1738

De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt

Leonhard Euler

DE PROGRESSIONIBVS TRANSCENDENTIBVS, SEV QVARVM TERMINI GENERALES ALGEBRAICE DARI NEQVEVNT.

Auct. L. *Eulero.*

§. 1.

Cum nuper occaſione eorum, quae Cel. *Goldbach* de ſeriebus cum Societate communicauerit, in expreſſionem quandam generalem inquirerem, quae huius Progreſſionis $1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 +$ etc. terminos omnes daret, incidi conſiderans, quod ea in infinitum continuata tandem cum geometrica confundatur in ſequentem expreſſionem, $\frac{1.2^n}{1+n} \cdot \frac{2^{1-n}3^n}{2+n} \cdot \frac{3^{1-n}4^n}{3+n} \cdot \frac{4^{1-n}5^n}{4+n}$ etc. quae dictae progreſſionis terminum ordine n exponit. Ea quidem in nullo caſu abrumpitur, neque ſi n eſt numerus integer neque ſi fractus, ſed ad quemuis terminum inueniendum tantummodo approximationes ſuppeditat, niſi excipiantur caſus $n=0$, et $n=1$, quibus ea actu abit in 1. Ponatur $n=2$, habebitur $\frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{5.5}{4.6}$ etc. $=$ termino ſecundo 2. Si $n=3$ habebitur $\frac{2.2.2}{1.1.4} \cdot \frac{3.3.3}{2.2.5} \cdot \frac{4.4.4}{3.3.6} \cdot \frac{5.5.5}{4.4.7}$ etc. $=$ termino tertio 6.

§. 2. Quanquam autem haec expreſſio nullum vſum habere videatur in inuentione termi-

morum

norum, tamen ad interpolationem eius ſeriei, ſeu ad terminos, quorum indices ſunt numeri fracti, egregie accommodari poteſt. De hoc autem hic explicare non conſtitui, cum infra magis idonei modi occurrant ad idem efficiendum. Id tantum de iſto termino generali afferam, quod ad ea, quae ſequuntur quaſi manuducat. Quaeſiui terminum cuius index $n = \frac{1}{2}$, ſeu qui aequaliter interiacet inter primum 1, et praecedentem qui itidem eſt 1. Poſito autem $n = \frac{1}{2}$, aſſecutus ſum ſeriem $\sqrt{\frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdot \frac{8.10}{9.9}}$ etc. quae terminum quaeſitum exprimit. Haec autem ſeries ſimilis mihi ſtatim viſa eſt eius, quam in *Walliſii* operibus pro area circulari vidiſſe memineram. Inuenit enim *Walliſius* circulum eſſe ad quadratum diametri vt 2.4.4.6.6.8.8.10 etc. ad 3.3.5.5.7.7.9.9. etc. Si igitur fuerit diameter $= 1$, erit circuli area $= \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7}$ etc. Ex huius igitur cum mea conuenientia concludere licet, terminum indicis $\frac{1}{2}$ eſſe aequalem radici quadratae ex circulo, cuius diameter $= 1$.

§. 3. Arbitratus eram ante ſeriei 1, 2, 6, 24, etc. terminum generalem, ſi non algebraicum tamen exponentialem dari. Sed poſtquam intellexiſſem terminos quoſdam intermedios a quadratura circuli pendere, neque algebraicas neque exponentiales quantitates ad eum exprimendum idoneas eſſe cognoui. Terminus enim generalis eius pro-

progressionis ita debet esse comparatus, vt tum quantitates algebraicas tum a quadratura circuli tum forte ab aliis quoque quadraturis pendentes comprehendat; id quod in nullam formulam nec algebraicam nec exponentialem competit.

§. 4. Cum autem considerassem, dari inter quantitates differentiales eiusmodi formulas, quae certis in casibus integrationem admittant et tum quantitates algebraicas praebeant, in aliis vero non admittant et tum quantitates a quadraturis curuarum pendentes exhibeant; animum subiit huiusmodi forte formulas ad progressionis memoratae aliarumque eius similium terminos generales suppeditandos aptas esse. Progressiones vero, quae tales requirunt terminos generales, qui algebraice dari nequeunt, voco transcendentes; quemadmodum Geometrae omne id, quod vires communis Algebrae superat, transcendens appellare solent.

§. 5. Id ergo meditatus sum, quomodo formulas differentiales ad progressionum terminos generales exprimendos accommodari maxime conveniat. Terminus autem generalis est formula, quam ingrediuntur tum quantitates constantes, tum alia quaepiam non constans vt n, quae ordinem terminorum seu indicem exponit: vt si tertius terminus desideretur oporteat loco n ponere 3. Sed in formula differentiali quantitatem quandam variabilem

riabilem inesse oportet. Pro qua non consultum est adhibere n, cum eius variabilitas non ad integrationem pertineat: sed postquam ea formula integrata est vel integrata esse ponitur, tum demum ad progressionem formandam inseruiat. In formula igitur differentiali insit oportet quantitas quaedam variabilis x, quae autem post integrationem alii ad progressionem spectanti aequalis ponenda est; et quod oritur, proprie est terminus, cuius index est n.

