1738

De communicatione motus in collisione corporum

Leonhard Euler

prorſus inſeparabiles videri queant, conſtrui poterunt. Et ſane *Hermannus*, cum aequationem §. 28. cum eo communicaſſem, eam ſtatim ope methodi ſuae ſeparauit, eandemque conſtructionem inuenit, quam ego a poſteriori cognitam hic appoſui. Dubitari itaque nequit, quin Vir Celeb. plurium aequationum, quae adhuc inſeparabiles habitae ſunt, ſeparationem ſit daturus.

DE COMMVNICATIONE MOTVS IN COLLISIONE CORPORVM.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

EXperientia conſtat corporum in ſe mutuo incurrentium motus immutari; quaeſtio igitur hinc nata eſt, quae ſit huius alterationis motus cauſa. Dubitari quidem non poteſt, quin in ipſo corporum conflictu ratio huius phaenomeni inueſtigari debeat; corpus enim omne ſiue quieſcens ſiue motum perſeuerat in ſuo ſtatu, niſi a vi quapiam cieatur et ex ſtatu ſuo deturbetur. Quamobrem quaeſtio huc eſt reducta, vt definiatur, qua in re inſit haec vis et quanta ſit, quae motus mutationem in conflictu corporum producere valet. Praeterea etiam determinari debet, quan- Tabula VII.

tam

tam in collisione vtriusque corporis motus mutationem subeat.

§. 2. Inuentae sunt iam superiore seculo a viris maxime meritis *Wrenno*, *Wallisio* et *Hugenio* regulae communicationis motus ex quibus cognoscitur, duobus corporibus in se inuicem incurrentibus, quanta futura sit vtriusque corporis post conflictum celeritas. Regulae etiam istae experimentis egregie confirmantur, vt de earum veritate nefas esset dubitare. Variis tamen incedentes viis illi ad has regulas peruenerunt, et postmodum ab aliis plures ac diuersae inuentae sunt demonstrationes. Harum autem nulla, quantum mihi videtur, est genuina, sed deriuatae sunt omnes ex alienis principiis.

§. 3. Accedit ad hoc, quod nullus adhuc ipsam alterationis motus causam monstrauerit, neque quomodo corpora in se mutuo agere possint, explicuerit. Hanc ob rem operae pretium fore existimaui, istam dissertationem proponere, in qua regulae communicationis motus ex certissimis mechanicae principiis deducantur; simulque ostendatur, quomodo in ipsa collisione corpora in se mutuo agant motusque immutent.

§. 4. Accipio hic tanquam indubitatum principium, omnem motus vel diminutionem vel augmentationem vel directionis mutationem produci a poa potentiis, idque successiue non saltu. Facile hoc quoquam concedetur: nihil enim contra id afferri possit, nisi ipsa motus in collisione communicatio, in qua an natura non faciat saltum a multis est disputatum. Statuo igitur in concursu duorum corporum vtriusque corporis celeritatem a potentia inter corpora illa delitente immutari.

§. 5. Corpora in se mutuo impingentia vim actionis potentiae similem sentire elucescit praecipue in mollioribus corporibus vt cera vel argilla: facile enim perspicitur impressiones, quas sunt consequuta, non subito sed pedetentim esse factas; ex quo etiam ad duriora corpora concludere licet, successiue et per gradus mutationem fieri. Omnia autem corpora conflictu sibi mutuo impressiones imprimunt, quanquam hoc non de omnibus apparet. Sunt enim corpora, quae impressionem seu mutatam in conflictu formam non retinent, sed pristinam formam recuperant, quae elastica vocantur; illa vero quae mutatam in conflictu formam seruant, mollia.

§. 6. Inter haec duo genera innumerabiles continentur gradus intermedii; eorum scilicet corporum, quae impressiones acceptas ex parte tantum, non penitus, exuunt, ad quorum classem sine dubio omnia quae in mundo sunt corpora, pertinent. Neque enim perfecte reperietur corpus elasticum neque perfecte molle, sed omnia medii inter

inter haec generis deprehenduntur. Corpora porro tam elasticitate destituta seu mollia, quam elastica etiam differunt ratione duritiei, secundum quam alia aliis magis vel minus sunt dura. Durius autem vocatur corpus quod ab eadem vi minorem impressionem accipit, ex hocque intelligitur, quid sit corpus perfecte durum, quod nimirum a quaque vi finita infinite paruam tantum impressionem accipiat. Prout ergo haec impressio vel restituitur vel secus, corpus perfecte durum vel ad elasticorum vel non elasticorum classem pertinebit

§. 7. Quando duo corpora elastica inter se collidunt alterum comprimit alterum, et sibi impressiones infligunt; postmodum vero se rursus in pristinam formam restituunt. Quamdiu corpora comprimuntur vel vtrumque corpus vel alterutrum saltem de motu suo amittit. Quando vero se restituunt, tum etiam motus in compressione amissus restituitur, sed aliter inter corpora distribuitur. In non elasticorum conflictu autem impressionem quam vtrumque accepit maximam retinet. Ad motum igitur corporum elasticorum post conflictum determinandum, requiritur, vt vtriusque corporis inuestigetur celeritas tum quando sunt prorsus restituta. Pro corporibus vero non elasticis, inueniri debet vtriusque corporis celeritas quam habet in statu maximae impressionis.

