB} = 3\sqrt[3]{\mathfrak{C}}$, et $b = A + B = \alpha$. Fiet igitur $\alpha = b$ et $\mathfrak{C} = \frac{a^3}{27}$; quocirca aequatio quadratica resolutioni aequationis $x^3 = ax + b$ dicto modo inseruiens erit $z^2 = bz - \frac{a^3}{27}$. Huius enim radicibus cognitis A et B, erit $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$.

§. 4. Sed cum radix cubica ex quaque quantitate triplicem habeat valorem, haec formula $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ omnes etiam radices aequationis propositae complectetur. Sint enim μ et ν praeter vnitatem radices cubicae ex vnitate, erit etiam $x = \mu\sqrt[3]{A} + \nu\sqrt[3]{B}$, si modo sit $\mu\nu = 1$. Quamobrem μ et ν esse debebunt $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, vel inuerse. Praeter radicem igitur $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ satisfacient quoque propositae hae duae alterae radices $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} - \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B}$, et $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B}$. Hacque ratione aequationis cubicae etiam, in qua secundus terminus non deest, radices determinari poterunt.

§. 5. Aequationes biquadraticae variis modis ad cubicas reduci solent, quorum autem nullus instituto meo vtilitatem afferre potest. Sed mihi est peculiaris methodus idem efficiendi, atque priori, qua cubicae ad quadraticas reducuntur, similis, ita vt exinde quodammodo concludi possit, quomodo aequationes altiorum graduum debeant tractari. Vt si proposita sit haec aequatio

$x^4 =$

$x^4 = ax^2 + bx + c$ in qua itidem ſecundus terminus deeſt; dico fore $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ at A, B et C eſſe tres radices ex aequatione quadam cubica $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$. Hanc ob rem erit $\alpha = A + B + C$, $\beta = AB + AC + BC$ et $\gamma = ABC$. Quo autem α, β et γ determinentur, aequatio $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ ab irrationalitate liberetur, hoc modo: Sumantur quadrata erit $x^2 = A + B + C + 2\sqrt{AB} + 2\sqrt{AC} + 2\sqrt{BC}$ hincque $x^2 - \alpha = 2\sqrt{AB} + 2\sqrt{AC}$ $2\sqrt{BC}$. Sumendis denuo quadratis fit $x^4 - 2\alpha x^2 + \alpha^2 = 4AB + 4AC + 4BC + 8\sqrt{ABC}(\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}) = 4\beta + 8x\sqrt{\gamma}$, ſeu $x^4 = 2\alpha x^2 + 8x\sqrt{\gamma} + 4\beta - \alpha^2$. Haec aequatio comparata cum propoſita $x^4 = ax^2 + bx + c$ dabit $2\alpha = a$, $8\sqrt{\gamma} = b$ et $4\beta - \alpha^2 = c$; ex quibus prodit $\alpha = \frac{a}{2}$, $\gamma = \frac{b^2}{64}$; $\beta = \frac{c}{4} + \frac{a^2}{16}$. Aequatio ergo cubica reſolutioni aequationis biquadraticae inſeruiens eſt $z^3 = \frac{a}{2}z^2 - \frac{4c - a^2}{16}z + \frac{b^2}{64}$. Huius enim radices, ſi ſint A, B, et C, erit $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$. At reliquae tres radices ex aequatione propoſita erunt $\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}$, $\sqrt{B} - \sqrt{A} - \sqrt{C}$ et $\sqrt{C} - \sqrt{A} - \sqrt{B}$.

