1738

Quomodo data quacunque curva inveniri oporteat aliam quae cum data quodammodo iuncta ad tautochronismum producendum sit idonea

Leonhard Euler

QVOMODO DATA QVACVNQVE CVRVA INVENIRI OPORTEAT ALIAM, QVAE CVM DATA QVODAMMODO IVNCTA AD TAVTOCHRONISMVM PRODVCENDVM SIT IDONEA.

Auct. L. Eulero.

1.

MEditanti mihi ante quadriennium de curua tautochrona ad Horologium Domini *Sullii* accommodata, vid. Comm. A. 1727. occurrit aliud quoddam oscillationum genus, quod duabus continetur curuis, et tale est, vt data earum altera, altera semper inueniri possit. Quamobrem quaestio de hoc tautochronismo indeterminata est, et infinitas admittit solutiones. Quae proprietas, quae mihi elegans esse, et vsum quendam fortasse in praxi habere posse visa est; praetereaque ipsa solutio, quae problematis traiectoriarum reciprocarum similis est solutionis, et propter id peculiarem hucusque non multum vsitatum soluendi modum requirit, me impulerunt, vt meam methodum ad huiusmodi problemata soluenda admodum idoneam iterum proponerem, huicque casui accommodatam traderem. Tabula V.

§. 2. Originem autem duxit praesens problema ex certo quodam oscillandi genere, quod hic Tabula V. Fig 1.

hic ante omnia exponere conuenit. Concipio trochleam ABP circa axem per centrum eius A transeuntem mobilem. Huic trochleae duae affirmatae sint laminae incuruatae AD, AE, filis circumductae, quae laminas semper deserant, vbi tangentes sunt verticales, vt in D et E, vnde verticaliter dependeant tracta a potentiis vi inertiae destitutis, ne vi opus sit ad eas mouendas. Sit situs FDAEG status aequilibrii, ducatur ex A verticalis ABC, quae vna cum trochlea circa A moueri concipiatur; Ita vt machina tum sit in quiete, cum recta ABC fuerit verticalis. Ex hoc igitur iam ratio distantiarum punctorum D et E a recta AC determinatur, si datae fuerint potentiae in F et G applicatae.

§. 3. Detorqueatur machina ex statu quietis in situm quemuis RMANS, vt recta quae ante fuerat verticalis AC, in situm AQ perueniat, angulo CAQ percurso. Tangent ergo fila MR, NS, a datis potentiis sollicitata laminas in M et N, vt sint verticalia. Ex hoc perspicuum est vim potentiae F in R translatae ad vertendam trochleam esse auctam, alteram vero G in S translatam esse diminutam. Ex quibus consequitur, machinam in RMANS positam nequaquam in quiete permanere posse, sed ad situm FDAEG, in quo ponitur aequilibrium, perpetuo tendere. Reipsa igitur, cum nihil impediat, in situm aequilibrii feretur; idque motu, quia continuo versus

eum

eum pellitur, accelerato: eo igitur ſitu quieſcere non poterit, ſed ex eo in contrariam plagam excurret, et ita perpetuo oſcillationes peraget.

§. 4. Machina hac deſcripta, hoc eſt, quod mihi propoſui, problema. *Quomodo laminae* AD, AE *ſint incuruandae, vt oſcillationes reddantur iſochronae, ſeu vt omnes eodem tempore abſoluantur.* Manifeſtum eſt, problema praeſens ex eorum eſſe numero, quae indeterminata appellantur, propter duas curuas AD et AE determinandas, quarum vna tantummodo ex conditione problematis determinatur. Problema igitur tale eſt, vt data harum curuarum altera, altera inueniri poſſit. Erunt deinde ſine dubio caſus, quibus hae duae curuae ſunt inter ſe aequabiles et ſimiles. Quamobrem hanc quaeſtionem bipartitam propono, vnde duplex naſcitur ſolutio. Primo nempe methodum tradam, *qua data altera curuarum altera inueniri queat*; deinceps, *quomodo ii eruendi ſint caſus, quibus ambae curuae ſint inter ſe aequales et ſimiles.*