§. 6. Vt haec clarius concipiantur, dico $\int p\,dx$ esse terminum generalem progressionis sequenti modo ex eo eruendae; denotet autem p functionem quamcunque ipsius x, et constantium in quarum numero adhuc ipsum n haberi debet. Concipiatur $p\,dx$ integratum talique constante auctum, vt facto $x=0$ totum integrale euanescat, tum ponatur x aequale quantitati cuidam cognitae. Quo facto in inuento integrali nonnisi quantitates ad progressionem pertinentes supererunt, et id exprimet terminum, cuius index $=n$. Seu integrale dicto modo determinatum erit proprie terminus generalis. Si quidem id haberi potest, non opus est formula differentiali, sed progressio inde formata habebit terminum generalem algebraicum; secus res se habet si integratio non succedit, nisi certis numeris loco n substitutis.

§. 7. Assumsi igitur plures huiusmodi formulas differentiales integrationem non admittentes nisi

nisi si ponatur loco n numerus integer affirmatiuus, vt seriei termini principales fiant algebraici: et inde progressiones formaui. Earum itaque termini generales in promtu erunt, et a quanam quadratura quique eius termini intermedii pendeant definire licebit. Hic quidem non plures eiusmodi formulas percurram; sed vnicam tantum aliquanto generaliorem pertractabo, quae valde late patet, et ad omnes progressiones, quarum quilibet termini sunt facta constantia ex numero factorum ab indice pendente accommodari potest; quiq; factores sunt fractiones, quarum numeratores et denominatores in progressione quacunque arithmetica progrediuntur, vt: $\frac{2}{3}+\frac{2.4}{3.5}+\frac{2.4.6}{3.5.7}+\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}+$ etc.

§. 8. Sit proposita haec formula $\int x^e dx(1-x)^n$ vicem termini generalis subiens, quae integrata ita, vt fiat $=o$, si sit $x=o$; et tum posito $x=1$, det terminum ordine n progressionis inde ortae. Videamus ergo qualem ea suppeditet progressionem. Est $(1-x)^n = 1-\frac{n}{1}x+\frac{n.n-1}{1.2}x^2-\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^3$ etc. Et propterea $x^e dx(1-x)^n = x^e dx - \frac{n}{1}x^{e+1}dx + \frac{n.n-1}{1.2}x^{e+2}dx - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{e+3}dx$ etc. Quare

$$\int x^e dx(1-x)^n = \frac{x^{e+1}}{e+1} - \frac{n.x^{e+2}}{1.(e+2)} + \frac{n.n-1..x^{e+1}}{1.2.(e+3)} - \frac{n.n-1.n-2.x^{e+4}}{1.2.3.(e+4)}$$

etc. Ponatur $x=1$, quia constantis additione non est opus, et habebitur $\frac{1}{e+1}$

$\frac{1}{e+1} - \frac{n}{1.(e+2)} + \frac{n.n-1}{1.2.(e+3)} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3(e+4)} +$ etc. terminus generalis seriei inueniendae. Quae talis erit, vt si $n=0$, prodeat terminus $= \frac{1}{e+1}$; si $n=1$ term. $= \frac{1}{(e+1)(e+2)}$, si $n=2$, term. $= \frac{1.2}{(e+1)(e+2)(e+3)}$ si $n=3$. prodeat terminus $= \frac{1.2.3.}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)}$ lex qua hi termini progrediuntur manifesta est.

§. 9. Hanc ergo assecutus sum progressionem $\frac{1}{(e+1)(e+2)} + \frac{1.2}{(e+1)(e+2)(e+3)} + \frac{1.2.3}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)}$ etc. cuius terminus generalis est $\int x^e dx(1-x)^n$. Termini vero ordine n ipsius haec erit forma $\frac{1.2.3.4. \ldots n}{(e+1)(e+2) \ldots (e+n+1)}$. Haec quidem forma sufficit ad terminos indicum integrorum inueniendos, sed si termini indices non fuerint integri, ex ea ipsi termini inueniri nequeunt. Iis autem proximis inueniendis inseruit haec series $\frac{1}{e+1} - \frac{n}{1.(e+2)} + \frac{n.n-1}{1.2(e+3)} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.(e+4)}$ etc. Si $\int x^e dx(1-x)^n$ multiplicetur per $e+n+1$, habebitur progressio cuius terminus ordine n hanc formam habet $\frac{1.2.3. \ldots n}{(e+1)(e+2) \ldots (e+n)}$ cuius igitur verus terminus generalis erit $(e+n+1) \int x^e dx(1-x)^n$. Hic obseruandum est, progressionem semper fieri algebraicam, quando loco e assumatur numerus affirmatiuus. Ponatur e. g. $e=2$, progressionis terminus n^{mus} erit $\frac{1.2.3. \ldots n}{3.4.5. \ldots (n+2)}$ seu $\frac{1.2}{(n+1)(n+2)}$. Id quod ipse terminus generalis quoque indicat, qui erit $(n+3) \int xx\,dx(1-x)^n$. Nam eius integrale est $\left(C - \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{2(1-x)^{n+2}}{n+2} - (1-x)\right.$

$\left.\frac{(1-x)^{n+3}}{n+3}\right)(n+3)$, vt hoc fiat $=0$ si $x=0$, erit $C = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3}$. Ponatur $x=1$, erit terminus generalis $\frac{n+3}{n+1} - \frac{2(n+3)}{n+2} + 1 = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$.

