



1735

Curva tautochrone in fluido resistentiam faciente secundum quadrata celeritatum

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Curva tautochrone in fluido resistentiam faciente secundum quadrata celeritatum" (1735). *Euler Archive - All Works*.
13.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/13>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

cillationum per PAN. Quare si in vtroque lapsu graue ad N vsque perueniat ascendendo, erit $tMA + tAN = 2tPA + 2tAN$. Consequenter $tMA - tAN = 2tPA$. Differentia ergo temporum descensuum per arcus MA et NA aequatur duplo tempori descensus per verticalem AP.

CURVA TAUTOCHRONA IN FLUIDO RESISTENTIAM FACIENTE SECUNDUM QUADRATA CELERITATUM.

Auct. Leonb. Eulero.

§. 1.

Postquam *Hugenius* primum inuenisset cycloidem esse curuam Tautochronam in vacuo et Hypothesi grauitatis vniformis; *Neutonus* atque *Hermannus* dederunt quoque Tautochronas pro hypothesi grauitatis difformiter agentis et tendentis ad punctum quodcunque fixum tanquam centrum. Posuerunt autem motum fieri in vacuo, neque vllam pati resistantiam. Quod vero ad media resistantia attinet, *Neutonus* etiam demonstrauit cycloidem esse tautochronam in medio in celeritatum ratione resistente; ad alia autem resistantia media neque ipse neque quisquam alius est progressus, vt, quae curuae in iis tautochronismum producant, ostenderent.

M. Octobr. 1729.
Tab. VII.

I 2

§. 2.

§. 2. Non quidem est difficile in medio quocunque resistente inuenire curuam, super quâ graue eodem modo descendat, quo super data curuâ in vacuo. Id, cum intellexissem eas quaesui in quacunque resistantiae hypothesei curuas, super quibus graue aequaliter descendat ac super cycloide in vacuo, quae mihi curuae tum tautochronae in mediis his resistantibus esse videbantur, eo quod corporis super iis descensus aequalis esset descensui corporis super Tautochronâ curua in vacuo. Atque hanc ipsam proprietatem eae habent curuae, quas in Actis Lips. Ao. 1726. dedi, et corpora super quaque earum in medio, ad quod ea pertinet, resistente collocata eodem descendunt modo, quo super cycloide in vacuo; quamobrem eas etiam Tautochronarum nomine appellauit.

§. 3. Rem vero hanc postea accuratius perpendens, eam ita habere deprehendi; ut tota curua in medio resistente percurrenda ab initio descensus super curua in vacuo percurrenda assumpto pendeat. Quare si in curua data aliud ponatur descensus initium ipsa curua datae in medio resistente similem descensum producat alia erit. Ex quo intelligitur etiam si habeatur curua, super qua corpus in medio resistente aequalem habeat descensum, ac super cycloide in vacuo, initio descensus videlicet dato; tamen hanc nondum eam habere proprietatem, ut graue ubicunque descensum inchoauerit eodem tempore ad punctum infimum perueniat, etenim

ntm descensus non cum descensu in cycloide congruet, nisi is ex dato puncto incipiatur.

§. 4. Idem attendenti uberius palam fiet, si inspiciat aequationes ibi datas, et modum, quo erutae fuerunt. Deprehendet enim in iis adhuc literam, quae constantis speciem prae se fert; quae vero re ipsa ac initio descensus pendet. Id ergo si aliter voluerit assumere ea apparens constans alia erit et idcirco curua quasi alium parametrum acquireret, et a priori diuersa euadet. Hoc incommodum non diu post ipse animaduerti, et praeterea *Celeb. Hermannus* in dissertatione de motibus variatis Actis Anni 1727 inserta, in qua ostendit, curuas, quae ex eodem principio, quo ipse usus sum, inueniantur, quaeque tautochronae esse videantur, huiusmodi tamen non esse, tum ob rationes a me quoque perspectas hicque expositas, tum tempus descensus ipsum inuestigauit, idque constans non esse pro variis descensus initiis reperit.

§. 5. Nolo igitur, quanquam eas ipse principio in tautochronarum numero habui, aliud iudicium de iis ferri, nisi quod pro quolibet medio resistente aequatio ibi data ob constantem memoratam variabilem ponendam totam exhibeat familiam curuarum, super quibus graua ex debito cuique puncto descensum incipientia aequali tempore ad punctum infimum perueniant, idque eodem modo, quo in vacuo super cycloide. Cum igitur cognouissem curuas has ad tautochronismum producendum non esse aptas, statim non solum ego verum

etiam alii, cum quibus communicaueram in id incubuimus, vt veras tautochronas in medio quocunque resistente inueniremus. - Postquam igitur rem multis modis tentassem, potitus sum tandem tautochrona, sed in vnica tantum resistantiae hypothesei juxta velocitatis quadrata, quam in hac disertatione exponere constitui.