§. 5. Ad ſolutionem harum quaeſtionum animum attendere conuenit ad duo puncta curuarum AD et AE homologa, quae mihi ſunt ea, in quibus ſimul laminae a filis tanguntur, vt D et E, item M et N. Horum punctorum haec eſt mutua relatio, vt diſpoſitis curuis ad communem de-

 bitum-

bitumque axem A Q, tangentes in iis punctis ſint parallelae vt M R, N S. In ipſo ſtatu aequilibrii FDAEG ſunt eae tangentes ipſi axi parallelae, in aliis poſitionibus non item, ſed faciunt cum axe angulum; ex quo *angulus declinationis* C A Q, ſeu qui metitur diſtantiam ſitus machinae a ſtatu quietis cognoſci poterit, ſunt enim inter ſe aequales. Quia enim N S parallela eſt A C, erit angulus, quem S N producta cum axe Q A conſtituit, aequalis angulo C A Q.

Fig. 2. §. Vt hoc diligentius perſequar, ſint AM et AN duae curuae quaeſitae, quarum axis communis ſit A C. Capiantur in iis duo puncta homologa M et N, erunt tangentes M R, N S inter ſe parallelae. Ducantur applicatae MP, N Q, erit ſumma angulorum P M R + Q N S aequalis duobus rectis. Siue ducantur normales MT, N A in curuas, erunt anguli P M T, Q N V inter ſe aequales. Sed quia ſubnormales P T, Q V, ad contrarias plagas diriguntur, erit angulorum P M T, Q N V, alter alterius negatiuus. Porro cum anguli tangentium cum axe A C ſint aequales angulis PMT, QNV, ſequitur angulum declinationis machinae aequalem eſſe alterutri angulorum normalibus et applicatis contentorum.

Fig. 3. §. 7. His expoſitis ad ipſius machinae motum me conuerto. Peragat trochlea A B O oſcillationes, et dum ad ſtatum naturalem tendit, peruenerit

venerit in situm RMANS, et axis in AQ, distans a verticali AC angulo CAQ, seu BAO. Insit in puncto O velocitas ex altitudine v oriunda, qua circumferentia trochleae conuertitur. Sit pondus trochleae $= P$, erit vis viua, quae inest in trochlea, si ea fuerit vbique aequaliter crassa et grauis, $= \frac{1}{2} P v$. Nam si omnes trochleae partes eadem velocitate ex alt. v acquisita mouerentur, tum foret vis viua $= P v$. Cum autem partes, quo centro sint propinquiores, eo tardius moueantur, vis viua dimidio fit minor, vt computum instituenti liquebit.

§. 8. Progrediatur puncto temporis machina in situm $r m A n s$, axisque AQ in Aq, vt ergo angulo OAo angulus declinationis diminuatur. Punctum igitur M perueniet in m, et N in n, eritque ang. $OAo = MAm = NAn$ propter vniformem totius machinae motum angularem. Interim potentia in R applicata descendit in r, at altera in S ascendit in s; eritque ob $MR = mr$, lineola Rr parallela et aequalis lineolae Mm. Et simili modo Ss parallela erit et aequalis elemento Nn. Ducantur horizontales, $r\varrho$, $S\sigma$ nec non $m\mu$, $N\nu$, quae producantur in I et K ad verticalem AC vsque. Transitu hoc per Oo aucta erit velocitas circumferentiae trochleae, vt sit nunc $=$ veloc. ex alt. $v + dv$ acquisitae. Vnde vis viua trochleae in praesenti situ est $= \frac{1}{2} P(v + dv)$.

 §. 9.

§. 9. Abſoluto ergo angulo OAo, vis viua trochleae aucta eſt elemento $\frac{1}{2}Pdv$, quod incrementum ortum ſuum debet potentiis in R et S applicatis. Quamobrem inueſtigabo quanta hac temporis particula ab his potentiis genita ſit vis viua. Sit pondus potentiae in R aequiualens $=R$ pondus potentiae in S aequiualens $=S$. Perſpicuum eſt a potent. R deſcenſu per $R\varrho$, genitam eſſe vim viuam $R.R\varrho$ ſeu $R.M\mu$. At vero a potentia S propter aſcenſum per σs deſtructa eſt vis viua $S.s\sigma$ ſeu $S.n\nu$. His coniunctis generata habebitur vis viua $=R.M\mu-S.n\nu$. Huic vi genitae, aequale eſſe debet incrementum reipſa deprehenſum $\frac{1}{2}Pdv$. Quocirca haec acquiritur aequatio, $\frac{1}{2}Pdv=R.M\mu-S.n\nu$.