§. 10. Vt igitur progressiones transcendentes adipiscamur, ponatur e aequale fractioni $\frac{f}{g}$. Erit progressionis terminus ordine $n = \frac{1.\,2.\,3.\,-\,-\,-\,-\,n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\,-\,-\,(f+ng)}\,g^n$ siue $\frac{g.\,2g.\,3g.\,-\,-\,-\,ng}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\,-\,-\,(f+ng)}$. Terminus vero generalis erit $= \frac{(f+(n+1)g)}{g}\int x^{\frac{f}{g}}\,dx\,(1-x)^n$. Qui si diuidatur per g^n, erit pro progressione $\frac{1}{f+g} + \frac{1.\,2}{(f+g)(f+2g)} + \frac{1.\,2.\,3}{(f+g)(f+2g)(f+3g)}$ etc. cuius terminus ordine n est $\frac{1.\,2.\,3.\,-\,-\,-\,-\,n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)}$. Eius progressionis igitur terminus generalis erit $\left(\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\right)\int x^{\frac{f}{g}}\,dx\,(1-x)^n$. Vbi si fractio $\frac{f}{g}$ non sit numero integro aequalis, seu si f ad g non habuerit rationem multiplicem, progressio erit transcendens, et termini intermedii a quadraturis pendebunt.

§. 11. Exemplum quoddam in medium afferam, vt vsus termini generalis clarius ob oculos ponatur. Sit in paragraphi praecedentis progressione priore $f=1$, $g=2$, erit terminus ordine $n = \frac{2.\,4.\,6.\,8.\,-\,-\,-\,2n}{3.\,5.\,7.\,9.\,-\,-\,-\,(2n+1)}$, progressio vero ipsa haec $\frac{2}{3} + \frac{2.\,4}{3.\,5} + \frac{2.\,4.\,6}{3.\,5.\,7}$ etc. cuius terminus generalis ergo erit $\frac{2n+3}{2}\int dx\,(1-x)^n\sqrt{x}$. Quaeratur terminus

minus cuius index $\frac{1}{2}$; fiet igitur $n=\frac{1}{2}$, et habebitur terminus quaesitus $=2\int dx\sqrt{(x-xx)}$. Quod cum significet elementum areae circularis, perspicuum est terminum quaesitum esse aream circuli, cuius diameter $=1$. Proposita porro sit haec series, $1+\frac{r}{1}+\frac{r.(r-1)}{1.\,2.}+\frac{r.(r-1)(r-2)}{1.\,2.\,3.}$ etc., quae est coefficientium binomii ad potestatem r eleuati. Terminus ordine n est ergo $\frac{r.(r-1)(r-2)\cdots(r-n+2)}{1.\,2.\,3.\cdots(n-1)}$. In §. praecedente habetur hic $\frac{1.\,2.\,3.\cdots n}{(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)}$. Hic, vt cum illo comparetur inuertendus est, vt habeatur $\frac{(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)}{1.\,2.\cdots n}$; multiplicetur hic per $\frac{n}{(f+ng)}$, et erit is $=\frac{(f+g)(f+2g)\cdots(f+(n-1)g)}{1.\,2.\cdots(n-1)}$ oportet igitur esse $f+g=r$ et $f+2g=r-1$, vnde fiet $g=-1$, et $f=r+1$. Eodem modo tractetur terminus generalis $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int x^{\frac{f}{g}}dx(1-x)^n$. Prodibit pro progressione proposita $1+\frac{r}{1}+\frac{r.(r-1)}{1.\,2.}$ etc.; hic terminus generalis, $\frac{n(-1)^{n+1}}{(r-n)(r-n+1)\int x^{-r-1}dx(1-x)^n}$. Sit $r=2$ erit huius progressionis $1, 2, 1, 0, 0, 0,$ etc., terminus generalis $n(-1)^{n+1}:((2-n)(3-n)\int x^{-3}dx(1-x)^n)$. Hic autem notari debet, hunc casum et alios quibus $e+1$ fit numerus negatiuus, non posse ex generali deduci, quia tunc integrale non non fit $=0$; si $x=0$. Pro his vero $\int x^e dx(1-x)^n$ peculiari modo integrari conuenit, post integrationem enim constans infinita est adiicienda; quando vero $e+1$ est numerus affirmatiuus, vt posui §. 8. constantis additione non est opus. Considerata autem progressione, cuius terminus ordine n erat sequens, $\frac{r(r-1)(r-2)-(r-n+2)}{1.2.3.---(n-1)}$, transmutari potest illa termini exponentis n forma in hanc $\frac{r.(r-1)-----1}{(1.2.3.---(n-1)(1.2.--(r-n+1))}$. Sed per §. 14. est $r.r-1.----1 = \int dx(-lx)^r$, et $1.2.3.----(n-1)$ est $\int dx(-lx)^{n-1}$ et $1.2.----(r-n+1) = \int dx(-lx)^{r-n+1}$. Quamobrem ibi tractatae progressionis $1+\frac{r}{1}+\frac{r.r-1}{1.2}+\frac{r.r-1.r-2}{1.2.3}+$ etc. hic habetur terminus generalis $\frac{\int dx(-lx)^r}{\int dx(-lx)^{n-1}\int dx(-lx)^{r-n+1}}$. Si fuerit $r=2$, erit terminus generalis

$\frac{2}{\int dx(-lx)^{n-1}\int dx(-lx)^{3-n}}$, cui respondet haec progressio 1, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, etc. Vt si quaeratur terminus indicis $\frac{3}{2}$ erit is $= \frac{2}{\int dx(-lx)^{\frac{1}{2}}\int dx(-lx)^{\frac{3}{2}}}$. Dicta ergo area circuli $=A$, cuius diameter est $=1$, quia est $\int dx(-lx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A}$ et $\int dx(-lx)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{A}$; erit terminus medium interiacens inter duos primos terminos progressionis 1, 2, 1, 0, 0, 0, etc. huius formae $\frac{4}{3A}$, hoc est $\frac{5}{3}$ quam proxime.