§. 8. Quemadmodum ad omnem motum generandum opus est potentia, ita etiam ad partes

cor-

corporis comprimendas et impreſſiones faciendas potentia requiritur; corpus enim omne vi inertiae vti motui ita quoque impreſſioni accipiendae reſiſtit, quae a potentia ſuperari debet. Hanc impreſſionis accipiendae difficultatem vt clarius percipiamus, corporibus annexa concipio elaſtra in loco, quo impreſſiones recipiunt. Loco igitur impreſſionum elaſtra haec comprimi pono; eodem enim redit ſiue id, quod comprimitur, ſit ipſius corporis pars, ſiue elaſtrum corpori adiunctum.

§. 9. Inter corpora igitur A et B concurrentia pono elaſtrum *ab*, quod dum pergunt ad ſe inuicem accedere comprimatur. Haecque compreſſio elaſtri tamdiu durat, quoad motus, quo ad ſe inuicem accedunt, vim elaſtri poteſt ſuperare, tunc ergo elaſtrum erit in ſtatu maximae compreſſionis. Deinde ſi corpora ſunt elaſtica, pono elaſtrum hoc interpoſitum vi ſeſe reſtituendi pollere, ſi vero non ſunt elaſtica, concipio, elaſtrum cum in ſtatum maximae compreſſionis eſt reductum, ſubito omnem vim ſeſe expandendi amittere. Fig 1.

§. 10. Hac ratione conflictum conſiderantes poterimus ex legibus Mechanicis, quas potentiae in alterandis motibus ſeruant, mutationes motuum in colliſione corporum ſupputare. Notum enim eſt quantam celeritatem data potentia in datum corpus agens dato tempore generare, nec non ſi fuerit motus corporis potentiae contrarius, deſtruere valeat. Elaſtrum autem inter corpora concurrentia conceptum, dum ſe expandere conatur vices potentiae ſubit, et quo id magis comprimitur, magis etiam corporum motus diminuitur.

§. 11. Quo magis elaſtrum iſtud comprimitur, eo etiam maiorem habeat oportet vim ſeſe expandendi, ſed quanta ea ſit in quolibet compreſſionis gradu, non eſt opus vt ſciamus; quamcunque enim ſeruet legem, eadem tamen denique poſt conflictum prodit motus diſtributio. Quantitatem ergo vis elaſtri expanſiuae generali litera vtcunque variabili P deſignabo et a nulla alia pendente. Scilicet P mihi erit pondus, cuius niſui deorſum aequalis eſt vis elaſtri expanſiua.

Fig. 2. §. 12. Incurrat corpus A in elaſtrum AC vim P ſe expandendi habens, celeritate tanta quanta ex altitudine v graue cadendo acquirit; progrediatur puncto temporis per ſpatiolum $Aa = dx$, ſitque celeritas quam in a habebit genita ex altitudine $v + dv$. Perſpicuum eſt ſi eſſet $P = A$ corpus eodem modo retardatum iri, quo ſurſum proiectum a vi grauitatis retardatur, fore nempe $dv = -dx$, ſi eſſet $P = nA$ foret $dv = -Pdx : A$, ſi vis elaſtri motui corporis eſt contraria: ſed ſi motum promoueat, erit $dv = +Pdx : A$.

Fig. 3. §. 13. Moueatur corpus A in linea AO celeritate altitudini a debita, corpus vero B minori cele-

celeritate in eadem directione versus O ex altitudine b oriunda, occurrent haec corpora sibi inuicem, fietque conflictus. Pono ea tum in se mutuo agere incipere, cum distantia centrorum fuerit $=f$. Ipsis igitur corporibus vt punctis consideratis interpositum concipio elastrum longitudinis f. Sit id AB, quando ergo corpus A reperietur in A, et B in B conflictus incipiet, elastrumque, quia A celerius mouetur quam B, magis continuo comprimetur. Fig. 4.

§. 14. Reductum iam sit elastrum ad longitudinem PQ, quam pono $=f-x$. Sit celeritas quam corpus A cum in P venerit habet, ex altitudine v orta, celeritasque corporis B in Q ex altitudine u, et vis elastri quam nunc habet se expandendi sit $=P$. Tempusculo quam minimo progrediatur corpus A per elementum $Pp=dr$ et corpus B per $Qq=ds$; sitque altitudo exhibens celeritatem quam corpus A in p habebit $=v+dv$, et respondens altitudo celeritati corporis B in q $=u+du$. Erit $pq=PQ+Qq-Pp=f-x+ds-dr$, sed pq aequatur ipsi PQ vna cum suo differentiali, i. e. $pq=f-x-dx$. Habebitur consequenter $dx=dr-ds$.

