1735

Solutio problematis astronomici ex datis tribus stellae fixae altitudinibus et temporum differentiis invenire elevationem poli et declinationem stellae. Auct. L. Eulero

Leonhard Euler

SOLUTIO PROBLEMATIS ASTRONOMICI EX DATIS TRIBUS STELLAE FIXAE ALTITUDINIBUS ET TEMPORUM DIFFERENTIIS INUENIRE ELEUATIONEM POLI ET DECLINATIONEM STELLAE.

Auct. Leonh. Eulero.

Tab. IX. Fig. 1.

Lemma. In triangulo ſphaerico quocunque ABC eſt coſ. anguli $A = \frac{cof:BC - cof:AB.\,cof:AC}{fAB.\,fAC}$, poſito radio vel ſinu toto 1. Liquet hoc ex iis, quae *Clar. Profesſor Maier* in ſuis Trigonometricis tradidit.

Coroll: Ex his fluit eſſe coſ. BC = coſ. AB. coſ. AC + coſ. A. ſAB. ſAC.

Theorema. In omni triangulo ſphaerico ABC, eſt coſ. $BC = \frac{cof:(AB+AC) - cof:(AB-AC)}{2} + \frac{cof:A.\,cof:(AB-AC) - cof:A.\,cof:(AB+AC)}{2}$. Poſito ſinu toto 1.

Demonſtratio. Factum duorum coſinuum aequatur ſemisſi coſinus ſummae cum ſemiſſi coſinus differentiae arcuum vel angulorum. Atque factum duorum ſinuum aequale eſt ſemiſſi coſinus differentiae, demta ſemiſſi coſinus ſummae arcuum vel angulorum. Vt ex iisdem citatis vel apparebit, vel facile colligetur. Erit igitur coſ. AB. coſ. $AC = \frac{cof.(AB+AC) + cof:(AB-AC)}{2}$, et $fAB.\,fAC = \frac{cof:(AB-AC) - cof:(AB+AC)}{2}$ His ad aequationem in lemmatis corollario accommodatis prodibit coſ. $BC = \frac{cof:(AB+AC) + cof:(AB-AC)}{2} + \frac{cof:A.\,cof:(AB-AC) - cof:A.\,cof:(AB+AC)}{2}$. Q. E. D.

PRO-

PROBLEMA.

Datis ſtellae fixae in tribus locis ABC ſucceſſiue obſeruatae altitudinibus ſiue earum complementis ZA, ZB, ZC, temporibusque inter obſeruationes praeterlapſis, vel angulis ad polum P, APB, BPC, inuenire eleuationem poli ſeu ejus complementum PZ, et declinationem ſtellae ſeu ejus complementum AP vel BP vel CP. Fig. 2.

Solutio. Dicantur ſinus altitudinis primae vel coſ. AZ, a; Coſinus BZ, b et coſ. CZ, c. Atque ſAPB, P; ejusque coſinus, p: ſAPC, Q, ejusque coſinus, q. Sit autem ſZPA=Z ejusque coſinus $=z$. Tum compendii cauſa ſit coſ: ZPB$=r$ et coſ. ZPC$=s$. Ponatur porro coſ: (PZ+AP)$=x$, et coſ: (PZ−AP)$=y$. Habebitur in triangulo ſphaerico ZPA, coſ: AZ vel $a=\frac{x+y+zy-zx}{2}$ $=\frac{(1-z)x+(1+z)y}{2}$. Deinde in triangulo ZBP eſt $b=\frac{x+y+ry-rx}{2}=\frac{(1-r)x+(1+r)y}{2}$. Et ſimiliter in triangulo ZPC erit $c=\frac{(1-s)x+(1+s)y}{2}$. Ex quibus tribus aequationibus tres incognitas x, y et z determinari oportet. Aequationes I et II dabunt $y=\frac{a(1-r)-b(1-z)}{z-r}$. Secunda vero et tertia dant $y=\frac{b(1-s)-c(1-r)}{r-s}$. Vnde colligitur haec aequatio $a(1-r)(r-s)-b(1-z)(r-s)$ $=b(1-s)(z-r)-c(1-r)(z-r)$. Quae abit in hanc, $a(1-r)(r-s)+c(1-r)(z-r)=b(1-r)(z-s)$, atque diuiſa per $1-r$ dat $a(r-s)+c(z-r)=b(z-s)$. Sed ex conjunctione ſinuum ſequitur eſſe $r=pz-$PZ et $s=qz-$QZ. Vnde habebitur $az(p-q)-a$Z(P−Q)

