1738

Solutio singularis casus circa tautochronismum

Leonhard Euler

SOLVTIO SINGVLARIS CASVS CIRCA TAVTOCHRONISMVM.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula IV.

Cum ante annos tres Clariff. *Bernoulli* methodum innumeras curuas tautochronas in vacuo inuenien- di proponeret, mentionem fecit problematis non parum elegantis, cuius folutionem hac fcheda daturus fum. Difficillimum quidem eo tempore videbatur hoc pro- blema, et propterea parum ftudii ad id foluendum im- pendebam. Poftmodum vero cum diligentius in tau- tochronas pro fluidis inquifiuiffem, vniuerfalem detexi methodum problemata huiusmodi omnia foluendi, quae etiam me ad folutionem problematis illius manuduxit.

Fig. 1.

§. 2. Problema autem hoc eft: *Datae curuae* A NB *in* B *adiungere curuam* BMC *eius proprietatis, vt omnes defcenfus grauis alicubi in curua* BMC *incipientes vsque ad imum punctum* A *fiant temporibus aequalibus.* Oportet ergo inueniri curuam BMC, ex hac condi- tione, vt fumto in curua BMC pro lubitu puncto M tempus defcenfus per MBNA fit conftans, neque pen- deat

deat a loco puncti M. Seu tempus descensus per M BNA aequale esse debet tempori descensus per curuam datam BNA; qui est casus incidente puncto M in B.

§. 3. Descendat ergo corpus ex puncto M, et quaeramus descensus tempus per arcum MB et BMA. Ducta verticali BP, ponatur BP $= a$, quae igitur litera, quia locum puncti M definit, in expressione temporis per MBA inesse non potest. Curuae datae altitudo AD sit $= c$. Assumantur in vtraque curua applicatae quaecunque QN, et XY iisque proximae qn et xy. Dicantur AQ $= t$, AN $= r$ et BX $= x$, BY $= s$; quarum inter t et r aequatio est data, inter x et s desideratur. Celeritas quam corpus in N habebit est $\surd(a+c-t) = \surd(PB+DQ)$. Adeoque tempus quo arcus AN absoluitur est $= \int\frac{dr}{\surd(a+c-t)}$. Quod integrale ita debet accipi, vt fiat $= o$, si sit $t = o$.

§. 4. Deinceps si ponatur $t = c$, habebitur tempus per integram curuam datam BNA, quod igitur erit expositum formula ex a et constantibus composita. Nonnullos computaui casus speciales, et vidi tempus descensus per curuam BNA initio descensus posito in M, semper exponi posse sequente serie $k - \alpha a - \beta a^2 - \gamma a^3 - \delta a^4 -$ etc. $- \zeta\surd a - \eta a\surd a - \theta a^2\surd a -$ etc. cuius in quolibet casu speciali coefficientes α, β, etc. et k poterunt determinari. Hoc tempus igitur additum ad descensus tempus per MB, constans esse debet: atque vt in summa omnes termini litera a affecti sese tollant, necesse est.

§. 5. Ad tempus descensus per curuam MB inueniendum, est celeritas in $Y = \sqrt{(a-x)}$ et elementum temporis $= ds : \sqrt{(a-x)}$. Huius integrale ita assumtum, vt fiat $= o$ si $x = o$ dabit tempus descensus per YB, in quo ergo si ponatur $x = a$ prodibit descensus tempus per MB, quod cum priore constantem quantitatem ab a liberam conficere debet. Si punctum M incidit in punctum B, i. e. si a euanescit, integrum tempus descensus erit tempus descensus per curuam BMA, quod ex superiore formula euadit $= k$. Hanc ob rem etiam tempus descensus per MBNA debet esse $= k$. Proinde tempus per MB debebit esse $= \alpha a + \beta a^2 + \gamma a^3 +$ etc. $+ \zeta \sqrt{a} + \eta a \sqrt{a} + \theta a^2 \sqrt{a} +$ etc.