§. 15. Quia elementa Pp et Qq simul ponuntur percursa, erunt ipsis celeritatibus, quibus percurruntur proportionalia. Quocirca est $dr:ds=\sqrt{v}:\sqrt{u}$, sunt enim ipsae celeritates vt radices quadratae

dratae ex altitudinibus generantibus. Siue habetur $\frac{dr}{\sqrt{v}} = \frac{ds}{\sqrt{u}} = \frac{dr-dx}{\sqrt{u}}$; ex hac aequatione reperitur $dr = \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{v}-\sqrt{u}}$, atque $ds = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}-\sqrt{u}}$.

§. 16. Corpus vero A dum progreditur per $Pp = dr$ contrariam habet vim elastri expansiuam P, eritque propterea ex §. 12. $dv = -Pdr:A$. Simili modo corpus B per $Qq = ds$ transiens a vi elastri P acceleratur eritque $du = +Pds:B$. Ex his aequationibus coniunctis reperitur $-Adv-Bdu = Pdr-Pds = Pdx$. Sumantur integralia erit const. $-Av-Bu = \int Pdx$, fiat autem $\int Pdx = o$, si ponatur $x = o$. Ad constantem determinandam ponatur $x = o$, eritque tum $v = a$ et $u = b$, est propterea const. $= Aa+Bb$. Habemus igitur istam aequationem $A(a-v)+B(b-u) = \int Pdx$.

§. 17. Resumamus aequationes $Adv = -Pdr$, et $Bdu = Pds$, substituamusque pro dr et ds valores inuentos, erit $Adv = \frac{Pdx\sqrt{v}}{\sqrt{u}-\sqrt{v}}$ et $Bdu = \frac{Pdx\sqrt{u}}{\sqrt{v}-\sqrt{u}}$ Habetur ergo ex illa $Pdx = -\frac{Adv\sqrt{v}+Adv\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$. Erat autem ante $Pdx = -Adv-Bdu$. Ex hisque prodit $Adv\sqrt{u} = -Bdu\sqrt{v}$ seu $\frac{Adv}{\sqrt{v}} = -\frac{Bdu}{\sqrt{u}}$. Qua integrata obtinetur $A\sqrt{v}+B\sqrt{u} =$ const. $= A\sqrt{a}+B\sqrt{b}$. Talis enim esse debet constans vt etiam aequatio ante conflictum verum praebeat.

§. 18. Duas ergo inuenimus aequationes istas $A(a-v)+B(b-u) = \int Pdx$; atque $A(\sqrt{a}-\sqrt{v})+B(\sqrt{b}-\sqrt{u}) = o$. Ex quibus celeritates

cortes corporum in quouis compressionis statu durante ipso conflictu inueniri possunt. Ad hoc vero requiritur, vt P sit cognita functio ipsius x, quo possit integrale sumi et in eo pro x status compressionis assumtus substitui.

§. 19. Hic autem praecipue celeritates vtriusque corporis post conflictum desiderantur. Quaeramus eas primo pro corporibus elasticis, hocque in casu finitus est conflictus, quando fit iterum $x = o$, adeoque $\int P dx = o$. Ex quo erit $A(a-v) = -B(b-u)$. Diuidatur altera aequatio per hanc, prodibit $\sqrt{a} + \sqrt{v} = \sqrt{b} + \sqrt{u}$. Atque ex postremis his duabus aequationibus facile eruitur $\sqrt{v} = \sqrt{a} + \frac{2B(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{A+B}$ et $\sqrt{u} = \sqrt{b} + \frac{2A(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{A+B}$. Hic $\sqrt{v}$ et $\sqrt{u}$ denotant ipsas corporum A et B celeritates, quas post conflictum habebunt; at vero $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ celeritates eorum ante conflictum.

§. 20. Si corpora fuerint omni elasticitate destituta, conflictu finietur, quando elastrum est maxime compressum, hoc euenit si est $dx = o$ seu $dr = ds$, i. e. vbi $v = u$. Aequales ergo corpora non elastica habebunt post conflictum celeritates, adeoque coniuncta manebunt. Erit autem eorum communis celeritas $\sqrt{v}$ vel $\sqrt{u} = \frac{A\sqrt{a}+B\sqrt{b}}{A+B}$.

§. 21. Posui in his vtrumque corpus secundum eandem plagam moueri, hoc vero non impedit quo minus hae regulae sint vniuersales. Notum

tum enim est plagam mutari, mutata celeritate in negatiuam. Ita si poneretur $-Vb$ loco Vb haberentur regulae communicationis motus pro corporibus in plagas oppositas motis.

§. 22. Simili modo inueniri possunt regulae communicationis motus pro corporibus non perfecte elasticis: ad hoc vero requiritur, vt et nota sit lex vis elasticae elastri, et quousque se restituere valeat. His autem definitis facile erit motum vtriusque corporis post conflictum determinare.

§. 23. Si corpora oblique in se impingant, aut si plura corpora simul collidant, quos post conflictum habitura sint motus, hic esset superfluum inuestigare. Propositum enim tantum erat hic regularum collisionis genuinam dare demonstrationem; magis autem compositi casus ex his regulis resoluuntur, eatenusque sunt extra dubium positi, quatenus ab his simplicibus pendent.

DE