§. 6. Ponatur $z = \sqrt{t}$ erit $(t + \frac{4c + a^2}{16})\sqrt{t} = \frac{at}{2} + \frac{b^2}{64}$, et ſumendis quadratis habebitur $t^3 + \frac{4c + a^2}{8}t^2 + \frac{(4c + a^2)^2}{256}t = \frac{a^2 t^2}{4} + \frac{ab^2 t}{64} + \frac{b^4}{4096}$ ſeu $t^3 = (\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2})t^2 + (\frac{ab^2}{64} - \frac{cc}{16} - \frac{a^2 c}{32} - \frac{a^4}{256})t + \frac{b^4}{4096}$ Haec aequatio ergo hanc habet proprietatem, vt eius radices ſint radices quadratae radicum prioris aequationis, A, B et C. Quare ſi huius aequationis radices ponantur E, F, G, erit $x = \sqrt[4]{E} + \sqrt[4]{F} + \sqrt[4]{G}$. Datur itaque aequatio cubica cuius radi-

 cum

cum radices biquadraticae ſimul ſumtae conſtituant radicem aequationis biquadraticae propoſitae. Atque haec methodus inueniendi radices ex aequatione biquadratica, etiamſi ſit priori operoſior, maiorem habet affinitatem cum reſolutione aequationum cubicarum, cum eiusdem poteſtatis radix extrahatur ex radicibus aequationis inferioris, cuius eſt ipſa aequatio propoſita.

§. 7. Simili ratione etiam aequatio quadratica $x^2 = a$, in qua ſecundus terminus deeſt, reſoluetur ope aequationis vnius dimenſionis $z = a$. Huius enim radix eſt a, atque radix aequationis propoſitae $x = \sqrt{a}$, vel $x = -\sqrt{a}$. Huiusmodi autem aequationem ordine inferiorem, cuius ope aequatio ſuperior ſecundo termino carens reſoluitur, vocabo *aequationem reſoluentem*. Ita aequationis quadraticae $x^2 = a$ aequatio reſoluens erit $z = a$; aequationis cubicae $x^3 = ax + b$, aequatio reſoluens erit $z^2 = bz - \frac{a^3}{27}$. Atque aequationis biquadraticae $x^4 = ax^2 + bx + c$ aequatio reſoluens eſt $z^3 = (\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2})z^2 - (\frac{a^4}{256} + \frac{a^2c}{32} + \frac{c^2}{16} - \frac{ab^2}{64})z + \frac{b^4}{4096}$. Pro quadratica enim aequatione, ſi aequationis reſoluentis radix ſit A, erit $x = \sqrt{A}$. Pro cubica vero aequatione, ſi reſoluentis radices ſint A et B, erit $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$. Atque pro biquadratica aequatione, exiſtentibus reſoluentis aequationis radicibus A, B et C, erit $x = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B} + \sqrt[4]{C}$.

§. 8. Ex his etiamſi tribus tantum caſibus tamen non ſine ſufficienti ratione mihi concludere videor, ſuperiorum

riorum quoque aequationum dari huiusmodi aequationes resoluentes. Sic proposita aequatione $x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ coniicio dari aequationem ordinis quarti $z^4 = \alpha z^3 - \beta z^2 + \gamma z - \delta$, cuius radices, si sint A, B, C et D, fore $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} + \sqrt[5]{C} + \sqrt[5]{D}$. Et generatim aequationis $x^n = ax^{n-2} + bx^{n-3} + cx^{n-4} +$ etc. aequatio resoluens, prout suspicor, erit huius formae, $z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3} + \gamma z^{n-4} -$ etc. cuius cognitis radicibus omnibus numero $n-1$, quae sint, A, B, C, D, etc. erit $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} +$ etc. Haec igitur coniectura, si esset veritati consentanea, atque si aequationes resoluentes possent determinari, cuiusque aequationis in promtu foret radices assignare; perpetuo enim peruenitur ad aequationem ordine inferiorem, hocque modo progrediendo tandem vera aequationis proposita radix innotescet.