§. 6. Hoc vt fiat assumo pro curua quaesita sequentem aequationem, $ds = A dx \sqrt{x} + B x dx \sqrt{x} + C x^2 dx \sqrt{x} +$ etc. $+ E dx + F x dx + G x^2 dx +$ etc. Tempus ergo descensus per arcum MB erit $= \int \frac{A dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} + \int \frac{B x dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} + \int \frac{C x^2 dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} +$ etc. $+ \int \frac{E dx}{\sqrt{(a-x)}} + \int \frac{F x dx}{\sqrt{(a-x)}} + \int \frac{G x^2 dx}{\sqrt{(a-x)}} +$ etc. scilicet si integralibus his ita sumtis vt fiant $= o$ si $x = o$ ponatur vbique $x = a$. Determinentur ergo coefficientes A, B, C, etc. ita, vt sint $\int \frac{A dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = \alpha a$; $\int \frac{B x dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = \beta a^2$, $\int \frac{C x^2 dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = \gamma a^3$ etc. et $\int \frac{E dx}{\sqrt{(a-x)}} = \zeta \sqrt{a}$; $\int \frac{F x dx}{\sqrt{(a-x)}} = \eta a \sqrt{a}$; $\int \frac{G x^2 dx}{\sqrt{(a-x)}} = \theta a^2 \sqrt{a}$ etc. Assumsi vero istum loco ds valorem, vt litterae A, B, C, etc. non ab a pendentes determinentur.

§. 7. Integratio huius $\frac{A dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$ pendet a quadratura circuli; At si ope logarithmorum imaginariorum integretegretur vt decet, atque ponatur $x = a$ prodibit $\frac{1}{2} A a \sqrt{-1} . l - 1$ quod aequale esse debet αa fit ergo $A = \frac{2 . \alpha}{1 . \sqrt{-1} . l - 1}$. Simili modo, $\frac{B x d x \sqrt{x}}{\sqrt{(a - x)}}$ integratum dabit $\frac{1 . 3}{2 . 4} B . a^2 \sqrt{-1} . l - 1 = \beta a^2$, fit igitur $B = \frac{2 . 4 . \beta}{1 . 3 \sqrt{-1} . l - 1}$. Atque porro prodibit $C = \frac{2 . 4 . 6 . \gamma}{1 . 3 . 5 . \sqrt{-1} . l - 1}$, et $D = \frac{2 . 4 . 6 . 8 . \delta}{1 . 3 . 5 . 7 . \sqrt{-1} . l - 1}$ etc. Datis ergo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. quae ex curua BNA nota inueniuntur, determinantur coefficientes pro curua quaesita A, B, C, D, etc.

§. 8. Pro altera parte, quae est rationalis, esse debet $\int \frac{E d x}{\sqrt{(a - x)}} = \zeta \sqrt{a}$; fit autem $\int \frac{E d x}{\sqrt{(a - x)}} = 2 E \sqrt{a}$, ex quo prodit $E = \frac{\zeta}{2}$. Deinde $\int \frac{F x d x}{\sqrt{(a - x)}}$ fit $= \frac{2}{3} . 2 F a \sqrt{a}$, idque aequari debet huic $\eta . a \sqrt{a}$, reperitur ergo $F = \frac{3}{2} . \frac{\eta}{2}$, similiter proueniet $G = \frac{3 . 5 . \theta}{2 . 4 . 2}$; atque $H = \frac{3 . 5 . 7 . \iota}{2 . 4 . 6 . 2}$ et ita porro. Hac igitur ratione determinatis A, B, C, D, etc. cognita erit aequatio pro curua quaesita $d s = A d x \sqrt{x} + B x d x \sqrt{x} + C x^2 d x \sqrt{x} +$ etc. $+ E d x + F x d x + G x^2 d x +$ etc. Quae quanquam in infinitum plerumque continuetur, tamen fieri potest, vt saepe eius summa possit definiri, sicque inueniatur aequatio finita pro curua quaesita.

§. 9. Sit ANB linea recta ad horizontem inclinata ita vt sit $AN : AQ = n : 1$ seu $r = n t$ et $dr = n dt$. Ex quo fit $\int \frac{d r}{\sqrt{(a + c - t)}} = \int \frac{n d t}{\sqrt{(a + c - t)}} =$ Const. $- 2 n \sqrt{(a + c - t)}$ Constans vero haec est $= 2 n \sqrt{(a + c)}$ ponatur iam $t = c$ prodit tempus descensus per $BA = 2 n \sqrt{c} + \frac{1 . 2 n a}{2 \sqrt{c}} - \frac{1 . 1 . 2 n a^2}{4 . 2 c \sqrt{c}} + \frac{1 . 1 . 3 . 2 n a^3}{8 . 2 . 3 . c^2 \sqrt{c}} - \frac{1 . 1 . 3 . 5 . 2 n a^4}{16 . 2 . 3 . 4 . c^3 \sqrt{c}} +$ etc. $- 2 n \sqrt{a}$, in seriem $\sqrt{(a + c)}$ resoluta. Compa- Fig. 2.

retur

retur haec forma cum hac $k - \alpha a - \beta a^2 - \gamma a^3 - \delta a^4$ $-$ etc. $- \zeta \sqrt{a} - \eta a \sqrt{a} -$ etc. prodibit $k = 2n\sqrt{c}$, $\alpha = \frac{-1 \cdot 2n}{2\sqrt{c}}$, $\beta = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2n}{4 \cdot 2 \cdot c\sqrt{c}}$, $\gamma = \frac{-1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2n}{8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c^2\sqrt{c}}$, $\delta = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2n}{16 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot c^3\sqrt{c}}$, etc. et $\zeta = 2n$, $\eta = 0$, $\theta = 0$, $2 = 0$ etc.

