



1738

# De solutione problematum diophanteorum per numeros integros

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

## Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De solutione problematum diophanteorum per numeros integros" (1738). *Euler Archive - All Works*. 29.  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/29>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

DE  
SOLUTIONE PROBLEMATVM  
DIOPHANTAEORVM PER NVMEROS  
INTEGROS.

AVCTORE

*Leonb. Eulero.*

§. 1.

**Q**uoties in problematis Diophantaeis soluendis peruenitur ad formulam, in qua plus vna indeterminata non inest, maxime requiruntur numeri integri, qui loco indeterminatae positi quaesito satisfaciant. Hoc vero quando fieri non potest, numeris fractis acquiescere oportet. Obseruatum autem est, si in illa formula indeterminatae maxima dimensio fuerit quadratum et ipsa formula debeat esse numerus quadratus, plerumque infinitos numeros integros problema soluere, qui inter se certa lege cohaereant, et seriem quandam constituent. Sed si formula vel debeat esse cubus aliante altior potentia, vel si indeterminata plures duabus habeat dimensiones, plus effici non potest, quam vt saltem numeri fracti eruantur.

§. 2. Ita autem huiusmodi problematum omnium ratio est comparata, vt vnum numerum satisfaciendum diuinatione inueniri oporteat, ex quo deinceps infiniti alii reperiri queant. Neque enim ad primum detegendum regula potest tradi, cum casu possint occurrere,  
qui

qui omnino nullam solutionem admittunt, cuiusmodi est  $3x^2 + 2$ , quae formula nunquam fieri potest quadratum. Quamobrem in sequentibus semper ponemus, vnicum tantum casum esse cognitum, quo conditioni problematis satisfiat, atque regulam dabimus, qua ex illo innumerabiles alii elici possint.

§. 3. Proposita igitur fit haec formula  $ax^2 + bx + c$ , quae debeat esse numerus quadratus. Sintque  $a, b$  et  $c$  numeri integri, et requirantur quoque numeri integri loco  $x$  substituendi. Datus autem fit numerus  $n$ , qui loco  $x$  positus reddat formulam  $ax^2 + bx + c$  quadratum. Erit ergo  $an^2 + bn + c$  numerus quadratus, cuius radix sit  $m$ . Nam ad alium numerum satisfaciendum ex hoc dato  $n$  inueniendum, pono eum esse  $\alpha n + \epsilon + \gamma \sqrt{an^2 + bn + c}$ , huncque valorem loco  $x$  substitutum reddere  $ax^2 + bx + c$  quadratum, cuius radix sit  $\delta n + \epsilon + \zeta \sqrt{an^2 + bn + c}$ . Perspicuum enim est illum numerum loco  $x$  substituendum fore rationalem ob  $an^2 + bn + c$  quadratum, numeros autem integros hoc modo reperiri si modo fit  $n$  numerus integer, mox apparebit.

§. 4. Substituatur igitur  $\alpha n + \epsilon + \gamma \sqrt{an^2 + bn + c}$  loco  $x$  in  $ax^2 + bx + c$ , hocque facto prodibit

$$\left. \begin{aligned} & a\alpha^2 n^2 + 2a\alpha\epsilon n + a\epsilon^2 + 2a\alpha\gamma n \\ & a^2\gamma^2 n^2 + ab\gamma^2 n + ac\gamma^2 + 2a\delta\gamma \\ & + ban + b\epsilon + b\gamma \\ & + c \end{aligned} \right\} \sqrt{an^2 + bn + c}$$

Sed

Sed quia huius radicem quadraticam ponimus  $\delta n + \varepsilon + \zeta \sqrt{an^2 + bn + c}$ , erit hinc etiam  $ax^2 + bx + c$  aequalis sequenti quantitati.

$$\delta^2 n^2 + 2\delta \varepsilon n + \varepsilon^2 + 2\delta \zeta n \sqrt{an^2 + bn + c} \\ a\zeta^2 n^2 + b\zeta^2 n + c\zeta^2 + 2c\zeta \sqrt{an^2 + bn + c}.$$

His duabus formis inter se aequatis, habebuntur sequentes aequationes.