§. 9. Quanquam autem, si aequatio proposita plures quam quatuor habet dimensiones, aequationem resoluentem definire adhuc non possum: tamen praesto sunt non nullius momenti argumenta, quibus ista mea coniectura confirmatur. Si enim aequatio proposita ita est comparata, vt in aequatione resoluente omnes termini praeter tres primos euanescant; tum semper ipsa aequatio resoluens poterit exhiberi, atque ideo aequationis propositae radices assignari. Aequationes autem, quae hoc modo resolutionem admittunt, sunt eae ipsae, quas Cl. *Abr. de Moivre* in Transact. n. 309. pertractauit, Sit enim aequatio resoluens $z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3}$ seu $z^2 =$

 $\alpha z - \beta$,

ex hacque aequationem resoluendam erui oporteat. Sint huius aequationis radices A et B, reliquae enim radices omnes euanescunt, erit aequationis resoluendae radix $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$. Est vero $\alpha = A + B$ et $\mathfrak{E} = AB$ ex natura aequationum. Hinc ergo erit $\sqrt[n]{A^2} + \sqrt[n]{B^2} = x^2 - 2\sqrt[n]{\mathfrak{E}}$. atque porro

$$\sqrt[n]{A^3} + \sqrt[n]{B^3} = x^3 - 3x\sqrt[n]{\mathfrak{E}}$$
$$\sqrt[n]{A^4} + \sqrt[n]{B^4} = x^4 - 4x^2\sqrt[n]{\mathfrak{E}} + 2\sqrt[n]{\mathfrak{E}^2}$$
$$\sqrt[n]{A^5} + \sqrt[n]{B^5} = x^5 - 5x^3\sqrt[n]{\mathfrak{E}} + 5x\sqrt[n]{\mathfrak{E}^2}$$

atque tandem

$$\sqrt[n]{A^n} + \sqrt[n]{B^n} = x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\mathfrak{E}} + \frac{n(n-3)}{1.2}x^{n-4}\sqrt[n]{\mathfrak{E}^2} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}x^{n-6}\sqrt[n]{\mathfrak{E}^3} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}x^{n-8}\sqrt[n]{\mathfrak{E}^4} - \text{etc.} = \alpha.$$

Quae est aequatio resoluenda, cuius resoluens est $z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \mathfrak{E}z^{n-3}$, seu $z^2 = \alpha z - \mathfrak{E}$.

§. 10. Non solum autem hoc modo aequationis $x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\mathfrak{E}} + \frac{n(n-3)}{1.2}x^{n-4}\sqrt[n]{\mathfrak{E}^2} - \text{etc.} = \alpha$ vnica radix inuenitur $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$; sed satisfacit etiam quaelibet alia $x = \mu\sqrt[n]{A} + \nu\sqrt[n]{B}$, modo fit $\mu^n = \nu^n = \mu\nu = 1$, id quod n diuersis modis fieri potest. Vt si sit $n = 5$, aequationis $x^5 - 5x^3\sqrt[5]{\mathfrak{E}} + 5x\sqrt[5]{\mathfrak{E}^2} = \alpha$ radices quinque erunt vt sequuntur:

I.

I. $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B}$

II. $x = \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} - \frac{1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$

III. $x = \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} - \frac{1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$

IV. $x = \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} - \frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$

V. $x = \frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} - \frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$.

Hi enim coefficientes omnes ſunt radices ſurſolidae ex vnitate, et factum ex binis coniunctis eſt $= 1$. Simili modo praeter ipſam vnitatem ſunt ſex radices poteſtatis ſeptimae ex vnitate, harumque tria paria multiplicatione vnitatem producentia, quae ſunt ſex radices huius aequationis $y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0$. Ad has autem inueniendas tantum opus eſt reſolutione aequationis cubicae; omnis enim aequatio poteſtatis ſextae huius formae $y^6 + ay^5 + by^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$, quae non mutatur poſito $\frac{1}{y}$ loco y, reſolui poteſt ope aequationis cubicae. Quod quemadmodum fiat, cum ad inueniendas radices ſaepe vtilitatem habere poſſit, breui ſum oſtenſurus.