§. 10. Cognitis his valoribus prodibunt A, B, C, etc. vt ſequuntur. $A = \frac{-2n}{\sqrt{-c}.\,l-1}$, $B = \frac{2n}{3c\sqrt{-c}.\,l-1}$, $C = \frac{-2n}{5c^2\sqrt{-c}.\,l-1}$, $D = \frac{2n}{7c^3\sqrt{-c}.\,l-1}$ etc. $E = n$, $F = 0$, $G = 0$ etc. Pro curua igitur quaeſita BMC inuenitur iſta aequatio, $ds = \frac{-2ndx\sqrt{x}}{1.\sqrt{-c}.\,l-1} + \frac{2nxdx\sqrt{x}}{3c\sqrt{-c}.\,l-1} - \frac{2nx^2dx\sqrt{x}}{5c^2\sqrt{-c}.\,l-1} +$ etc. $+ ndx$, cuius integralis haec eſt $s = nx - \frac{4nx^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-c}.\,l-1}\left(\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{x}{3 \cdot 5 \cdot c} + \frac{x^2}{5 \cdot 7 \cdot c^2} - \frac{x^3}{7 \cdot 9 \cdot c^3} +\right.$ etc.). Facilius autem erit aequationem differentialem in expreſſionem finitam transmutare, eſt autem ea haec $ds = ndx - \frac{2ndx}{\sqrt{-c}.\,l-1}\left(\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3c} + \frac{x^2\sqrt{x}}{5c^2} - \frac{x^3\sqrt{x}}{7c^3} +\right.$ etc.). Quae ſeries exprimit arcum circuli, cuius tangens eſt $\sqrt{x}$ poſito radio $\sqrt{c}$, hanc ob rem erit $ds = ndx - \frac{ndx}{l-1}\, l\frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}$.

§. 11. Aequatio haec inuenta $ds = ndx - \frac{ndx}{l-1}\, l\frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}$ poteſt integrari, proditque poſt integrationem haec aequatio $s = nx - \frac{2n\sqrt{cx}}{\sqrt{-1}.\,l-1} - \frac{n(c+x)}{l-1}\, l\frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}$. Hic ipſius s valor ope rectificationis circuli conſtruitur ſequente modo.
Fig. 2. Fiat circuli quadrans cuius radius $AC = c$, ducatur tangens $AT = \sqrt{cx}$ et ſecans TMC, erit $s = \frac{n.\,AB\,AT^2 + n.AT.AC^2 - n.AM.CT^2}{AC.\,AB}$. Namque ex natura circuli eſt $AB = \frac{cl-1}{2\sqrt{-1}}$ et $AM = \frac{c}{2\sqrt{-1}}\, l\frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}$, vnde data conſtructio facile ſequitur.

§. 12.

§. 12. Ex aequatione $ds = ndx - \frac{ndx}{l-1}\, l\, \frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}$ apparet esse $ds < ndx$ nisi in casu $x = o$, quo est $ds = ndx$: habebunt enim curuae AB et BC semper in B tangentem communem. Ex quo apparet curuam quaesitam esse concauam versus axem BP, atque eousque scilicet in C ascendere, quoad eius tangens fiat verticalis, in eoque puncto C curuam habere cuspidem. Altitudo igitur huius curuae BE inuenietur, si in aequatione ponatur $ds = dx$. In nostro ergo casu, quo curua data est linea recta, dabit x altitudinem BE ex aequatione $(n-1)\, l - 1 = n\, l \frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}$ seu hac $-1 = \left(\frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}\right)^{\frac{n}{n-1}}$ siue hac $(\sqrt{c}+\sqrt{-x})^{\frac{n}{n-1}} + (\sqrt{c} - \sqrt{-x})^{\frac{n}{n-1}} = o$. Vel etiam sumatur arcus $AM = \frac{n-1}{n}$ AB, et ducta eius tangente AT erit $\frac{AT^2}{AC}$ altitudo curuae quaesitae. Fig. 1. Fig. 2.