$$a\alpha^2 + a^2\gamma^2 = \delta^2 + a\zeta^2, \quad 2a\alpha\varepsilon + ab\gamma^2 + b\alpha = 2\delta\varepsilon + b\zeta^2, \\ a\varepsilon^2 + a\varepsilon\gamma^2 + b\varepsilon + c = \varepsilon^2 + c\zeta^2, \quad 2a\alpha\gamma = 2\delta\zeta, \\ 2a\varepsilon\gamma + b\gamma = 2\varepsilon\zeta.$$

Ex quibus elicitur  $\delta = \frac{a\alpha + \gamma}{\zeta}$  et  $\varepsilon = \frac{2a\varepsilon\gamma + b\gamma}{2\zeta}$ , et valor ipsius  $\delta$  in prima aequatione substitutus dat,  $a^2\zeta^2 + a\gamma^2\zeta^2 = a\alpha^2\gamma^2 + \zeta^4$ , quae in duas resolvitur  $\zeta^2 = \alpha^2$ , et  $\zeta^2 = a\gamma^2$ . Harum autem posterior, nisi sit a quadratum, locum habere nequit. Habebimus ergo  $\zeta = \alpha$ , et secunda aequatio factis substitutionibus hisce similiter in has resolvitur  $a\gamma^2 = \alpha^2$ , et  $\varepsilon = \frac{b(\alpha^2 - 1)}{2a}$ , quarum iterum posterior tantum locum habet. His inuentis tertia tandem aequatio dabit  $\alpha = \sqrt{a\gamma^2 + 1}$ : inueniri igitur debet valor pro  $\gamma$ , quo  $a\gamma^2 + 1$  fiat quadratum.

§. 5. Sit  $p$  iste numerus, qui loco  $\gamma$  substitutus reddat  $a\gamma^2 + 1$  quadratum, et huius radix ponatur  $q$ ; ita ut sit  $q = \sqrt{ap^2 + 1}$ , erit  $\alpha = q$ ,  $\gamma = p$ ,  $\varepsilon = \frac{b(q^2 - 1)}{2a}$ ,  $\delta = ap$ ,  $\varepsilon = \frac{bp}{2}$  et  $\zeta = q$ . Ex his colligitur sequens Theorema:

*Si  $ax^2 + bx + c$  est quadratum casu quo  $x = n$ , erit quoque quadratum casu, quo  $x = qn + \frac{bq - b}{2a} + p \sqrt{an^2 + bn + c}$ ; eiusque quadrati radix erit  $apn + \frac{bp}{2} + q\sqrt{an^2 + bn + c}$ .*

Tom. VI.

Z

Si

Si ergo modo  $bp$  per 2. diuidi potest, radix quadrati erit numerus integer, et propterea quoque valor ipsius  $x$  erit integer, seu  $bq - b$  diuidi poterit per 2  $a$ .

§. 6. Quemadmodum autem ex  $n$  valore ipsius  $x$  dato inuentus est alius  $qn + \frac{bq-b}{2a} + pm$  posito  $m$  loco  $\sqrt{(an^2 + bn + c)}$ ; ita hac quantitate tanquam  $n$  tractata, quo casu loco  $m$  sumi debet  $apn + \frac{bp}{2} + qm$ , eruetur denuo alius valor, qui loco  $x$  substitutus quaesito satisfacit, scilicet hic:  $2ap^2n + bp^2 + 2pqm$ ,  
quadrati vero hinc orti radix erit  $2apq + bpq + 2ap^2m$ .

Consideretur iam illa quantitas vt  $n$  et haec vt  $m$  habebitur quartus valor ipsius  $x$  satisfaciens hic:

$$4ap^2qn + 2bp^2q + 4ap^3m \\ + qn + \frac{b(q-1)}{2a} + 3pm$$

Et radix quadrati respondentis erit,

$$4a^2p^3n + 2bp^3 + 4ap^2qm \\ + 3apn + \frac{3pb}{2} + qm$$

§. 7. Valores ipsius  $x$  satisfaciens, vna cum radicibus quadratorum respondentium ergo ita se habebunt vt sequitur:

Valo-

Valores ipsius $x$	Valores $V(ax^2+bx+c)$
I. $n$	$apn + qm + \frac{bp}{2}$
II. $qn + pm + \frac{b(q-1)}{2a}$	$2apqn + 2q^2m + bpq$
III. $2q^2n + 2pqm + \frac{b(q^2-1)}{a}$	$-m$
IV. $4q^3n + 4pq^2m + \frac{b(4q^2-3q-1)}{2a}$	$4apq^2n + 4q^3m + 2bpq^2$
$-3qn - pm$	$-apn - 3qm - \frac{bp}{2}$
V. $8q^4n + 8pq^3m + \frac{4bq^2(q^2-1)}{a}$	$8apq^3n + 8q^4m + 4bpq^3$
$-8q^2n - 4pqm$	$-4apqn - 8q^2m - 2bpq$
$+n$	$+m$
etc. etc.	etc.
Huius progressionis haec est lex.	Huius progressionis haec est lex.
term. quicumque A	E
hunc sequens B	F
$2qB - A + \frac{b(q-1)}{a}$	$2qF - E$

Hae igitur progressionēs, quousque libuerit exiguo labore continuantur.

§. 8. Perspicitur ex his formis alternos adminimum terminos efficere  $ax^2 + bx + c$  numerum quadratum integrum; atque omnia omnino quadrata fieri numeros integros si fuerit  $bp$  numerus par. Omnes autem ipsius  $x$  valores erunt numeri integri, si  $b(q-1)$  diuidi poterit per  $2a$ ; sin vero hoc non fuerit, saltem alterni ipsius  $x$  valores erunt numeri integri, nam  $qq-1$  i. e.  $ap^2$  semper diuidi poterit per  $a$ , si quidem, vt ponimus  $p$  et  $q$  sint numeri integri. Praeterea

Z 2

terea notandum est in terminis istis etiam *m* negative accipi posse, qua ratione numerus solutionum, quandoque duplicatur.

§: 9: Intelligitur etiam, si *a* sit numerus quadra-

tus, solutionem in numeris integris exhiberi non posse, nisi forte  $ax^2 + bx + c$  vel ipsum  $c$  sit quadratum, vel numerus quadratus, fieri possit aequalis. Hanc ob rem exaltissimus, supra eos casus, quibus *a* erat quadratum, quia hac tantum de numeris integris problema soluentibus praecepta tradere instituit. Nam si *a* est quadratum, nullus numerus integer potest exhiberi, qui loco *p* positus efficiat  $ap^2 + 1$  quadratum, praeter *o*. Hoc vero casu omnes valores ipsius *x* manent *n*, nullisque ergo alius, nisi is qui diuisiones est inuenitur, eruitur.

§: 10: Quoties autem *a* non est numerus quadratus, semper numerus integer potest assignari, qui loco *p* positus efficiat  $ap^2 + 1$  quadratum. Quamobrem his casibus, si unicum casum elicerimus, quo  $ax^2 + bx + c$  sit quadratum; simul quoque casus infinitos exhibere poterimus, qui  $ax^2 + bx + c$  in quadratum transmutent. Proposita igitur formula  $ax^2 + bx + c$  hoc erit agendum: primo coniectura degebitur, quod erit integer, qui reddat  $ax^2 + bx + c$  quadratum. Deinde etiam quaeri debet valor ipsius *p*, quo  $ap^2 + 1$  etiam fiat quadratum. Hisque inuenitis, oper. progressionum inuentarum casus infiniti inueniantur.

§. 11. Si  $c$  est quadratum, nempe  $= dd$ ; statim apparet casus, quo  $ax^2 + bx + d^2$  est quadratum, is enim est si  $x=0$ . Ponamus ergo  $n=0$ , eritque  $m=d$ , et valores ipsius  $x$  satisfaciētes constituent hanc seriem:  $0, dp + \frac{b(q-1)}{2a}, 2dpq + \frac{b(q^2-1)}{a}$  -----  
 $A, B, 2qB - A + \frac{b(q-1)}{a}$ . Quadratorum autem, quae hinc generantur, radices erunt:  $d, dq + \frac{bq}{2}, d(2q^2-1) + bpq$ , -----  
 $E, F, 2qF - E$ . Harum serierum lex, vt et priorum (§. 7.) perspicua est, sunt enim omnes recurrentes, seu cuius terminus ex duabus praecedentibus est compositus.