§. 10. Propter triangula ſimilia $Mm\mu$, mAI, et $Nn\nu$, ANK, erit $M\mu=mI.Mm:Am$ et $n\nu=NK.Nn:AN$. Eſt autem $Mm:Am=Oo:AO$. Ergo $M\mu=mI.Oo:AO$; et $n\nu=NK.Oo:AO$. Propterea haec emergit aequatio $\frac{1}{2}P.AO.dv=R.mI.Oo-S.NK.Oo$. Eſt vero $Oo:AO=$ ang. OAo. ergo $\frac{1}{2}P.dv=(R.mI-S.NK)OAo$. Hic autem angulus OAo eſt elementum anguli BAO, qui aequalis eſt angulo, quem applicata curuae AM vel AN in axem AQ ducta cum normali in curuam conſtituit. Huius igitur anguli elementum aequatur elemento OAo. Ex quo apparet elementum dv in quantitatibus ex curuis datis exprimi, neque lineas vtriusque curuae inter ſe eſſe per permixtas. Datis itaque curuis laminarum hoc modo motus trochleae inuenietur, et inde oſcillationes, de quibus iudicari poterit, vtrum ſint iſochronae, an ſecus.

§. 11. Conſideremus nunc eam conditionem, qua oſcillationes trochleae iſochronae eſſe debent. Accipiamus in circumferentia trochleae punctum, quod in infimo loco ſtat machina quieſcente, id quod eſt punctum O. Neceſſe ergo eſt, vt et hoc punctum oſcillationes iſochronas conficiat, ſeu vt aequalibus temporibus, vbicunque motum inchoauerit, ad infimum punctum B perueniat. Ad hoc oportet, vt accelerationes puncti O verſus B ſint vt viae deſcribendae, donec ad B perueniant, id eſt, vt anguli OAB. Ex quo fluit fore dv vt BO.Oo, pono autem adv=BO.Oo.

§. 12. Valore hoc loco dv in ſuperiore aequatione ſubſtituto, haec prouenit aequatio $\frac{1}{2}$P. AO.BO.Oo=R.a.mI.Oo−S.a.NK.Oo. Diuidatur per Oo, et multiplicetur per 2. orietur P. AO.BO=2R.a.mI−2S.a.NK. Quae a differentialibus quantitatibus prorſus eſt libera. Mutetur paululum conſtans, eritque P.b.BAO=R.mI−S.NK. Poteſt autem ang. BAO in ipſis curuis AM, AN exhiberi, et quantitatibus ad eas pertinentibus exprimi. Vnde ſequitur aequationem inuentam ſufficere ad problema ſoluendum.

§. 13. Quod aequatio primum differentialis inuenta sit, ea vero diuisione facta per quan i . .-tem differentialem ad integralem sit reducta, id indicat sine differentialibus statim ad inuentam algebraicam aequationem perueniri posse sequenti modo multum breuiore et faciliore. Momentum potentiae R, ad trochleam conuertendam est R.mI, alterius potentiae S, est S. NK. Quia hoc illi contrarium est atque minuit, trochlea ab O ad B sollicitatur a vi R.mI − S.NK, huicque vi proportionalis est acceleratio, quae, vt oscillationes sint isochronae, debet esse vt via describenda id est vt BO, vel BAO, vel quoque vt P.b.BAO. cui aequalis poni potest, eritque vt supra P.b.BAO = R.mI − S.NK.

Tabula VI. Fig. 1. §. 14. Sunt vero mI, NK, perpendicula ex A in tangentes; et BAO aequatur angulo, quem tangentes cum axe constituunt. Facta igitur applicatione ad sequentem figuram reperitur haec aequatio P.b.ATM = R.AP − S.AQ. Sumatur eius differentialis Pb.dATM = R.dAP − S.dAQ. Est vero d.ATM = angulo, quem duo elementa curuae proxima inter se constituunt, idcirco = angulo a duobus normalibus infinite propinquis intercepto, qui habetur elemento curuae per radium osculi diuiso; qui quotus in vtraque curua idem esse debet propter tangentes parallelas, in altera vero negatiuus esse debet eius, qui in altera accipitur. Hanc ob rem pono AM = y, AP = p, PM =

$= \sqrt{(yy-pp)} = q$, atque $AN = z, AQ = r, QN = \sqrt{(zz-rr)} = s$. Erit radius osculi ibi $= y\,dy : dp$. hic vero $= z\,dz : dr$. Deinde elementum curuae in illa $= y\,dy : q$; in hac $= z\,dz : s$; vt ergo elementum ang. ATM sit ex illa curua $= dp : q$, ex hac $= dr : s$. Oportet vero esse $dp : q = -dr : s$.