§. 13. Si aequatio differentialis inuenta denuo differentietur posito dx constante prodibit aequatio haec $dds = \frac{ndx^2\sqrt{c}}{(c+x)\sqrt{-x}.\, l-1}$, quae posita ratione peripheriae ad diametrum $\pi : 1$ congruit cum hac $dds = \frac{-\eta dx^2\sqrt{c}}{\pi(c+x)\sqrt{x}}$. Ex hac aquatione casus, quo $c = o$ et $n = \infty$, ita tamen, vt sit $n\sqrt{c} = \sqrt{b}$, facile cognoscitur. Euenit hoc, si recta data est infinite parua et angulum infinite paruum cum horizonte constituit, ita vt tempus descensus per eam tamen sit finitum nimirum $= 2\sqrt{b}$. Erit igitur $AM = AB$, ideoque tangens AT infinita respectu radii c, abibit ergo $c+x$ in x, atque curua quaesita hanc habebit aequationem $dds = \frac{-dx^2\sqrt{b}}{\pi x\sqrt{x}}$ seu $ds = \frac{2dx\sqrt{b}}{\pi\sqrt{x}}$

 atque

atque $s = \frac{4bx}{\pi}$. Hanc ob rem curua quaesita erit cyclois, vt natura rei requirit.

§. 14. Si curua data hanc habuerit aequatione $dr = t^n dt$, erit elementum temporis $\frac{bt^n dt}{\sqrt{(a+c-t)}}$, ponatur $a+c=f$ et $f-t=z^2$, erit $t=f-z^2$ et $t^n = f^n - \frac{n}{1} f^{n-1} z^2 + \frac{n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2} f^{n-2} z^4 - \frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{n-3} z^6 +$ etc. et $\frac{bdt}{\sqrt{(f-t)}} = -2bdz$. Hinc prodibit $\int \frac{bt^n dt}{\sqrt{(a+c-t)}} =$ Const. $-2bf^n z + \frac{2bn}{1 \cdot 3} f^{n-1} z^3 - \frac{2bn \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 5} f^{n-2} z^5 + \frac{2bn \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} f^{n-3} z^7 -$ etc. Quod cum facto $t=0$ seu $z=\sqrt{f}$ euanescere debeat, erit Const. $= 2bf^n \sqrt{f}\,(1 - \frac{n}{1 \cdot 3} + \frac{n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 5} - \frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} +$ etc.). Ponatur deinde $t=c$ seu $z=\sqrt{a}$, prodibit tempus descensus per BA $= 2bf^n \sqrt{f}\,(1 - \frac{n}{1 \cdot 3} + \frac{n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 5} - \frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} +$ etc.) $- 2b(f^n \sqrt{a} - \frac{n}{1 \cdot 3} f^{n-1} a \sqrt{a} + \frac{n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 5} f^{n-2} a^2 \sqrt{a} -$ etc.)

§. 15. Ponamus breuitatis causa $1 - \frac{n}{1 \cdot 3} + \frac{n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 5} -$ etc. $= p$, erit substituto $a+c$ loco f descensus per BA $= 2bpc^{n+\frac{1}{2}} + \frac{n+\frac{1}{2}}{1} 2bpc^{n-\frac{1}{2}} a + \frac{\overline{n+\frac{1}{2}} \cdot \overline{n-\frac{1}{2}}}{1 \cdot 2} 2bpc^{n-\frac{3}{2}} a^2 +$ etc. $- 2bc^n \sqrt{a} = \frac{2n}{3} \cdot 2bc^{n-1} a \sqrt{a} - \frac{2n \cdot \overline{2n-2}}{3 \cdot 5} 2bc^{n-2} a^2 \sqrt{a} - \frac{2n \cdot \overline{2n-2} \cdot \overline{2n-4}}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot 2bc^{n-3} a^3 \sqrt{a} -$ etcet. Haec forma comparata cum forma §. 4. data $k - \alpha a - \beta a^2 - \gamma a^3 -$ etc. $- \zeta \sqrt{a} - \eta a \sqrt{a} - \theta a^2 \sqrt{a} -$ etc. erit $k = 2bpc^{n+\frac{1}{2}}$, $\alpha = -\frac{(n+\frac{1}{2})}{1} 2bpc^{n-\frac{1}{2}}$, $\beta = -\frac{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})}{1 \cdot 2}$

$2bpc^{n-\frac{3}{2}}$,

$2bpc^{n-\frac{3}{2}}$, $\gamma = -\frac{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})}{1.\ 2.\ 3} 2bpc^{n-\frac{5}{2}}$ etc. atque $\zeta = 2bc^n$, $\eta = \frac{2n}{3}.\ 2bc^{n-1}$, $\theta = \frac{2n.\ 2n-2}{3.\ 5} 2bc^{n-2}$, $\iota = \frac{2n.\ 2n-2.\ 2n-4}{3.\ 5.\ 7} 2bc^{n-3}$. etc.