§. 12. Si  $b=0$  et  $d=1$ , vt habeatur haec forma  $ax^2 + 1$ , ad quam, vt ex praecedentibus apparet, generalis  $ax^2 + bx + c$  maximam partem reducit. Huius ergo valores ipsius  $x$  respondentes in hac serie progrediuntur:  $0, p, 2pq, 4pq^2 - p$ , -----  
 $A, B, 2qB - A$ , Radices vero quadratorum productorum erunt sequentes:  $1, q, 2q^2 - 1, 4q^3 - 3q$ , -----  
 fit quadratum constat, huiusmodi numeri infiniti habentur:  $E, F, 2qF - E$ . Si ergo vnicus casus  $p$ , quo  $ap^2 + 1$  fit quadratum constat, huiusmodi numeri infiniti habentur, qui in tractatione generalis formulae  $ax^2 + bx + c$  loco  $p$  et  $q$  collocari possunt.

§. 13. Quo autem haec methodus ad quosuis casus possit accommodari, videamus primo, quos numeros pro quolibet ipsius  $a$  valore literis  $p$  et  $q$  tribui oporteat. Debet autem  $p$  talis esse numerus qui  $ap^2 + 1$  reddat quadratum, huiusque radix erit  $q$ . Perspicuum



quidem est, si vnicus pro  $p$  habeatur valor idoneus, simul quoque infinitos haberi: attamen hic vnicum duntaxat eumque minimum praeter 0 adhiberi conuenit. Nam reliqui sequentes, qui sunt  $2pq, 4pq^2 - p$ , etc. solutionum numerum non multiplicant, cum valores tantum sequentes ipsius  $x$  in §. 7. praebeant. Minimus autem ipsius  $p$  valor dabit omnes numeros ipsius  $x$ ; satisfaciens, quod maiores non faciunt.

§. 14. Intelligatur igitur, quod si fuerit  $a = e^2 - 1$ , minimum ipsius  $p$  valorem fore 1, ipsiusque  $q, e$ . Deinde si fuerit  $a = e^2 + 1$ , tum esse  $p = 2e$ , et  $q = 2e^2 + 1$ . Atque si sit  $a = e^2 + 2$ , erit  $p = e$ , et  $q = e^2 + 1$ . Huiusmodi casus infiniti alii possunt defini, quorum ingens numerus hoc continetur theoremate: si sit  $a = a^2 e^{2b} + 2ae^{b-1}$ , erit  $p = e$ , et  $q = ae^{b+1} + 1$  vbi pro  $a$  etiam numeri fracti accipi possunt, dummodo illi per  $e^{b-1}$  multiplicati in integros transmutentur. Simili modo etiam si sit  $a = (ae^b + \xi e^\mu)^2 + 2ae^{b-1} + 2\xi e^{\mu-1}$ , erit  $p = e$ , et  $q = ae^{b+1} + \xi e^{\mu+1} + 1$ . Atque etiam si sit  $a = \frac{1}{4} a^2 k^2 e^{2b} + ae^{b-1}$ , erit  $p = ke$ , et  $q = \frac{1}{2} ak^2 e^{b+1} + 1$ .

§. 15. Quoties igitur  $a$  est numerus, qui in istis formulis contineatur, statim apparet valor ipsius  $p$  et  $q$ . At si  $a$  huiusmodi fuerit numerus, qui nullo modo ad illas formulas potest reduci, peculiaris ad inueniendam  $p$  et  $q$  adhibenda est methodus, qua olim vsi sunt Pellius et Fermatius. Haecque methodus est vniuersalis, et aequae succedit, quemcunque numerum denotet  $a$ . Praeterea etiam ideo hic potissi-

num est commendanda, quod minimum ipsius  $p$  valorem, qui hoc loco requiritur, exhibeat.