§. 12. Progredior nunc ad progressionem, de qua initio dixi, $1+1.2+1.2.3$ etc. et in qua terminus ordine n est $1.2.3.4.----n$. Continetur haec progressio in generali nostra, sed terminus ge-

generalis peculiari modo inde deriuari debet. Hactenus scilicet terminum generalem habui si terminus ordine n est $\frac{1.\ 2.\ 3.\ -\ -\ -\ -\ -\ n}{(f+g)(f+2g)\ -\ -\ -\ (f+ng)}$, qui si ponatur $f=1$ et $g=0$, abit in $1.\ 2.\ 3.\ -\ -\ -\ n$, cuius terminus generalis quaeritur: substituantur ergo in termino generali $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int x^{\frac{f}{g}}\,dx\,(1-x)^n$ hi valores loco f et g, erit terminus generalis quaesitus $\int\frac{x^{\frac{1}{0}}\,dx(1-x)^n}{0^{n+1}}$. Qui vero huius expressionis sit valor, sequenti modo inuestigo.

§. 13. Ex conditione, qua huiusmodi termini generales vsui accommodari debent, intelligitur loco x alias functiones ipsius x posse subrogari, dummodo eae tales fuerint, vt sint $=0$ si $x=0$ et $=1$ si $x=1$. Huiusmodi enim functiones si loco x substituantur, terminus generalis perinde satisfaciet ac ante. Ponatur igitur $x^{\frac{g}{f+g}}$ loco x et consequenter $\frac{g}{f+g}x^{\frac{-f}{f+g}}dx$ loco dx; quo facto habebitur $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int\frac{g}{f+g}dx(1-x^{\frac{g}{f+g}})^n$. Iam hic ponatur $f=1$, et $g=0$, habebitur $\int\frac{dx(1-x^0)^n}{0^n}$. Cum autem sit $x^0=1$, habemus hic casum, quo numerator et denominator euanescunt $(1-x^0)^n$ et 0^n. Per regulam igitur cognitam quaeramus

ramus valorem fractionis $\frac{1-x^0}{0}$. Id quod fiet quaerendo valorem fractionis $\frac{1-x^z}{z}$ tum, cum z euanescit, differentietur igitur et numerator et denominator sola z variabili posita; habebitur $\frac{-x^z dz\, lx}{dz}$ seu $-x^z lx$, si iam ponatur $z=0$, prodibit $-lx$. Est itaque $\frac{1-x^0}{0}=-lx$.

§. 14. Cum igitur sit $\frac{1-x^0}{0}=-lx$, erit $\frac{(1-x^0)^n}{0^n}=(-lx)^n$, et propterea terminus generalis quaesitus $\int\frac{dx(1-x^0)^n}{0^n}$ transmutatus est in $\int dx(-lx)^n$. Cuius valor inueniri per quadraturas potest. Quamobrem huius progressionis 1, 2, 6, 24, 120, 720, etc. terminus generalis est $\int dx(-lx)^n$, eodem modo adhibendus, quo supra praeceptum est. Hunc autem esse terminum generalem progressionis propositae ex eo quoque cognoscitur, quod terminos, quorum indices sunt numeri integri affirmatiui, reuera praebeat, sit v. g. $n=3$, erit $\int dx(-lx)^3=\int -dx(lx)^3=-x(lx)^3+3(xlx)^2-6xlx+6x$ constantis additione opus non est, cum facto $x=0$ omnia euanescant, ponatur igitur $x=1$, quia $l1=0$, omnes termini logarithmis af-

fecti

fecti euanescent et restabit 6, qui est terminus tertius.

§. 15. Verum quidem est, hanc methodum terminorum istius seriei inueniendorum nimis esse operosam, eorum nimirum quorum indices sunt numeri integri, qui vtique facilius continuanda progressione obtinentur. Verum tamen ad terminos indicum fractorum inueniendos per quam est idonea, quippe qui adhuc ne operosissima quidem methodo definiri potuerunt. Si ponatur $n = \frac{1}{2}$ habebitur respondens terminus $= \int dx \sqrt{-lx}$ cuius valor per quadraturas datur. Sed initio ostendi hunc terminum esse aequalem radici quadratae ex circulo cuius diameter est 1. Hinc quidem idem concludere non licet, ob defectum analysis; infra autem sequetur methodus eosdem terminos intermedios ad algebraicarum curuarum quadraturas reducendi. Ex cuius cum hac comparatione forte nonnihil ad amplificationem analysis deriuari poterit.