§. 11 Aequationes huiusmodi, quae poſito $\frac{1}{y}$ loco y formam non mutant, voco *reciprocas*. Hae ſi maximus ipſius y dimenſionum numerus eſt impar, ſemper diuidi poſſunt per $y + 1$; et aequatio reſultans etiam erit reciproca, in qua maxima ipſius y dimenſio erit par. Quamobrem ſufficiet parium tantum dimenſionum aequationes reciprocas conſideraſſe, atque modum earum reſoluendarum expoſuiſſe. Sit igitur primo aequatio pro-

proposita quartae potestatis haec $y^4+ay^3+by^2+ay+1=0$, ponatur haec factum ex duabus quadraticis $y^2+\alpha y+1=0$ et $y^2+\beta y+1=0$. Quo facto fiet $\alpha+\beta=a$ et $\alpha\beta+2=b$, seu $\alpha\beta=b-2$. Quare α et β erunt duae radices huius aequationis $u^2-au+b-2=0$, hacque ratione quatuor aequationis propositae radices ope aequationum tantum quadraticarum innotescent. Aequatio reciproca sextae potestatis $y^6+ay^5+by^4+cy^3+by^2+ay+1=0$, ponatur factum trium harum quadraticarum $y^2+\alpha y+1=0$, $y^2+\beta y+1=0$, et $y^2+\gamma y+1=0$. Hinc fiet $\alpha+\beta+\gamma=a$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=b-3$, et $\alpha\beta\gamma=c-2\alpha-2\beta-2\gamma=c-2a$. Quare α, β, et γ erunt tres radices huius aequationis cubicae $u^3-au^2+(b-3)u-c+2a=0$. Similiter aequatio reciproca octauae potestatis $y^8+ay^7+by^6+cy^5+dy^4+cy^3+by^2+ay+1=0$, est factum ex quatuor aequationibus quadraticis $y^2+\alpha y+1=0$, $y^2+\beta y+1=0$, $y^2+\gamma y+1=0$, et $y^2+\delta y+1=0$, ex quo prodibit $\alpha+\beta+\gamma+\delta=a$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=b-4$, $\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=c-3a$, et $\alpha\beta\gamma\delta=d-2b+2$. Coefficientes ergo $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ sunt quatuor radices huius aequationis $u^4-au^3+(b-4)u^2-(c-3a)u+d-2b+2=0$. Aequatio ordinis decimi $y^{10}+ay^9+by^8+cy^7+dy^6+ey^5+dy^4+cy^3+by^2+ay+1=0$ factum erit harum quinque $y^2+\alpha y+1=0$, $y^2+\beta y+1=0$, $y^2+\gamma y+1=0$, $y^2+\delta y+1=0$, $y^2+\varepsilon y+1=0$, in quibus $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ sunt quinque radices huius aequationis $u^5-au^4+(b-5)u^3-(c-4a)u^2+(d-3b+5)u-e+2c-2a=0$.

Atque

Atque generatim aequatio reciproca $y^{2n} + ay^{2n-1} + by^{2n-2} + cy^{2n-3} + dy^{2n-4} + ey^{2n-5} + fy^{2n-6} + \ldots + py^n + \ldots + fy^6 + ey^5 + dy^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$, resoluetur in has numero n aequationes quadraticas $y^2 + \alpha y + 1 = 0$, $y^2 + \beta y + 1 = 0$, $y^2 + \gamma y + 1 = 0$, $y^2 + \delta y + 1 = 0$ etc. At coefficientes α, β, γ, δ, etc. erunt radices huius aequationis n dimensionum:

$$u^n - au^{n-1} + \left.\begin{matrix} b \\ -n \end{matrix}\right\} u^{n-2} - \left.\begin{matrix} c \\ +(n-1)a \end{matrix}\right\} u^{n-3} + \left.\begin{matrix} d \\ -(n-2)b \\ +\frac{n(n-3)}{1.2} \end{matrix}\right\} u^{n-4} - \left.\begin{matrix} e \\ +(n-3)c \\ -\frac{(n-1)(n-4)}{1.2}a \end{matrix}\right\}$$