§. 19. Methodus haec extat descripta in operibus *Wallisii*, et hanc ob rem eam hic fusius non expono. Operandi tamen modum in vnico exemplo ostendisse iuuabit, cuius inspectio ad quaeque alia solvenda perducet. Oporteat nimirum determinari minimum ipsius  $p$  valorem, quo  $31p^2 + 1$  fit quadratum. Ad hoc efficiendum sequens instituitur calculus.

$$\begin{aligned} \sqrt{31p^2 + 1} &= q. \text{ Ergo } q > 5p, \text{ ponatur itaque } q = 5p + a \\ 6p^2 + 1 &= 10ap + a^2, \quad p = \frac{5a + \sqrt{31a^2 - 6}}{6}, \quad p = a + b \\ 5a^2 &= 2ab + 6b^2 + 1, \quad a = \frac{b + \sqrt{31b^2 + 5}}{5}, \quad a = b + c \\ 3b^2 &= 8bc + 5c^2 - 1, \quad b = \frac{4c + \sqrt{31c^2 - 3}}{3}, \quad b = 3c + d \\ 2c^2 &= 10cd + 3d^2 + 1, \quad c = \frac{5d + \sqrt{31d^2 + 2}}{2}, \quad c = 5d + e \\ 3d^2 &= 10de + 2e^2 - 1, \quad d = \frac{5e + \sqrt{31e^2 - 3}}{3}, \quad d = 3e + f \\ 5e^2 &= 8ef + 3f^2 + 1, \quad e = \frac{4f + \sqrt{13f^2 + 5}}{5}, \quad e = 2f - g \\ f^2 &= 12fg - 5g^2 + 1, \quad f = 6g + \sqrt{31g^2 + 1} \end{aligned}$$

Tamdiu scilicet hae operationes continuantur, quoad in media columna perueniatur ad  $\sqrt{31g^2 + 1}$  eiusdem formae, quam habuit proposita  $\sqrt{31p^2 + 1}$ . Perspicuum iam est si ponatur  $g = 0$  fore  $f = 1$ . Hincque retrogrediendo habebitur:  $e = 2, d = 7, c = 37, b = 118, a = 155, p = 273$ , atque  $q = 1520$ .

§. 17. Quo autem non tanto opus fit labore ad valores ipsarum  $p$  et  $q$  inueniendos pro dato numero  $a$ , sequentem tabulam annexere visum est, in qua pro singulis valoribus ipsius  $a$  exhibentur minimi numeri, qui loco  $p$  substituti reddant  $ap^2 + 1$  quadratum.

a.	p.	q.	a.	p.	q.
2.	2.	3.	37.	12.	73
3.	1.	2.	38.	6.	37
5.	4.	9.	39.	4.	25
6.	2.	5.	40.	3.	19
7.	3.	8.	41.	320.	2049
8.	1.	3.	42.	2.	13
10.	6.	19.	43.	531.	3482
11.	3.	10.	44.	30.	199
12.	2.	7.	45.	24.	161
13.	180.	649.	46.	3588.	24335
14.	4.	15.	47.	7.	48
15.	1.	4.	48.	1.	7
17.	8.	33.	50.	14.	99
18.	4.	17.	51.	7.	50
19.	39.	170.	52.	90.	649
20.	2.	9.	53.	9100.	66249
21.	12.	55.	54.	66.	485
22.	42.	197.	55.	12.	89
23.	5.	24.	56.	2.	15
24.	1.	5.	57.	20.	151
26.	10.	51.	58.	2574.	19603
27.	5.	26.	59.	69.	530
28.	24.	127.	60.	4.	31
29.	1820.	9801.	61.	226153980.	1766319049
30.	2.	11.	62.	8.	63
31.	273.	1520.	63.	1.	8
32.	3.	17.	65.	16.	129
33.	4.	23.	66.	8.	65
34.	6.	35.	67.	5967.	48842
35.	1.	6.	68.	4.	33

