1738

De curvis rectificabilibus algebraicis atque traiectoriis reciprocis algebraicis

Leonhard Euler

DE CVRVIS RECTIFICABILIBVS ALGEBRAICIS ATQVE *TRAIECTORIIS RECIPROCIS ALGEBRAICIS.*

Auct. Leonh. Eulero.

QVanquam admodum facile eſt innumeras dare curuas algebraicas, quae rectificari poſſunt, quaerendis vel euolutis vel cauſticis curuarum algebraicarum; tamen ſi ordines curuarum conſideremus, rariſſime in iis occurrunt, quae rectificationem admittant. In ordine linearum ſecundo, qui ex ſectionibus conicis conſtat, nulla eſt huiusmodi; in tertio duae habentur rectificabiles, quantum quidem conſtat. Cum autem ante aliquot annos in inueniendis traiectoriis reciprocis algebraicis occupatus eſſem, methodum Celeb. *Ioh. Bernoulli* primum ſequutus diligentiſſime curuas rectificabiles anquirebam, vt iis ad propoſitum vterer. Detexi etiam in ordine ſexto curuam rectificabilem, quae mihi praebebat traiectoriam algebraicam ordinis quarti, eaque ſatisfeci quaeſtioni tum agitatae, de exhibendis ſimplicioribus traiectoriis reciprocis algebraicis. Inueni quoque multas aequationes generales curuas rectificabiles dantes, ex quibus in promtu erat omnes curuas rectificactificabiles ſimpliciores eruere. Haec iterum nunc perluſtrans deductus ſum ad generaliſſimam quandam aequationem curuas rectificabiles omnes in ſe continentem. Inſunt enim in ea plures quantitates vniuerſales, pro quibus quicquid ſubſtituatur, curua rectificabilis prodit. Sit quantitas quaedam variabilis z, cuius differentiale ponatur conſtans, ſintque P et Q huius variabilis z functiones quaecunque ſaltem algebraicae. Si iam hoc modo conſtruatur curua vt eius abſciſſa, quae ponatur x, ſumatur aequalis $P + \frac{dQ(dP^2 - dQ^2)}{dQddP - dPddQ}$ et applicata quam voco $y = \frac{(dP^2 - dQ^2)^{\frac{3}{2}}}{dQddP - dPddQ}$. Erit huius curuae longitudo s appellata aequalis $Q + \frac{dP(dP^2 - dQ^2)}{dQddP - dPddQ}$. Semper igitur quicunque valores literis P et Q tribuantur, curua erit rectificabilis et algebraica. Demonſtrationem huius dare non opus eſſe iudico, cuilibet enim, ſi ſumſerit differentialia coordinatarum x et y et curuae s, innoteſcet eſſe $dx^2 + dy^2 = ds^2$ labore tantum eſt opus nullo autem artificio.

Haec forma quidem latiſſime patet, ſed habeo tamen aliam adhuc multo generaliorem, imo generaliſſimam ſequentem. Deſignantibus vt ante literis maiuſculis L, M et N functiones quaſcunque variabilis z, ſi ſumantur

$$x = L + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dLdN + dM\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)})}{dLdNddL + dMdNddM - dL^2ddN - dM^2ddN + (dLddM - dMddL)\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}}$$

$$y = M + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dMdN + dL\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)})}{dLdNddL + dMdNddM - dL^2ddN - dM^2ddN + (dLddM - dMddL)\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}}$$

erit longitudo curuae reſpondentis

$s = N$

$$z = N + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dL^2 + dM^2)}{dL\,dN\,ddL + dM\,dN\,ddM - dL^2\,ddN - dM^2\,ddN + (dL\,ddM - dM\,ddL)\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}}$$

Formulae hae in praecedentes mutantur, ſi ponatur $M = 0$, ſunt igitur illae in his contentae.

Facile perſpicitur, ſi literae L, M et N non ſolum ſignificent quantitates algebraicas, ſed etiam trancendentes quasque, in iſtis formulis omnes prorſus contineri curuas tam algebraicas quam tranſcendentes. Quia enim hae functiones L, M et N nullo modo a ſe inuicem ſunt pendentes, nulla excogitari poteſt aequatio inter x et y, ſiue ſit algebraica ſiue tranſcendens, quae non ad praeſcriptas formulas eſſet reducibilis.

Simili modo ſi manente N functione vniuerſaliſſima, ita tamen vt $\frac{dN}{dz}$ ſit functio algebraica L vero et M denotent functiones algebraicas, omnes prorſus curuae algebraicae in formulis datis comprehenduntur; erunt autem eae rectificabiles ſi N aſſumatur functio algebraica, at vero ſi N non fuerit functio algebraica, ſed tranſcendens ſeu a quadratura curuae cuiusdam pendens, curua reſultans non erit rectificabilis, ſed eius rectificatio pendebit a quadratura eius curuae. Hoc igitur modo ſoluitur etiam celebre illud problema multum inter Geometras agitatum, poſtulans methodum quadraturas curuarum ad rectificationes curuarum algebraicarum reducendi, cuius ſolutiones duae datae ſunt in Actis Lipſienſibus a Viris Celeberleberrimis *Iac. Hermanno* et *Ioh. Bernoullio*. Ex iſtis vero formulis ita ſoluetur; ſint curuae, cuius quadratura ad rectificationem curuae algebraicae eſt reducenda, coordinatae t et v quarum vtraque ſit functio algebraica ipſius z. Sumatur $N = R + a\int v\,dt$, vbi R etiam deſignet functionem ipſius z algebraicam quamcunque. Hoc poſito dabunt formulae traditae omnes curuas algebraicas, quarum rectificatio a quadratura curuae propoſitae, ſcilicet a $\int v\,dt$ pendent, ſi quidem L et M aſſumantur, vt iam eſt monitum, functiones algebraicae ipſius z. Alter vſus harum formularum, quem hic exponere conſtitui, reſpicit ad inuentionem traiectoriarum reciprocarum; reperitur enim ex iis aequatio vniuerſaliſſima omnes traiectorias reciprocas in ſe complectens, quae etiam facillime ita reſtringitur, vt algebraicas tantum easque omnes praebeat.