$$u^{n-5} + \left.\begin{matrix} f \\ -(n-4)d \\ +\frac{(n-2)(n-5)}{1.2.}b \\ -\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3.} \end{matrix}\right\} u^{n-6} - \left.\begin{matrix} g \\ +(n-5)e \\ -\frac{(n-3)(n-6)}{1.2}c \\ +\frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1.2.3}a \end{matrix}\right\} u^{n-7} + \left.\begin{matrix} h \\ -(n-6)f \\ +\frac{(n-4)(n-7)}{1.2}d \\ -\frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1.2.3}b \\ +\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4} \end{matrix}\right\} u^{n-8} - \text{etc.}$$

§. 12. Quia cuiuslibet aequationis quadraticae, diuidentis aequationem propositam, terminus extremus est vnitas, perspicuum est, binarum radicum aequationis propositae factum esse vnitatem. Huiusmodi igitur duae semper cum duobus membris $\sqrt[n]{A}$ et $\sqrt[n]{B}$ sunt coniungendae, quo aequationis §.9 propositae omnes obtineantur radices.

§. 13. Si in aequatione reciproca omnes termini praeter extremos et medium deficiant, vt in $y^{2n} + py^n + 1 = 0$, diuisores eius $y^2 + \alpha y + 1$, $y^2 + \beta y + 1$, $y^2 + \gamma y + 1$, etc. habebuntur substituendis pro $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. radicibus huius aequationis, $u^n - nu^{n-2} +$ $n(n-3)$

$\frac{n(n-3)}{1.2}u^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}u^{n-6} + \text{etc.} \pm p = o$, vbi $+p$ accipi debet si n est numerus par, et $-p$ si n est impar. Ex quo apparet, hanc aequationem conuenire cum aequatione $x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\beta} + \text{etc.} \text{ -- } = \alpha$ §. 9 resoluta, et hanc ob rem omnes diuisores posse assignari.

§. 14. Magnam isthaec in factores resolutio formulae $y^{2n} + py^n + 1$ habet vtilitatem in integranda formula differentiali $\frac{dy}{y^{2n} + py^n + 1}$ iam saepius a Geometris pertractata. Denominatore enim in suos factores $y^2 + \alpha y + 1$, $y^2 + \beta y + 1$, etc. resoluto tota integratio ad quadraturam circuli vel hyperbolae reducitur. Praeterea hoc plurimum iuuat, quod aequatio $u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}u^{n-4} - \text{etc.} \pm p = o$, ex qua α, β, γ etc. determinantur, sectionem arcus circularis in n partes complectatur, atque ita coefficientes α, β, γ, etc. facillime inueniantur.

§. 15. Reuertamur autem ad modum ex aequationibus resoluentibus ipsas aequationes resoluendas eliciendi. Sitque aequatio resoluens $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$, cuius tres radices sint A, B, C; erit ergo $\alpha = A + B + C$; $\beta = AB + AC + BC$ et $\gamma = ABC$. Radix itaque aequationis resoluendae x erit $= \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$, atque ponatur $p = \sqrt[n]{AB} + \sqrt[n]{AC} + \sqrt[n]{AC}$. His factis erit $\sqrt[n]{A^2} + \sqrt[n]{B^2} + \sqrt[n]{C^2} = x^2 - 2p$, et $\sqrt[n]{A^2 B^2} + \sqrt[n]{A^2 C^2} + \sqrt[n]{B^2 C^2} = p^2 - 2x\sqrt[n]{\gamma}$. Atque porro, vt sequitur:

$\sqrt{A}$

$$\begin{cases} \sqrt[n]{A^3}+\sqrt[n]{B^3}+\sqrt[n]{C^3}=x^3-3px+3\sqrt[n]{\gamma} \\ \sqrt[n]{A^3B^3}+\sqrt[n]{A^3C^3}+\sqrt[n]{B^3C^3}=p^3-3px\sqrt[n]{\gamma}+3\sqrt[n]{\gamma^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[n]{A^4}+\sqrt[n]{B^4}+\sqrt[n]{C^4}=x^4-4px^2+4x\sqrt[n]{\gamma}+2p^2 \\ \sqrt[n]{A^4B^4}+\sqrt[n]{A^4C^4}+\sqrt[n]{B^4C^4}=p^4-4p^2x\sqrt[n]{\gamma}+4p\sqrt[n]{\gamma^2} \\ \qquad +2x^2\sqrt[n]{\gamma^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[n]{A^5}+\sqrt[n]{B^5}+\sqrt[n]{C^5}=x^5-5px^3+5x^2\sqrt[n]{\gamma}+5p^2x-5p\sqrt[n]{\gamma} \\ \sqrt[n]{A^5B^5}+\sqrt[n]{A^5C^5}+\sqrt[n]{B^5C^5}=p^5-5p^3x\sqrt[n]{\gamma}+5p^2\sqrt[n]{\gamma^2} \\ \qquad +5px^2\sqrt[n]{\gamma^2}-5x\sqrt[n]{\gamma^3} \end{cases}$$

Quemadmodum haec tabula ſit vlterius continuanda facile perſpicitur. Namque eſt $\sqrt[n]{A^m}+\sqrt[n]{B^m}+\sqrt[n]{C^m}$ $=x(\sqrt[n]{A^{m-1}}+\sqrt[n]{B^{m-1}}+\sqrt[n]{C^{m-1}})-p(\sqrt[n]{A^{m-2}}+\sqrt[n]{B^{m-2}}+\sqrt[n]{C^{m-2}})+\sqrt[n]{\gamma}.\ (\sqrt[n]{A^{m-3}}+\sqrt[n]{B^{m-3}}\ \sqrt[n]{C^{m-3}})$. Atque $\sqrt[n]{A^mB^m}+\sqrt[n]{A^mC^m}+\sqrt[n]{B^mC^m}=p$ $(\sqrt[n]{A^{m-1}B^{m-1}}+\sqrt[n]{A^{m-1}C^{m-1}}+\sqrt[n]{B^{m-1}C^{m-1}})-x\sqrt[n]{\gamma}$, $(\sqrt[n]{A^{m-2}B^{m-2}}+\sqrt[n]{A^{m-2}C^{m-2}}+\sqrt[n]{B^{m-2}C^{m-2}})+\sqrt[n]{\gamma^2}$ $(\sqrt[n]{A^{m-3}B^{m-3}}+\sqrt[n]{A^{m-3}C^{m-3}}+\sqrt[n]{B^{m-3}C^{m-3}})$.

§. 16. Alias etiam harum progreſſionum non contemnendas obſeruaui proprietates. Poſito enim $\sqrt[n]{A^m}$

$+\sqrt[n]{B^m}+\sqrt[n]{C^m}=R$, et $\sqrt[n]{A^mB^m}+\sqrt[n]{A^mC^m}+\sqrt[n]{B^mC^m}=S$, erit $\sqrt[n]{A^{2m}}+\sqrt[n]{B^{2m}}+\sqrt[n]{C^{2m}}=R^2-2S$, et $\sqrt[n]{A^{2m}B^{2m}}+\sqrt[n]{A^{2m}C^{2m}}+\sqrt[n]{B^{2m}C^{2m}}=S^2-2R\sqrt[n]{\gamma^m}$. Simili modo est quoque $\sqrt[n]{A^{3m}}+\sqrt[n]{B^{3m}}+\sqrt[n]{C^{3m}}=R^2-3RS+3\sqrt[n]{\gamma^m}$, et $\sqrt[n]{A^{3m}B^{3m}}+\sqrt[n]{A^{3m}C^{3m}}+\sqrt[n]{B^{3m}C^{3m}}=S^3-3RS\sqrt[n]{\gamma^m}+3\sqrt[n]{\gamma^{2m}}$. Atque hoc modo haec series procedit prorsus vt ipsa praecedens.