§. 15. His valoribus substitutis, proueniet haec aequatio $Pb\,dp : q = R\,dp - S\,dr$. Est vero $-dr : s = dp : q$, vnde $dr = -s\,dp : q$, quo substituto aequatio resultans $Pb\,dp : q = R\,dp + Ss\,dp : q$ diuidi poterit per dp, quo facto, et multiplicato per q. habebitur ista aequatio $Pb = Rq + Ss$. Ex qua haec fluit proprietas curuarum quaesitarum, vt summa $R.PM + S.QN$ semper sit constans sumtis tangentibus parallelis. Habentur ergo duae hae aequationes $Pb = Rq + Ss$ et $s\,dp + q\,dr = o$. Ex quibus iunctis problemati facile satisfiet.

§. 16. Applicemus haec ad axem AT. Ducantur applicatae MX, NY; sitque $AX = x, XM = y$, et $AY = v; YN = z$. Erit $PM = q = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ et $QN = s = \frac{v\,dv + z\,dz}{\sqrt{(dv^2 + dz^2)}}$. Atque ob tangentes PM, QN inter se parallelas erit $dx : dy = dv : -dz$, seu $dz = -dv\,dy : dx$. Superior vero aequatio $Pb = Rq + Ss$ transmutabitur in hanc $Pb = R(x\,dx + y\,dy) : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + S(v\,dv + z\,dz) : \sqrt{(dv^2 + dz^2)}$ substituatur loco $dz, -dv\,dy : dx$; erit $Pb = R(x\,dx + y\,dy) : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + S(v\,dx - z\,dy) : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Vnde elicietur $z = v\,dx : dy + (R(x\,dx + y\,dy) - Pb\sqrt{(dx^2 + dy^2)}) : S\,dy$. Vocetur $dx : dy = \xi$: et

$(R(x\,dx$

$(R(x\,dx + y\,dy) - Pb\sqrt{(dx^2 + dy^2)}) : S\,dy = B$. erit $z = \xi v + B$; vnde $dz = \xi dv + v d\xi + dB = -dv\,dy : dx = -dv : \xi$. Consequenter $dv + \xi\xi dv + v \xi d\xi + \xi dB = 0$; diuidatur per $\sqrt{(1+\xi\xi)}$ erit $dv\sqrt{(1+\xi\xi)} + v\xi d\xi : \sqrt{(1+\xi\xi)} + \xi dB : \sqrt{(1+\xi\xi)} = 0$. Quae integrata dat $v\sqrt{(1+\xi\xi)} + \int \xi dB : \sqrt{(1+\xi\xi)} = C$. Quocirco erit $v = \frac{C - \int \xi dB : \sqrt{(1+\xi\xi)}}{\sqrt{(1+\xi\xi)}}$ ac $z = \frac{C\xi + B\sqrt{(1+\xi\xi)} - \xi \int \xi dB : \sqrt{(1+\xi\xi)}}{\sqrt{(1+\xi\xi)}}$.

§. 17. Est autem substituto loco B valore debito nempe $(R(x\xi + y) - Pb\sqrt{(1+\xi\xi)}) : S$, $\int \xi dB : \sqrt{(1+\xi\xi)} = Rx\sqrt{(1+\xi\xi)} : S - \frac{Pb}{S}\int \frac{\xi\xi d\xi}{1+\xi\xi}$. Vnde fit $v = \frac{CS - Rx\sqrt{(1+\xi\xi)} + Pb\int \xi\xi d\xi : (1+\xi\xi)}{S\sqrt{(1+\xi\xi)}}$ atque $z = \frac{CS\xi + Ry\sqrt{(1+\xi\xi)} + Pb\xi\int d\xi : \xi\xi(1+\xi\xi)}{S\sqrt{(1+\xi\xi)}}$. Data ergo curua alterutra AN, seu aequatione inter v et z, si in ea loco v et z valores inuenti substituantur, habebitur aequatio inter y et x, seu altera curua. Sed si ad commoditatem constructionis attendamus, detur curua AM seu aequatio inter x et y; et inuenietur ex dato quouis puncto M, eius homologum N, propter AY et YN, quae per quadraturas facile determinantur. Perspicuum vero est alteram curuam ex altera construi ope quadraturae circuli; et ideo vtramque non posse esse algebraicam.