Tabula VII. Fig. 6. Nititur autem haec inuentio theoremate *Bernoulliano*, quo ex rectificatione curuarum diametrum habentium conſtruuntur traiectoriae reciprocae, hoc modo: MAM eſt curua huiusmodi diametrum habens AP, et verticem A in quo tangens AQ, eſt perpendicularis ad diametrum AP. Per huius curuae ſingula puncta M ducantur rectae diametro parallelae, in iisque ſumantur MN aequales arcubus AM, conſtituent puncta N curuam NAE traiectoriam reciprocam, cuius axis conuerſionis eſt ipſa diameter PAB. Huius curuae ſi ſumatur ab-

ſciſſa

ſciſſa AQ et applicata QN, erit $AQ = PM$ et $QN = AM - AP$. Quamobrem ſi curuae MAM coordinatae AP et PM eaedem ſumantur, quae ante vocatae erant x et y, habebitur ſtatim aequatio pro traiectoria reciproca EAN. Quia vero non omnis curua in locum MAM collocari poteſt, in aequationibus ſupra traditis literae L, M et N quodammodo reſtringi debent, vt tantum curuas ad inſtitutum accommodatas praebeant. Cum omnes lineae AP, PM et AM ſint functiones ipſius z, ita eae in z determinentur, vt ſumto z affirmatiuo prodeat curuae MAM ramus dexter, at poſito z negatiuo vt prodeat ramus ſiniſter. Ad hoc requiritur, vt AP quia in vtroque caſu eadem manet, ſit functio par ipſius z, ſeu functio quae immutata manet, etiamſi z fiat negatiuum. At PM et AM eſſe oportet functiones ipſius z impares, i. e. quae fiant negatiuae mutato z in $-z$. Quamobrem eſſe debet L functio par ipſius z M vero et N functiones impares. His enim poſitis abſciſſa aequabitur functioni pari, applicata vero et ipſa curua functionibus imparibus. Nam dL erit functio impar, ddL functio par, dM et dN functiones pares, atque ddM et ddN functiones impares. Ex quo perſpicietur lineas AP, PM et AM requiſitam habituras eſſe proprietatem. Erit igitur

$$AQ = M + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dMdN + dL\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)})}{dLdNddL + dMdNddM - dL^2ddN - dM^2ddN + (dLdM - ddMddL)\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}}$$

Atque traiectoriae reciprocae EAN applicata erit

$$QN = N - L + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dL^2 + dM^2 - dLdN - dM\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)})}{dLdNddL + dMdNddM - dL^2ddN - dM^2ddN + (dLddM - dMddL)\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}}$$

Ex hac conſtructione fluent omnes traiectoriae reciprocae, ſi loco L, M et N ſubſtituantur functiones non ſolum algebraicae, ſed etiam tranſcendentes. Algebraicae vero traiectoriae reciprocae omnes habebuntur, ſi eae quantitates fuerint functiones algebraicae, et quidem vt requiritur L functio par, atque M et N functiones impares.

Notandum porro eſt etiam $\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}$ eſſe debere functionem ipſius z imparem quemadmodum dL. Ponatur igitur $\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)} = dL - dS$, vbi dS eſt functio impar ipſius z, adeoque S functio par erit $\frac{dN^2 - dM^2 + dS^2}{2dS} = dL$, ex quo erit dL functio impar vt requiritur, et $\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)} = \frac{dN^2 - dM^2 - dS^2}{2dS}$. Erit igitur $L = \frac{1}{2}\int \frac{dN^2 - dM^2}{dS} + \frac{1}{2}S$. Quamobrem vt traiectoria reciproca fiat algebraica, oportet $\frac{dN^2 - dM^2}{dS}$ eſſe integrabile. Erit autem abſciſſa $AQ = M + \frac{(dN^2 - dM^2 - dS^2)((dN + dM)^2 - dS^2)}{4dS(dSddM + dSddN - dNddS - dMddS)}$ et $QN = N - \frac{1}{2}\int \frac{dN^2 - dM^2}{dS} - \frac{1}{2}S + \frac{(dN^2 - dM^2 - dS^2)(4dMdN + (dN - dM - dS)^2)}{4dS(dSddM + dSddN - dNddS - dMddS)}$. Quamdiu autem $\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}$ manet quantitas ſurda, non opus eſt peculiari determinatione, eſt enim radix quadrata ex functione pari non quadrato tam functio par quam impar.

Spe-