§. 16. Progressionis cuius terminus ordine n indicatur per $\frac{1 . 2 . 3 . - - - - n}{(f+g)(f+2g)(f+3g) - - (f+ng)}$, terminus generalis est per §. 10. $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n$. Si autem terminus ordine n fuerit $1 . 2 . 3 . - - - n$, tum est terminus generalis $\int dx (-lx)^n$. Quae formula, si loco $1 . 2 . 3 . - - - n$ sub-

ſubſtituatur, habebitur $\frac{\int dx(-lx)^n}{(f+g)(f+2g)--(f+ng)} = \frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int x^{\frac{f}{g}}dx(1-x)^n$. Ex quo efficitur $(f+g)(f+2g) --- (f+ng) = \frac{g^{n+1}\int dx(-lx)^n}{(f+(n+1)g)\int x^{\frac{f}{g}}dx(1-x)^n}$ Quae expreſſio igitur eſt terminus generalis huius generalis progreſſionis $f+g$, $(f+g)(f+2g)$, $(f+g)(f+2g)(f+3g)$ etc. Huiusmodi igitur progreſſionum omnium ope termini generalis omnes termini cuiuscunque indicis definiuntur. Quae infra ſequentur de reductione $\int dx(-lx)^n$ ad quadraturas notiores ſeu curuarum algebraicarum, etiam hic vſum habebunt.

§. 17. Sit $f+g=1$, et $f+2g=3$, erit $g=2$ et $f=-1$. Vnde orietur haec progreſſio particularis 1, $1\cdot3$, $1\cdot3\cdot5$, $1\cdot3\cdot5\cdot7$, etc. Cuius igitur terminus generalis eſt $\frac{2^{n+1}\int dx(-lx)^n}{(2n+1)\int x^{\frac{-1}{2}}dx(1-x)^n}$. Quanquam hic exponens ipſius x ſit negatiuus, tamen id incommodum, de quo ſupra dictum, hic locum non habet, cum ſit vnitate minor. Ponatur $n=\frac{1}{2}$ vt inueniatur terminus ordine $\frac{1}{2}$, erit is $= \frac{2^{\frac{3}{2}}\int dx\sqrt{-lx}}{2\int x^{\frac{-1}{2}}dx\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{2}.\int dx\sqrt{-lx}}{\int\frac{dx-xdx}{\sqrt{x-xx}}}$. Per §. 15. autem conſtat dare $\int dx\sqrt{-lx}$ radicem quadratam ex ex circulo, cuius diameter $=1$, fit peripheria p, erit area eius circuli $=\frac{1}{4}p$, adeoque $\int dx\sqrt{-lx}$ dat $\frac{1}{2}\sqrt{p}$. Deinde $\int\frac{dx-xdx}{\sqrt{x-xx}}=\int\frac{dx}{2\sqrt{x-xx}}+\sqrt{(x-xx)}$ sed $\int\frac{dx}{2\sqrt{x-xx}}$ dat arcum circuli, cuius sinus versus est x. Posito itaque $x=1$, proueniet $\frac{1}{2}p$. Quamobrem terminus quaesitus erit $=\sqrt{\frac{2}{p}}$.

§. 18. Cum progressionis, cuius terminus ordine n indicatur per $(f+g)(f+2g)----(f+ng)$, terminus generalis per §. 16. fit $\frac{g^{n+1}\int dx(-lx)^n}{(f+(n+1)g)\int x^{\frac{f}{g}}dx(1-x)^n}$ similiter si terminus ordine n fuerit $(h+k)(h+2k)----(h+nk)$, erit terminus generalis $\frac{k^{n+1}\int dx(-lx)^n}{(h+(n+1)k)\int x^{\frac{h}{k}}dx(1-x)^n}$. Diuidatur illa progressio per hanc, nempe terminus primus per primum, secundus per secundum et ita porro: devenietur ad nouam progressionem, cuius terminus ordine n erit $\frac{(f+g)(f+2g)----(f+ng)}{(h+k)(h+2k)----(h+nk)}$. Et terminus generalis huius progressionis ex illis duobus compositus erit

$$\frac{g^{n+1}(h+(n+1)k)\int x^{\frac{h}{k}}dx(1-x)^n}{k^{n+1}(f+(n+1)g)\int x^{\frac{f}{g}}dx(1-x)^n}$$

Qui vacuus est ab integrali logarithmico $\int dx(-lx)^n$.

§. 19. In omnibus huiusmodi terminis generalibus hoc maxime notandum est, non quidem

dem loco f, g, h, k numeros constantes poni oportere, sed eos quomodocunque ab n pendentes quoque assumi posse. In integratione enim eae literae perinde atque n tractantur, omnes tanquam constantes. Sit terminus ordine n hic $(f+g)(f+2g) - - - (f+ng)$, ponatur $g=1$, sed $f=\frac{nn-n}{2}$. Quia progressio ipsa est $(f+g)$, $(f+g)(f+2g)$, $(f+g)(+2g)(f+3g)$ etc. ponatur vbique 1 loco g, erit ea, $f+1$, $(f+1)(f+2)$, $(f+1)(f+2)(f+3)$. Sed loco f scribi debet in termino primo 0, in secundo 1, in tertio 3, in quarto 6 et ita porro, prodibit haec progressio 1; 2. 3, 4. 5. 6, 7. 8. 9. 10, etc. cuius igitur terminus generalis $\dfrac{2\int dx(-lx)^n}{(nn+n+2)\int x^{\frac{nn-n}{2}}dx(1-x)} =$

$$\frac{2\int dx(-lx)^n}{(nn+n+2)\int dx(x^{\frac{n-1}{2}} - x^{\frac{n+1}{2}})^n}.$$