§. 18. Si habeatur pro alterutra curua aequatio inter perpendiculum in tangentem et ipsam tangentem, totum negotium multo facilius expepedietur. Positis enim $AP = p$, $Pm = q$, et $AQ = r$, $QN = s$, erit per §. 15. $Pb = Rq + Ss$ atque $sdp + qdr = o$, vnde elicitur $s = (Pb - Rq) : S$. atque $dr = -sdp : q = -dp (Pb - Rq) : Sq$. Data ergo aequatione inter p, et q, inde inuenietur aequatio inter s et r. Seu facilius si habeatur aequatio inter r et s, substituantur pro s et r valores in p et q, prodibitque aequatio inter p et q. Data ergo alterutra harum curuarum, altera facile reperitur.

§. 19. Illustremus hanc regulam exemplis nonnullis. Sit altera curua AN circulus, cuius peripheria per A transit, sit eius radius $= a$. Erit $rr - 2ar + ss = o$ seu $r = a + \sqrt{(aa - ss)}$ indeque $dr = -sds : \sqrt{(aa - ss)}$. Ponatur loco dr, $-dp (Pb - Rq) : Sq$ et loco s, $(Pb - Rq) : S$, ergo loco ds, $-Rdq : S$, proueniet haec aequatio $dp = -Rq dq : \sqrt{(SSaa - (Pb - Rq)^2)}$. Quae aequatio exprimit naturam alterius curuae, et quia est separata, per quadraturas construi potest. Quum hoc modo inueniantur puncta homologa, poterit altera vtcunque applicata respectu axis AT, altera quoque applicari, hoc obseruato, vt tangentes in punctis homologis vnico tantum in casu sint parallelae; perspicuum ergo est, easdem curuas infinitis modis applicatas satisfacere posse.

§. 20. Sit altera curua AN rursus circulus, centrum in A habens erit r constans et $s = o$, vnde $q = Pb : R$, adeoque conſtans. Eſt igitur ob hanc proprietatem curua quaeſita nata ex euolutione circuli, idque talis cuius radius eſt $Pb : R$. Modus vero huius applicandae hic eſt, vt centrum circuli generatoris ponatur ſuper centro trochleae A. Quod haec curua talis eſſe debeat, ex Differt. *de nouo quodam tautochr. genere* in Comm. A. 1727. inſerta colligi poteſt. Cum enim altera curua AN ſit circulus centrum in A habens pondus ſeu potentia S, in quouis ſitu eundem exerit effectum, vt ergo altera curua ſola tautochronismum producere debeat. Qui, cum ſit ille caſus citatus, neceſſe eſt, vt curua quaeſita eadem ſit, vt ibi, genita ex euolutione circuli.

Tabula VI. Fig. 2. §. 21. Progredior iam ad alterum problematis caſum, et inueſtigo caſus quibus ambae curuae ſint inter ſe eaedem et circa axem ſimiliter applicatae. Sint ergo curuae AM, AN eaedem circa axem AC ſimiliter poſitae. Oportet inuenire talem aequationem inter coordinatas AX, x et XM, y, vt poſito in ea $x = AY$, v, fiat $y = NY = z$. Ad hoc efficiendum duas haſce proprietates inuentas conſidero; primo, vt ductis normalibus MT et NV ſeu nV, ſit ang. XMT $=$ YNV $=$ YnV; deinde vt ſit $Pb = R.PM + S.QN$. Sed quia curuae ſunt aequales et ſimiliter applicatae, neceſſe eſt vt ſit $R = S$, ponatur autem $Pb : R = 2c$, erit altera proprietas hac aequatione contenta, $PM + QN = 2c$, ſeu $PM + qn = 2c$.