§. 16. Inuenientur igitur litterae A, B, C, etc. vt sequitur $A = -\frac{2b(2n+1)pc^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{-1}.\ l-1}$, atque $B = -\frac{2b(2n+1)(2n-1)pc^{n-\frac{3}{2}}}{1.\ 3.\ \sqrt{-1}.\ l-1}$, $C = -\frac{2b(2n+1)(2n-1)(2n-3)pc^{n-\frac{5}{2}}}{1.\ 3.\ 5.\ \sqrt{-1}.\ l-1}$ etc. Atque $E = bc^n$, $F = \frac{bnc^{n-1}}{1}$, $G = \frac{b.n.(n-1)}{1.\ 2.}c^{n-2}$, $H = \frac{b.n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}c^{n-3}$ etc. Pro curua itaque quaesita reperitur ista aequatio $ds = \frac{-2bp\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{-1}.\ l-1}(\frac{2n+1}{1}c^{n-\frac{1}{2}} + \frac{(2n+1)(2n-1)}{1.\ 3}c^{n-\frac{3}{2}}x + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{1.\ 3.\ 5}c^{n-\frac{5}{2}}x^2 +$ etc.$) + b\,dx(c^n + \frac{n}{1}c^{n-1}x + \frac{n.(n-1)}{1.\ 2}c^{n-2}x^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}c^{n-3} +$ etc.$) = b(c+x)^n dx - \frac{2bpc\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{-1}.\ l-1}(\frac{2n+1}{1.\sqrt{c}} + \frac{(2n+1)(2n-1)x}{1.\ 3.\ c\sqrt{c}} + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)x^2}{1.\ 3.\ 5.\ c^2\sqrt{c}} +$ etc.$)$

§. 17. Quanquam hic pro curua data haec tantum aequatio $dr = bt^n dt$ est assumta, tamen ad omnes prorsus curuas exemplum hoc accommodari potest. Sit enim curua data ista exposita aequatione $dr = At^\alpha dt + Bt^\beta dt + Ct^\gamma dt +$ etc. Tum quaeratur aequatio pro curua quaesita primo ex hac tantum aequatione $dr = At^\alpha dt$, et sit aequatio resultans $ds = P\,dx$. Deinde sumatur aequatio $dr = Bt^\beta dt$ proueniatque aequatio $ds = Q\,dx$. Similiter ex aequationibus $dr = Ct^\gamma dt$, $dr =$

$dr = Dt^{\delta}dt$ etc. emergant iſtae $ds = R\,dx$, $ds = S\,dx$ etc. erit aequatio pro curua quaeſita haec $ds = (P + Q + R + S + \text{etc.})dx$, ſi ſcilicet curua data habuerit aequationem $dr = At^{\alpha}dt + Bt^{\beta}dt + \text{etc.}$

§. 18. Apparet etiam ex aequatione §. 16. ſi fuerit $n = -\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ etc. feriem abrumpi, atque ſtatim haberi aequationem finitam; ſit $dr = bt^{-\frac{1}{2}}$, curua ſcilicet data cyclois, erit $n = -\frac{1}{2}$ atque $ds = \frac{bdx}{\sqrt{(c+x)}}$. Ex quo cognoſcitur curuam ſuperiorem annexam cum data inferiore eandem curuam continuam nimirum cycloidem conſtituere.

DE SVPERFICIEBVS AD AEQVATIONES LOCALES REVOCATIS, VARIISQVE EARVM AFFECTIONIBVS.

AVTHORE

Iacobo Hermanno.

Tabula IV.

Geometrae de aliis Superficiebus quam de planis, aut etiam de his quae ex reuolutione figurae cuiusque curuilineae circa lineam quandam in gyrum actae, vix cogitarunt ſubinde; tametſi infinities infinita genera dantur, ad quae ſpecies illae reuocari non poſſunt. Aequationes locales, quibus omnium ſuperficierum indoles exponi debet, tres omnino indeterminatas inuoluunt, cum tamen aequationes ad lineas curuas