§. 20. Accedo nunc ad eas progressiones, vnde compendium illud in definiendis terminis intermediis huius progressionis 1, 2, 6, 24, 120, etc. nactus sum. Id enim latius patet quam ad hanc solam progressionem, quoniam eius terminus generalis $\int dx(-lx)^n$ etiam in infinitarum aliarum progressionum terminos generales ingreditur. Assumo hunc terminum generalem $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int x^{\frac{f}{g}} dx(1-x)^n$, cui respondet terminus ordine n hic

1. 2. 3.

$\frac{1 . 2 . 3 . \ldots n}{(f+g)(f+2g)(f+3g) \ldots (f+ng)}$. Pono hic $f = n$, $g = 1$, erit terminus generalis $(2n+1)\int x^n dx (1-x)^n$ vel $(2n+1)\int dx (x-xx)^n$ et forma eius ordine n, $\frac{1 . 2 . 3 \ldots n}{(n+1)(n+2)(n+3) \ldots 2n}$. Progressio vero ipsa haec $\frac{1}{2}$, $\frac{1 . 2}{3 . 4}$, $\frac{1 . 2 . 3}{4 . 5 . 6}$, etc. vel haec $\frac{1 . 1}{1 . 2}$, $\frac{1 . 2 . 1 . 2}{1 . 2 . 3 . 4}$, $\frac{1 . 2 . 3 . 1 . 2 . 3}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6}$ etc. In qua numeratores sunt quadrata progressionis 1, 2, 6, 24 inter denominatores vero duos proximos aequidistans facile inuenitur. Sit in progressione 1, 2, 6, 24 etc. terminus, cuius index $\frac{1}{2}$, A, erit progressionis illius terminus ordine $\frac{1}{2} = \frac{AA}{1}$.

§. 21. Ponatur in termino generali $(2n+1)\int x^n dx (1-x)^n$, $n = \frac{1}{2}$ erit terminus huius exponentis $= 2\int dx \sqrt{x-xx} = \frac{AA}{1}$, vnde $A = \sqrt{1 . 2 \int dx \sqrt{(x-xx)}} =$ termino progressionis 1, 2, 6, 24, etc. cuius index est $\frac{1}{2}$, qui ergo vt ex eo elucet est radix quadrata ex circulo diametri 1. Dicatur nunc terminus huius progressionis ordine $\frac{3}{2}$, A, erit respondens in assumta progressione $= \frac{AA}{1 . 2 . 3} = 4\int dx (x-xx)^{\frac{3}{2}}$ ergo $A = \sqrt{1 . 2 . 3 . 4 \int dx (x-xx)^{\frac{3}{2}}}$. Simili modo inuenitur terminus ordine $\frac{5}{2} = \sqrt{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 \int dx (x-xx)^{\frac{5}{2}}}$. Ex quibus generaliter concludo terminum ordine $\frac{p}{2}$ fore $= \sqrt{1 . 2 . 3 . 4 \ldots (p+1) \int dx (x-xx)^{\frac{p}{2}}}$. Hoc igitur modo inueniuntur omnes termini progressionis, 1, 2, 6, 24 etc. quorum indices sunt fractiones denominatore existente 2.

 §. 22.

§. 22. Porro in termino generali $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}$ $\int x^{\frac{f}{g}} dx(1-x)^n$, pono $f=2n$ manente $g=1$, prodibit $(3n+1)\int dx(xx-x^3)^n$ terminus generalis huius progreſſionis $\frac{1}{3}$, $\frac{1.2}{5.6}$, $\frac{1.2.3}{7.8.9}$ etc. Multiplicetur ille per praecedentem $(2n+1)\int dx(x-xx)$, prodibit $(2n+1)(3n+1)\int dx(x-xx)^n \int dx(xx-x^3)^n$. Qui dabit hanc progreſſionem $\frac{1.1.1}{1.2.3}$, $\frac{1.2.1.2.1.2}{1.2.3.4.5.6}$ etc. vbi numeratores ſunt cubi terminorum reſpondentium progreſſionis 1. 2, 6. etc. Huius progreſſionis terminus ordine $\frac{1}{3}$ ſit A, erit reſpondens illius $\frac{A^3}{1} = 2(\frac{2}{3}+1)\int dx(x-xx)^{\frac{1}{3}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{1}{3}}$, ergo terminus ordine $\frac{1}{3}$ eſt $\sqrt[3]{1.2.\frac{5}{3}\int dx(x-xx)^{\frac{1}{3}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{1}{3}}}$. ſimiliter term. ordine $\frac{2}{3}$ eſt $\sqrt[3]{1.2.3.\frac{7}{3}\int dx(x-xx)^{\frac{2}{3}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{2}{3}}}$. Atque terminus ordine $\frac{4}{3}$ eſt $\sqrt[3]{1.2.3.4.5.\frac{11}{3}\int dx(x-xx)^{\frac{4}{3}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{4}{3}}}$ et generaliter terminus ordine $\frac{p}{3}$ eſt $\sqrt[3]{1.2.---p.(\frac{2p+1}{3})(p+1)\int dx(x-xx)^{\frac{p}{3}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{p}{3}}}$.