§. 6. Cum nuper nouam quandam detexissem methodum, quâ a priori non solum cycloidem, sed insuper infinitas adhuc alias inueni curuas tautochronas in vacuo, eâ quoque ad tautochronas in mediis resistantibus inueniendas vti institui; methodi vniuersalitate fretus, si quae sint tautochronae in mediis resistantibus, eas ope hujus methodi inueniri debere. Quantum autem adhuc hac in re efficere potui, prorsus mihi necesse esse visum est, vt velocitas corporis super curua quacunque in eo resistanti medio, pro quo tautochrona desideratur, descendens vel ascendens in puncto quocunque possit exprimi, non quidem algebraice, sed transcendenter quomodocunque. Id vero cum non nisi in vacuo, et in medio resistantiam in ratione duplicata celeritatum faciente praestare in potestate sit, tautochronam saltem in fluidis, quia haec in ratione duplicata celeritatum resistere putantur, hic inuenire docebo.

§. 7. Volui primum problema ita instituere, vt nuper eandem quaestionem in vacuo tractavi, vt, quemadmodum ibi factum est, data curua quacunque inuenirem aliam, quae cum ea conjuncta tauto-
chro-

chronismum oscillationibus inducat. Verum istam quaestionem nondum enodare licuit, cum plane dissimilis sit ejus quae ad vacuum spectat. Nam ad rem eodem modo, quo in vacuo feci, expediendam opus est, ut in duabus curvis data et quaesita duo semper puncta dari queant, in quibus corporis oscillantis celeritates sunt aequales, atque ut eorum determinatio non ab ipsa velocitate pendeat; sed quibus in punctis una oscillatione celeritates aequales fuerunt, ibidem in aliis oscillationibus sint aequales. Id vero cum in fluido fieri nequeat, contentus hic ero eam determinasse curvam, super qua corpus descendens aequali semper tempore ad punctum infimum pertingat.

§. 8. Sit *CMA* curva quaesita ad axem *AP* verticalem relata. Hanc ejus esse oportet proprietatem, ut corpus super ea in fluido collocata descendens aequalibus temporibus ad punctum infimum *A* perueniat, ubicunque descensum adorsum fuerit. Fiat is ex *E*, perspicuum est, corpus descendendo a vi grauitatis, quatenus ejus grauitas specifica major est illa, quam habet fluidum, continuo accelerari, simul vero propter resistentiam fluidi continuo in ratione duplicata celeritatum retardari, donec tandem in *A* retineat certam celeritatem, quam ponam in vacuo acquiri posse lapsu ex altitudine *b*. Ut corpus ex *A* hac celeritate rursus in *E* vsque ascendere possit, oportet grauitatis vim, quae ante promotebat, aduersam; resistentiae vero vim, quae ante aduersa erat, nunc secundam et promouentem pone-

Fig. 1.

nere, quo fiet, ut hic ascensus prorsus similis sit descensui. Quia magis juvat ascensum considerare, hoc praemittere oportuit.

§. 9. Ascendere ergo ponatur corpus ex A velocitate altitudinis b , ita ut acceleretur in ratione duplicata celeritatum, perveniet id rursus ad E. Sit hoc corpus cylinder altitudinis a secundum axis directionem motus; etsi haec figura minus idonea sit ad oscillandum, tamen, quia calculus sit simplicior, facileque ad alias figuras transferri potest, hanc figuram retinere volui. Sit porro grauitas specifica corporis ad eam fluidi ut m ad n . Peruenerit corpus hoc modo ascendens ad M, ubi ejus celeritas sit tanta quanta ex altitudine v in vacuo generatur. Dicatur arcus percursus AM, s , et abscissa AP, x . Momento perveniant omnia in situm proximum corpus nempe in m . Erit celeritas corporis in m genitae ex altitudine $v + dv$ aequalis atque $Mm = ds$ et $Pp = dx$.