§. 22.

§. 22. Huc ergo problema est reductum, vt inueniatur curua AnM talis, vt, si in ea accipiantur duo puncta M et n, ex quibus normales MT et nV ductae cum applicatis MX, nY angulos constituant, alterum alterius negatiuum, seu quae se mutuo ad angulos rectos intersecent; ductis deinde tangentibus MP et nq, in easque demissis ex A perpendiculis AP, Aq, vt, inquam, sit summa $PM + nq$ constans seu aequalis, $2c$. Quamobrem quaero aequationem inter tangentem PM, et angulum XMT, seu quantitatem inde pendentem, quae facto angulo negatiuo, ipsa quoque negatiua euadat, talem, vt, si loco anguli XMT, seu quantitatis vicem eius gerentis eius negatiuum ponatur, PM transmutetur in aliam quae, cum PM efficiat summam $2c$.

§. 23. Cum sinus anguli cuiusuis, facto angulo negatiuo, abeat in sui negatiuum, loco anguli adhibeo eius sinum, sit igitur sinus anguli $XMT = \xi$, et tangens $PM = q$, requiritur aequatio inter ξ et q, in qua, loco ξ posito $-\xi$, q abeat in s, vt sit $q + s = 2c$. Hanc ob rationem pono $q = c + Q$, designante Q functionem quamcunque imparem ipsius ξ, facto enim ξ negatiuo et Q abibit in $-Q$, vt ergo sit $s = c - Q$, summa igitur $q + s$ erit $= 2c$, vt requirebatur.

§. 24. Inuenta autem aequatione inter q et ξ, oportet ex ea aequationem inuenire inter coor-

 dinatas

dinatas AX, XM seu inter x et y; id quod sequenti modo efficietur. Si $AX = x$, et $XM = y$, erit sinus anguli $XMT = dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, et tangens $MP = (xdx + ydy) : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Erit itaque $\xi = dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ et $q = (xdx + ydy) : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. His igitur valoribus in aequatione inter ξ et q substitutis, resultabit noua aequatio inter x et y, ex qua curua qualis sit cognoscetur. Ponatur vero $dy = pdx$, erit $\xi = p : \sqrt{(1 + pp)}$ vnde patet ξ abire in negatiuum, si p fiat negatiuum. Quamobrem loco Q poni potest functio quaecunque impar ipsius p, et erit $q = (xdx + ydy) : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = c + Q$, seu $(x + py)\sqrt{(1 + pp)} = c + Q$.

§. 25. Aequatio ergo inter x et y pro curua quaesita talis esse debet, vt posito $dy : dx = p$, sit $(x + py) : \sqrt{(1 + pp)} = c + Q$ denotante Q functionem imparem ipsius p, siue cum et $Q\sqrt{(1 + pp)}$, ob $\sqrt{(1 + pp)}$ functionem parem ipsius p, sit functio impar, scribatur loco $Q\sqrt{(1 + pp)}$ solum Q; et erit $x + py = c\sqrt{(1 + pp)} + Q$. Substituendis igitur loco Q determinatis functionibus ipsius p, et deinde loco p eius valore $dy : dx$, habebuntur aequationes, quas non nisi x et y cum suis differentialibus et constantibus ingrediuntur.

Tabula VI. Fig. 3. §. 26. Relatio, quam Q et p inter se habere debent, optime exprimetur curua MAm, quae circa punctum A habet arcus similes et aequales con-

contrarie positos, vt ex inspectione palam est. Si enim per punctum A, quod tanquam centrum est figurae, ducatur recta Pp, eaque tanquam axis consideretur, in quem demittantur applicatae PM. Dico abscissis AP exprimentibus p, applicatas PM designare posse Q. Nam sumta AP negatiua vt Ap, applicata pm erit applicatae PM aequalis, eiusque negatiua, vt ergo quantitas applicatam PM exprimens sit functio ipsius p impar, et propterea Q exhibere possit.