§. 18. Hic statim occurrit modus perfacilis extrahendi quam proxime radicem quadratam ex numero quocunque non quadrato  $a$ . Quia enim est  $ap^2 + r = q^2$  erit  $\sqrt{a} = \frac{\sqrt{q^2 - r}}{p}$ , et, si  $q$  sit numerus valde magnus, erit  $\sqrt{a} = \frac{q}{p}$  quam proxime. Sed loco  $p$  possunt poni singuli termini seriei  $0, p, 2pq, 4pq^2 - p, \dots A, B, 2qB - A$ , et loco  $q$  singuli termini respondententes seriei huius  $1, q, 2q^2 - 1, 4q^3 - 3q, \dots E, F, 2qF - E$  (§. 12.). Sit huius seriei terminus indicis  $i = Q$ , et illius terminus, cuius index etiam  $i$  est  $= P$ , erit  $\sqrt{a} = \frac{Q}{P}$ . Quia vero, quo magis continuantur hae series, maiores quoque fiunt termini  $Q$ ; eo propior reperietur  $\sqrt{a}$  sumendis terminis serierum a primo longius distantibus. Sit exempli gratia  $a = 6$ , erit  $p = 2$  et  $q = 5$ , seriesque sibi inuicem subscribantur vt sequitur, posteriore loco superiore posita:

$$\begin{array}{r} 1, 5, 49, 485, 4801, 47525, 470449, 4656965, \text{etc.} \\ 0, 2, 20, 198, 1960, 19402, 192080, 1901198, \text{etc.} \end{array}$$
 Sumtis igitur vltimis terminis, erit  $\frac{4656965}{1901198}$  ita propinquum radici quadratae ex 6, vt plus eam non excedat, quam hac fractione  $\frac{1}{2 \cdot (1901198)^2 \sqrt{6}}$ . Simili modo patet radicem quadratam ex 61 fore proxime aequalem  $\frac{1766319049}{226153980}$ . Quae quidem radix vera aliquantulum maior est, sed excessus est minor quam  $\frac{1}{2(226153980)^2 \sqrt{61}}$ .

§. 19. Quaerantur omnes numeri triangulares, qui sint simul quadrati; debet  $\frac{x^2 + x}{2}$  esse quadratum. Quadratum igitur quoque erit  $2x^2 + 2x$ , ex quo fit, collatione cum formula  $ax^2 + bx + d^2$  (§. 11.) instituta  $a = 2, b = 2, d = 0$ . Sed quia est  $a = 2$ , erit ex ta-

Tom. VI. Aa bula

bula superiore  $p=2$  et  $q=3$ . Vnde loco  $x$  substitui debent sequentes valores 0, 1, 8, 49, 288, 1681, 9800, etc. quo  $\frac{x^2+x}{2}$  fiat quadratum. Quadratorum autem hinc ortorum radices tenebunt hanc seriem, 0, 1, 6, 35, 204, 1189, 6930, etc. Vel quadrata, quorum radices continentur in hac serie, erunt numeri triangulares. Seriei quidem huius posterioris termini sunt duplo maiores, si formentur ex serie generali  $d, dq + \frac{bp}{2}, d(2q^2-1) + bpq$  etc. sed quia hi termini sunt radices ex  $2x^2 + 2x$ , debent, diuidi per 2, quo habeantur radices ex  $\frac{x^2+x}{2}$ .

§. 20. Numeri polygonales  $l$  laterum exprimuntur hac formula generali  $\frac{(l-2)x^2-(l-4)x}{2}$ , in qua  $x$  denotat radicem numeri polygonalis. Quo ergo huiusmodi numerus polygonalis fit quadratum, oportet  $2(1-x)x^2 - 2(l-4)x$  esse quadratum. Statim autem vnus casus apparet, quo quaesito satisfit, scilicet si  $x=0$ ; fit enim ipsa formula  $=0$ . Quamobrem habebimus  $n=0$  et  $m=0$ , et formula cum generali  $ax^2 + bx + c$  comparata prodit  $a=2(l-2)$  et  $b=-2(l-4)$ , atque  $c=0$ . Fiat igitur  $2(l-2)p^2 + 1 = q^2$ , erunt ipsius  $x$  valores, quibus  $2(l-2)x^2 - 2(l-4)x$  seu huius pars quarta  $\frac{(l-2)x^2-(l-4)x}{2}$  i. e. ipse numerus polygonalis fit quadratum, sequentes, 0,  $\frac{-(l-4)}{2(l-2)}(q-1)$ ,  $\frac{-(l-4)}{(l-2)}(q^2-1)$  ----- A, B,  $2qB - A - \frac{(l-4)}{l-2}(q-1)$ . Qui quidem numeri omnes, si  $l > 4$ , sunt negatiui, attamen affirmatiui habebuntur valores ipsius  $x$  sumto  $q$  negatiuo, tum enim alterni termini erunt affirmatiui. Deinde  
etiam