§. 17. Si sit $n=2$; erit $\alpha=x^2-2p$ et $\beta=p^2-2x\sqrt{\gamma}$; hisque duabus aequationibus coniunctis habebitur $x=\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$ et $p=\sqrt{AB}+\sqrt{AC}+\sqrt{BC}$, sunt autem A, B et C tres radices huius aequationis cubicae $z^3=\alpha z^2-\beta z+\gamma$. Eliminata ergo ex illis duabus aequationibus littera p, prodibit $(\frac{x^2-\alpha}{2})^2-2x\sqrt{\gamma}=\beta$ seu $x^4-2\alpha x^2-8x\sqrt{\gamma}=4\beta-\alpha^2$, cuius aequationis itaque radix x est cognita, quippe $=\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$, quae aequatio illi est consentanea, quae §. 5. est resoluta. Simili modo si quando duae huiusmodi aequationes occurrent $x^3-3px+3\sqrt[3]{\gamma}=\alpha$ et $p^3-3px\sqrt[3]{\gamma}+3\sqrt[3]{\gamma^2}=\beta$, erit $x=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C}$ et $p=\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{AC}+\sqrt[3]{BC}$, existentibus A, B et C radicibus aequationis $z^3=\alpha z^2-\beta z+\gamma$, vt ante. Vel eliminata littera p prodibit aequatio inter x, α, β, γ, cuius radix x innotescet. Eodem prorsus modo occurrentibus duabus hisce aequationibus x^4-

$4px^2$

$4px^2 + 4x\sqrt[4]{\gamma} + 2p^2 = \alpha$ et $p^4 - 4p^2 x\sqrt[4]{\gamma} + 4p\sqrt{\gamma} + 2x^2\sqrt{\gamma} = \beta$, erit $x = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B} + \sqrt[4]{C}$ et $p = \sqrt[4]{AB} + \sqrt[4]{AC} + \sqrt[4]{BC}$, at iterum ſunt A, B et C radices huius aequationis $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$. Quo p facilius eliminetur, ponatur $x^2 - 2p = R$, et $p^2 - 2x\sqrt[4]{\gamma} = S$, eritque $R^2 - 2S = \alpha$ et $S^2 - 2R\sqrt{\gamma} = \beta$. Iam ex illis duabus aequationibus exterminata p habebitur $x^4 = 2Rx^2 + 8x\sqrt[4]{\gamma} + 4S - R^2$. Comparetur haec aequatio cum iſta $x^4 = ax^2 + bx + c$, erit $R = \frac{a}{2}$, $\sqrt[4]{\gamma} = \frac{b}{8}$ ſeu $\gamma = \frac{b^4}{4096}$, et $S = \frac{c}{4} + \frac{a^2}{16}$. Hinc igitur habebitur $\alpha = \frac{a^2}{8} - \frac{c}{2}$ et $\beta = \frac{c^2}{16} + \frac{a^2 c}{32} + \frac{a^4}{256} - \frac{ab^2}{64}$. Quamobrem erunt A, B et C tres radices huius aequationis $z^3 = (\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2})z^2 - (\frac{a^4}{256} + \frac{a^2 c}{32} + \frac{c^2}{16} - \frac{ab^2}{64})z + \frac{b^4}{4096}$, id quod mire conſentit, cum eo, quod §. 7. eſt inuentum.