§. 27. Quaeritur nunc quomodo ex curua hac data inueniri et construi possit curua quaesita coordinatis orthogonalibus x et y contenta; seu quomodo ex p et Q datis inueniri et construi possint x et y. Id quod sequenti modo efficietur. Cum sit $x + py = c\sqrt{(1+pp)} + Q$, erit $dx + pdy + ydp = cpdp : \sqrt{(1+pp)} + dQ$. Quia vero est $dy = pdx$, erit $dx = dy : p$; vnde $dy(1+pp) + ypdp = cppdp : \sqrt{(1+pp)} + pdQ$. Diuidatur per $\sqrt{(1+pp)}$ et habebitur $dy\sqrt{(1+pp)} + yp\,dp : \sqrt{(1+pp)} = cppdp : (1+pp) + pdQ : \sqrt{(1+pp)}$. Quae integrata dat $y\sqrt{(1+pp)} = c\int ppdp : (1+pp) + \int pdQ : \sqrt{(1+pp)}$. Quamobrem erit $y = \frac{cp - c\int dp : (1+pp) + \int pdQ : \sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quoniam vero est $x = Q + c\sqrt{(1+pp)} - py$, erit $x = \frac{c + cp\int dp : (1+pp) + Q\sqrt{(1+pp)} - p\int pdQ : \sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(1+pp)}}$. Ex quibus constat et x et y, in meris p et Q dari, et consequenter curuam quaesitam ex data MAm construi posse.

§. 28. Vt exempla habeamus huiusmodi curuarum tautochronarum, pono $Q = ap$, erit $x + py = cV(1 + pp) + ap$, vnde, facto $y - a = z$, fiet $xx + 2pxz + ppzz = cc + ccpp$, ergo $pp = \frac{2pxz + xx - cc}{cc - zz}$ consequenter $p = \frac{xz \pm cV(xx + zz - cc)}{cc - zz} = dy : dx = dz : dx$, siue $ccdz - zzdz - xzdx = cdxV(xx + zz - cc)$. Hanc aequationem, etsi ad rationalitatem reductam, nullo modo neque separare neque integrare potui, id quod mihi magnopere mirum videtur, cum vti perspicuum est curua nihilominus construi possit. Est enim $y = \frac{cp - aV(1 + pp) - c\int dp : (1 + pp)}{V(1 + pp)}$ seu $z = \frac{cp - c\int dp : (1 + pp)}{V(1 + pp)}$ et $x = \frac{c + cp\int dp : (1 + pp)}{V(1 + pp)}$. Aequatio ergo inuenta construibilis est, quanquam consuetis modis reducendi nequaquam separari vel integrari possit. Non dubito, quin ex facie constructionis huius aequationis cognita multa praeclara de aliis aequationibus inseparabilibus inueniri queant.

§. 29. Modum hunc ad aequationes separatu tam difficiles perueniendi conferens cum schediasmate Celeb. *Hermanni* actorum Tomo II. inserto, pag. 188. quo methodum tradit infinitas aequationes differentiales construendi, deprehendi Virum Celeb. ope similis aequationis ei, ex qua nostrae aequationes deducuntur, quam vocat Canonicam, ad eiusmodi aequationes perueniſſe. Ea igitur methodo omnes aequationes, quae nostro problemati satisfaciunt, quaeque forte cuiquam prorsus

prorſus inſeparabiles videri queant, conſtrui poterunt. Et ſane *Hermannus*, cum aequationem §. 28. cum eo communicaſſem, eam ſtatim ope methodi ſuae ſeparauit, eandemque conſtructionem inuenit, quam ego a poſteriori cognitam hic apposui. Dubitari itaque nequit, quin Vir Celeb. plurium aequationum, quae adhuc inſeparabiles habitae ſunt, ſeparationem ſit daturus.

DE COMMVNICATIONE MOTVS IN COLLISIONE CORPORVM.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

EXperientia conſtat corporum in ſe mutuo incurrentium motus immutari; quaeſtio igitur hinc nata eſt, quae ſit huius alterationis motus cauſa. Dubitari quidem non poteſt, quin in ipſo corporum conflictu ratio huius phaenomeni inueſtigari debeat; corpus enim omne ſiue quieſcens ſiue motum perſeuerat in ſuo ſtatu, niſi a vi quapiam cieatur et ex ſtatu ſuo deturbetur. Quamobrem quaeſtio huc eſt reducta, vt definiatur, qua in re inſit haec vis et quanta ſit, quae motus mutationem in conflictu corporum producere valet. Praeterea etiam determinari debet, quan- Tabula VII.

tam