etiam si inuentus sit numerus negatiuus pro  $x$ , qui sit  $-k$ , poterit numerus affirmatiuus dari, qui eundem numerum polygonalem producat, erit nempe  $x = k + \frac{l-4}{l-2}$ , sed nisi sit  $\frac{l-4}{l-2}$  numerus integer, hi numeri affirmatiui sunt fracti, quos hic excludimus. Hanc ob rem alternis terminis superioris seriei posito  $-q$  loco  $q$  contenti esse debemus. Radices vero quadratorum  $2(l-2)x^2 - 2(l-4)x$  his casibus resultantium tenebunt hanc progressionem,  $0, (l-4)p, 2(l-4)pq, \dots$   
 $\dots E, F, 2qF - E.$

§. 21. Quo autem non alii numeri, nisi affirmatiui et integri reperiantur, alium casum, quo  $2(l-2)x^2 - 2(l-4)x$  sit quadratum, erui oportet, qui erit, si  $x = 1$ ; prodibit enim 4. Hanc ob rem ponatur  $n = 1$  et  $m = 2$ , quo facto habebuntur pro  $x$  valores sequentes:  $1, q + 2p - \frac{(l-4)}{2(l-2)}(q-1), 2q^2 - 1 + 4pq - \frac{(l-4)}{l-2}(q^2 - 1), \dots A, B, 2qB - A - \frac{(l-4)}{l-2}(q-1).$  Radices autem quadratae ex  $\frac{(l-2)x^2 - (l-4)x}{2}$  progredientur in hac serie,  $1, \frac{lp}{2} + q, lpq + 2q^2 - 1, \dots$   
 $\dots E, F, 2qF - E.$  Quo autem omnes ipsius  $x$  valores sint numeri integri, non quidem loco  $q$  minimum valorem, sed eum, qui reddat  $\frac{l-4}{2(l-2)}(q-1)$  numerum integrum feligi conuenit, id quod semper fieri poterit. Vt si quaerantur numeri pentagonales quadrati, erit  $l = 5$ , et  $a = 6$ , atque  $q$  erit numerus ex hac serie  $1, 5, 49, \dots$  et ipsius  $p$  valores respondentes erunt  $0, 2, 20, \dots$  Quo igitur  $\frac{(l-4)}{2(l-2)}(q-1) = \frac{1}{8}(q-1)$  sit numerus integer, sumi debet  $q = 49$ , et  $p = 20$ . Radices ergo numerorum pen-

agonalium, qui sunt quadrati, erunt, 1, 81, 7921, --- A, B, 98 B - A - 16, qui numeri etiam in superiore serie (§. 20.) continentur, si accipiatur  $q = -5$ , erunt enim termini alterni affirmatiui. Horum autem numerorum pentagonalium radices quadratae erunt 1, 99, 9701, --- E, F, 98 F - E.

§. 22. Quia est  $2(l-2)p^2 + 1 = q^2$ , manifestum est ex praecedentibus, si fuerit  $2l-4$  quadratum, nullum numerum integrum loco  $p$  substitui posse. Hanc ob rem vel omnes numeri polygonales erunt quadrati, vel tantum nonnulli. Prius euenit, si  $l=4$ ; nam omnes numeri tetragonales sunt simul quadrati. Posterius vero si sit  $2l-4=16$  seu 36, seu 64 etc. his enim casibus alii non erunt quadrati, nisi 0 et 1. Si  $2l-4=16$ , erit  $l=10$ , ideoque numeri polygonales erunt decagonales, quorum forma est  $4x^2 - 3x$ . Nullusque numerus decagonalis est quadratus praeter 0 et 1 in integris.