§. 18. Quoties igitur accidit, vt calculus perducatur ad duas aequationes duas incognitas z et p continentes, quae reperiantur inter formulas §. 15, vtriusque valor poterit aſſignari, etiamſi eliminata altera aequatio prodeat maxime compoſita. Hanc ob rem in his caſibus expediet calculum non ad vnicam aequationem, vnicamque incognitam, deducere, ſed duas aequationes duas incognitas inuoluentes retinere, atque inueſtigare, num forte inter illas formulas contineatur, id quod ſaepius, ſi calculus recte inſtituatur, euenire poſſe mihi perſuaſum eſt.

§. 19. Quemadmodum autem aequationes resoluentes $z^2 = \alpha z - \beta$ et $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$ tractauimus, ita etiam vlterius est progrediendum ad aequationem $z^4 = \alpha z^3 - \beta z^2 + \gamma z - \delta$ simili modo pertractandam. Scilicet, si eius radices sint A, B, C, et D, ponatur $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} = x$, et $\sqrt[n]{AB} + \sqrt[n]{AC} + \sqrt[n]{AD} + \sqrt[n]{BC} + \sqrt[n]{BD} + \sqrt[n]{CD} = p$ atque $\sqrt[n]{ABC} + \sqrt[n]{ABD} + \sqrt[n]{ACD} + \sqrt[n]{BCD} = q$, et quaerantur hinc expressiones pro $\sqrt[n]{A^m} + \sqrt[n]{B^m} +$ etc. et $\sqrt[n]{A^m B^m} + \sqrt[n]{A^m C^m} +$ etc. atque pro $\sqrt[n]{A^m B^m C^m} +$ etc. His perficiendis semper trinae inuenientur aequationes x, p et q continentes pro quouis ipsius m valore. Atque simili modo occurentibus tribus huiusmodi aequationibus, tres incognitae constabunt.

§. 20. Suspicor autem posito $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} + \sqrt[5]{C} + \sqrt[5]{D}$ aequationem rationalem posse concinnari, in qua x plures quam 5 non habeat dimensiones, etiamsi hoc fere impossibile videatur. Nam quemadmodum §. 17 ex aequationibus $x^4 - 4px^2 + 4x\sqrt[4]{\gamma} + 2p^2 = \alpha$ et $p^4 - 4p^2x\sqrt[4]{\gamma} + 4p\sqrt{\gamma} + 2x^2\sqrt{\gamma} = \beta$ eliminanda p aequationem non plurium quam 4 dimensionum obtinuimus, quod pariter vix fieri posse videatur, ita etiam pro quinta potestate forte simile artificium vsu venire potest, vt aequatio $x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tandem resolui queat. Quod vero maximum in hoc perficiendo

est

eſt ſubſidium, eo redit meo iudicio, vt α, β, γ, et δ, ex a, b, c, et d debeant determinari, non vero viciſſim; hoc enim caſu aequatio ad multo altiorem eueheretur poteſtatem, quam opus eſt. Aliis autem, quos huiusmodi occupationes iuuant, hanc rem perficiendam, vel mihi ad aliud tempus, relinquo; hoc ſolo nunc contentus, me fortaſſe ideoneam atque genuinam viam oſtendiſſe.

CONSTRVCTIO AEQVATIONIS
DIFFERENTIALIS $ax^n dx = dy + y^2 dx$.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Communicaui nuper cum Societate ſpecimen conſtructionis aequationis cuiusdam differentialis, in qua non ſolum indeterminatas a ſe inuicem ſeparare non potueram, ſed etiam monſtraueram ex ipſa conſtructione huiusmodi ſeparationem omnino non poſſe exhiberi. Differt quidem meus ibi datus conſtruendi modus ab vſitatis: attamen iis nequaquam illum eſſe poſtponendum quilibet intelliget, qui hanc ſchedam inſpexerit. Neque vero tum temporis hanc methodum vlterius extendere, atque ad alias aequationes accommodare licuit, quia ex poſita conſtructione ad aequationem demum perueneram, non autem viciſſim data aequatione conſtructionem eruere potueram. At deinceps cum hanc

rem