§. 23. Si vlterius progredi velimus, ponendo $f=3n$, oportebit terminum generalem $(4n+1)\int dx(x^3-x^4)^n$ in praecedentes multiplicare, vnde habetur $(2n+1)(3n+1)(4n+1)\int dx(x-xx)^n \int dx(x^2-x^3)^n \int dx(x^3-x^4)^n$ qui eſt pro hac ſerie $\frac{1.1.1.1}{1.2.3.4}$ $\frac{1.2.1.2.1.2.1.2}{1.2.3.4.5.6.7.8}$ etc. Ex qua definientur termini pro-

progressionis 1, 2, 6, 24, etc. quorum indicet sunt fractiones denominatorem 4 habentes. Nimirum terminus cuius index est $\frac{p}{4}$ inuenietur $= \sqrt[4]{1.2.3. --- p. (\frac{2p}{4}+1)(\frac{3p}{4}+1)(p+1)} \int dx(x-xx)^{\frac{p}{4}} \int dx(xx - x^3)^{\frac{p}{4}} \int dx(x^3 - x^4)^{\frac{p}{4}}$. Hinc generaliter concludere licet terminum ordine $\frac{p}{q}$ esse $= \sqrt[q]{(1.2.3. --- p)((\frac{2p}{q}+1)(\frac{3p}{q}+1)(\frac{4p}{q}+1) ----- (p+1))} (\int dx(x - xx)^{\frac{p}{q}} \int dx(x^2 - x^3)^{\frac{p}{q}} \int dx(x^3 - x^4)^{\frac{p}{q}} ---- \int dx(x^{q-1} - x^q)^{\frac{p}{q}})$. Ex hac igitur formula termini cuiuscunque indicis fracti inuenientur per quadraturas curuarum algebraicarum: ad id autem requiritur $(1.2.3. -- p)$ terminus cuius index est numerator fractionis propositae.

§. 24. Eodem modo vlterius progredi licet ad progressiones magis compositas, assumendis terminis generalibus magis compositis, sed ea longius non persequor. Possunt etiam signa integralia multiplicari, vt terminus generalis sit $\int q\,dx \int p\,dx$, nimirum integrale ipsius $p\,dx$ debet multiplicari per $q\,dx$, et quod resultat denuo integrari, id quod demum dabit facto $x = 1$ terminum seriei. In vtraque autem integratione, vt sit determinata, oportet addenda constante efficere, vt posito $x = 0$, integrale fiat itidem $= 0$. Similiter tractandi sunt termini generales, qui

qui pluribus signis integralibus continentur vt $\int r\,dx \int q\,dx \int p\,dx$. Attamen semper loco p, q, r etc. tales sunt sumendae functiones, vt, quoties n fuerit numerus integer affirmatiuus, prodeant termini ad minimum algebraici.

§. 25. Sit terminus generalis $\int \frac{dx}{x} \int x^e\,dx(1-x)$ hic in seriem conuersus dat $\frac{x^{e+1}}{(e+1)^2} - \frac{n.\,x^{e+2}}{1.(e+2)^2} + \frac{n.\,n-1.\,x^{e+3}}{1.2.(e+3)^2}$ etc. Posito $x=1$, habebitur terminus ordine n per hanc seriem $\frac{1}{(e+1)^2} - \frac{n}{1\,(e+2)^2} + \frac{n.n-1}{1.2.(e+3)^2}$ etc. Progressio vero ipsa haec erit a termino cuius index est o incipiens $\frac{1}{(e+1)^2}$, $\frac{(e+2)^2-(e+1)^2}{(e+2)^2(e+1)^2}$, $\frac{(e+3)^2(e+2)^2-2(e+3)^2(e+1)^2+(e+2)^2(e+1)^2}{(e+3)^2(e+2)^2(e+1)^2}$, $\frac{(e+4)^2(e+3)^2(e+2)^2-3(e+4)^2(e+3)^2(e+1)^2+3(e+4)^2(e+2)^2(e+1)^2-(e+3)^2(e+2)^2(e+1)^2}{(e+4)^2(e+3)^2(e+2)^2(e+1)^2}$ etc. Lex huius progressionis manifesta est, et non indiget explicatione. Sit $e=o$, erit $\int dx(1-x)^n = \frac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1}$ ergo terminus generalis est $\int \frac{dx-dx(1-x)^{n+1}}{(n+1)x}$, progressio vero haec erit $\frac{1}{1}$, $\frac{4-1}{4.1}$, $\frac{9.4-2.9.1+4.1}{9.4.1}$, $\frac{16.9.4-3.16.9.1+3.16.4.1-9.4.1}{16.9.4.1.}$ etc. Huius differentiae hanc constituent progressionem, $\frac{-1}{4.1}$, $\frac{-9+4}{9.4.1}$, $\frac{-16.9+2.16.-9.4}{16.9.4.1.}$ etc.