 $+cz$

$+cz(1-p)+cPZ=bz(1-q)+bQZ$. Ex qua conficitur haec $\frac{Z}{z}=\frac{a(p-q)-b(1-q)+c(1-p)}{aP-aQ+bQ-cP}=\frac{a(p-q)-b(1-q)+c(1-p)}{P(a-c)-Q(a-b)}$. Eſt autem $\frac{Z}{z}$ tangens anguli ZPA; dicatur ea T, ſitque etiam $1-p=\pi$ et $1-q=\varkappa$, denotabunt π et $\varkappa$, ſinus verſos angulorum APB, APC. Eruitur igitur haec aequatio $T=\frac{a(\varkappa-\pi)-b\varkappa+c\pi}{P(a-c)-Q(a-b)}=\frac{\varkappa(a-b)-\pi(a-c)}{P(a-c)-Q(a-b)}$. Ex qua determinatur angulus ZPA, ex eoque reliqua. Eſt autem $y=\frac{a(1-r)-b(1-z)}{z-r}$ et $x=\frac{b(1+z)-a(1+r)}{z-r}$ vt ex praecedentibus apparet. Dato vero angulo ZPA, dabitur et ZPB et proinde r. Erit autem $\frac{y+x}{2}=a-\frac{z(a-b)}{z-r}$ et $\frac{y-x}{2}=\frac{a-b}{z-r}$. Hinc facile inueniuntur y et x, coſinus ſummae et differentiae arcuum quaeſitorum. Q. E. T.

Exemplum hic appono, quod antea ex altitudine poli 54°, 43′ aſſumta computaueram, vt inueſtigarem iidemne hac methodo eruantur numeri. Eſt altitudo prima 71°, 15′, ſecunda 68°, 34′, et tertia 63°, 54′. Tempus inter I et II obſeruationem ſeu angulus APB eſt 7°, 52′. Tempus inter primam et tertiam ſeu ang: APC eſt 20°, 36′. Erit ergo $a=9469502$, $b=9308279$, $c=8979213$. Ergo $a-c=490289$, $a-b=161223$, porro $P=1368683$ et $\pi=94107$, $Q=3518416$, $\varkappa=639404$. Erit $\varkappa(a-b)-\pi(a-c)=5692700$ et $P(a-c)-Q(a-b)=10380060$. Vnde inuenitur $T=5484423$ = tang: 28°, 45′. Eſt ergo angulus ZPA=28°, 44′, et ZPB=36°, 37′. Habetur itaque coſ: ZPA $=z=8767267$ et coſ: ZPB $=r=8026440$. Ergo $z-r=0740727$. Cum vero ſit

$a-b$

$a-b=162223$. Erit $\frac{a-b}{z-r}=2176264=\frac{y-x}{2}$. Deinde eſt $\frac{z(a-b)}{z-r}=1907988$. Hoc ab $a=9469502$ ablato reſtat $\frac{y+x}{2}=7561514$. Hinc inuenitur $y=9737778$, et $x=5385250$. Eſt ergo ſumma arcuum $AP+ZP=57°, 25'$, et differentia arcuum $AP-ZP$ vel $ZP-AP=13°, 9'$. Ex his pro AP et ZP inueniuntur hi duo valores $35°, 17'$ et $22°, 8'$. Et pro eleuatione poli et declinatione ſtellae conſequenter hi duo qui ſunt illorum conplementa $54°, 43'$ atque $67°, 52'$. Quis autem horum ſit pro declinatione aut eleuatione poli ex problemate non determinatur. Id tamen certum eſt alterum eleuationem poli, alterum declinationem ſtellae praebere.

Verum etiam hinc ſtellae tempus culminationis cognoſcitur: diſtat enim a tempore primae obſeruationis angulo ZPA, quia PZ eſt arcus meridiani. Inuentus vero eſt ang. $ZPA=28°, 45'$, qui ad tempus reductus dat 1 hor. 55', hocque tempore vel addendo vel ſubtrahendo a momento obſeruationis primae, prout circumſtantiae requirunt, inuenitur tempus culminationis, ſi ipſe ſol in obſeruationibus hisce adhibeatur, inuenietur verum meridiei tempus.