§. 26. In hac dissertatione ergo id, quod praecipue intendi, assecutus sum; nempe vt terminos

minos generales inuenirem omnium progressionum, quarum singuli termini sunt facta ex factoribus in progressione arithmetica progredientibus, in quibusque numerus factorum vt libuerit ab indicibus terminorum pendeat. Quanquam autem hic semper numerus factorum indici aequalis positus sit, tamen si is alio modo inde pendens desideretur, res nihil habet difficultatis. Index denotatus est litera n, si iam quis requirat vt numerus factorum sit $\frac{nn+n}{2}$, alia operatione opus non est, nisi vt vbique loco n substituatur $\frac{nn+n}{2}$.

§. 27. Coronidis loco adhuc aliquid, curiosum id quidem magis quam vtile adiungam. Notum est per $d^n x$ intelligi differentiale ordinis n ipsius x, et $d^n p$, si p denotet functionem quampiam ipsius x, ponaturque dx constans, esse homogeneum cum dx^n, semper autem, quando n est numerus integer affirmatiuus, ratio quam habet $d^n p$ ad dx^n algebraice potest exprimi, vt si $n=2$ et $p=x^3$, erit $d^2(x^3)$ ad dx^2 vt $6x$ ad 1. Quaeritur nunc si n sit numerus fractus, qualis tum futura sit ratio. Difficultas in his casibus facile intelligitur, nam si n est numerus integer affirmatiuus, d^n continuata differentiatione inuenitur, talis autem via non patet, si n est numerus fractus. Sed tamen ope interpolationum progressionum, de quibus in hac dissertatione explicaui, rem expedire licebit.

§. 28.

§. 28. Sit inuenienda ratio inter $d^n(z^e)$ et dz^n posito dz constante, seu requiritur valor fractionis $\frac{d^n(z^e)}{dz^n}$. Videamus primo qui sint eius valores si n est numerus integer, vt postmodum generaliter illatio fieri possit. Si $n=1$. erit eius valor $e z^{e-1} = \frac{1.2.3.\cdots e}{1.2.3.\cdots(e-1)} z^{e-1}$, hoc modo e exprimo, vt facilius postea ea quae tradita sunt huc referantur. Si $n=2$, erit valor $e(e-1) z^{e-2} = \frac{1.2.3.\cdots e}{1.2.3.\cdots(e-2)} z^{e-2}$. Si $n=3$, habebitur $e(e-1)(e-2)z^{e-3} = \frac{1.2.3.\cdots e}{1.2.3.\cdots(e-3)} z^{e-3}$. Hinc generaliter infero quicquid sit n fore semper $\frac{d^n(z^e)}{dz^n} = \frac{1.2.3.\cdots e}{1.2.3.\cdots(e-n)} z^{e-n}$. Est autem per §. 14, $1.2.3.\cdots e = \int dx(-lx)^e$ et $1.2.3.\cdots(e-n) = \int dx(-lx)^{e-n}$. Quare habetur $\frac{d^n(z^e)}{dz^n} = z^{e-n} \frac{\int dx(-lx)^e}{\int dx(-lx)^{e-n}}$ vel $d^n(z^e) = z^{e-n} dz^n \frac{\int dx(-lx)^e}{\int dx(-lx)^{e-n}}$. Ponitur hic dz constans et $\int dx(-lx)^e$ vt et $\int dx(-lx)^{e-n}$ ita debent integrari, vt supra praeceptum est, et tum ponere oportet $x=1$.

§. 29. Non necesse est, quomodo verum eliciatur, ostendere, apparebit id ponendo loco n numerum integrum affirmatiuum quemcunq;. Quaeratur autem quid sit $d^{\frac{1}{2}}z$, si sit dz constans. Erit ergo $e=1$ et $n=\frac{1}{2}$. Habebitur itaque $d^{\frac{1}{2}}z = \frac{\int dx(-lx)}{\int dx\sqrt{-lx}}$

$\sqrt{zdz}$

$\sqrt{z\,dz}$. Est autem $\int dx(-lx) = 1$ et dicta area circuli A, cuius diameter est 1, erit $\int dx\sqrt{-lx} = \sqrt{A}$, vnde $d^{\frac{1}{2}}z = \sqrt{\frac{z\,dz}{A}}$. Proposita igitur sit haec aequatio ad quampiam curuam $y\,d^{\frac{1}{2}}z = z\sqrt{dy}$, vbi dz ponitur constans, et quaeratur qualis ea sit curua. Cum sit $d^{\frac{1}{2}}z = \sqrt{\frac{z\,dz}{A}}$ abibit ea aequatio in hanc $y\sqrt{\frac{z\,dz}{A}} = z\sqrt{dy}$, quae quadrata dat $\frac{yy\,dz}{A} = z\,dy$: vnde inuenitur $\frac{1}{A}\,lz = c - \frac{1}{y}$, vel $ylz = cAy - A$, quae est aequatio ad curuam quaesitam.

PROBLEMATIS

DE STATIONIBVS PLANETARVM

CASVS ALTER.

AVCTORE

F. C. Maiero.

Sint datae duorum Planetarum orbitae ad eclipticae planum reductae, earumque positio; sit quoque data vnius distantia a Sole: Quaeritur distantia alterius stationaria. **Tabula II. Fig. 2.**

Maioris orbitae axis AB sit = A.
eiusdem eccentricitas dupla OF sit = F.
eiusdem parameter — — = P.