§. 10. Quia corpus in fluido versatur, non toto suo pondere descendere conatur, sed excessu sui ipsius ponderis super pondus aequalis voluminis fluidi. Vis ergo corpus sollicitans est ad verum ejus pondus ut $m-n$ ad m . Si igitur vis grauitatis dicatur g , erit vis haec sollicitans $= (m-n)g : m$. Ascendente corpore per elementum Mm , si vis grauitatis ipsa g ageret foret $dv = -dx$, si nimirum corpus in vacuo ascenderet. Quia autem vis sollicitans est ad vim grauitatis ut $m-n$ ad m , erit effectus illius ad hujus effectum $-dx$ ut $m-n$ ad m . Quamobrem
agen-

agente vi hac sollicitante, erit $dv = -(m-n)dx : m$ signum hic negativum obtinet, quia vis grauitatis contraria ponitur motui corporis. Haec igitur haberetur aequatio $dv = -(m-n)dx : m$, ex qua motus corporis determinari deberet, nisi acceleratio, quae resistentiae fluidi aequalis est, accederet.

§. 11. Videamus nunc, quanta sit resistentia fluidi in cylindrum velocitate alt. v motum basin suam obuertentem. Vis haec aequalis est vi, quam fluidum eadem celeritate motum in cylindrum quiescentem exereret; haec vero vis aequatur ponderi cylindri fluidi altitudinis v , et basis aequalis ei, quam habet ille cylinder oscillans. Est itaque pondus ejus cylindri fluidi ad pondus hujus vt nv ad ma . Vis igitur haec resistentiae se habet ad vim grauitatis quoque vt nv ad ma . Corpore autem ascendente per Mm , si grauitas acceleraret, et secundum directionem Mm ageret, foret $dv = ds$. Vis ergo resistentiae pro ea ratione effectum edens et accelerans corpus motum, faciet vt sit $dv = n v ds : ma$; si autem retardaret, foret $dv = -n v ds : ma$.

§. 12. Si igitur sola vis grauitatis ageret retardando motum corporis, tum esset per §. 10. $dv = -(m-n)dx : m$, si vero sola vis accelerans aequalis vi resistentiae ageret, tum esset per §. 11. $dv = n v ds : ma$. Ex quibus colligitur, si vtraque simul agat, tum esse $dv = n v ds : ma - (m-n)dx : m$, seu $madv + (m-n)adx - n v ds = 0$. Ex qua aequatione motus corporis determinari debet. Quia autem in hac aequatione v vnicam habet dimensionem, ea

integrari potest. Reducatur ad hanc formam dv
 $\frac{vds}{ma} - \frac{(m-n)dx}{m}$. Multiplicetur ea per $c^{\frac{-ns}{ma}}$; denotat
 vero c numerum, cujus logarithmus hyperbolicus
 est 1, habebitur $c^{\frac{-ns}{ma}} dv - \frac{nc}{ma} vds - \frac{(m-n)c}{m} c^{\frac{-ns}{ma}} dx$. Cu-
 jus integralis est sequens $c^{\frac{-ns}{ma}} v = C - \frac{(m-n)}{m} \int c^{\frac{-ns}{ma}} dx$.

§. 13. Ponatur $\frac{m-n}{m} \int c^{\frac{-ns}{ma}} dx = t$, cum ejus inte-
 grale ex curva cognita possit haberi, vel faltem con-
 strui. Ita autem, si fieri posset, integrari ponitur,
 ut ejus integrale fiat $= 0$, si ponatur $x = 0$, quo t
 determinatum valorem adipiscatur. Habemus ergo
 sequentem aequationem $c^{\frac{-ns}{ma}} v = C - t$. Constans
 haec C ita debet accipi, ut, posito $x = 0$, fiat $v = b$,
 talis enim ponitur esse celeritas corporis in puncto
 A, sed posito $x = 0$, erit et $s = 0$ et $t = 0$, unde
 quia $c^0 = 1$, oritur $C = b$. Quamobrem inuenitur se-
 quens ad institutum nostrum prorsus accommodata
 aequatio $v = c^{\frac{ns}{ma}} (b - t)$. Et hinc quoque intelligitur,
 ubi velocitas evanescat, seu quousque corpus in cur-
 ua sit ascensurum, ibi nimirum ubi est $v = 0$, seu
 $t = b$. Celeritas vero ipsa corporis in M erit ut \sqrt{v}
 seu ut $c^{\frac{ns}{2ma}} \sqrt{(b - t)}$.

§. 14. Cum jam habeatur celeritas corporis M, erit
 tempusculum per arcum Mm, quod est ut $\frac{ds}{\sqrt{v}}$, seu
 10-

loco w superiore valore substituto vt $\frac{\frac{ds}{ns}}{c^{2ma}\sqrt{(b-t)}}$. Id quod exprimit elementum temporis. Hujus ergo integrale ita debet esse comparatum, vt, ea adjecta constante, quae facit tempus = 0 si ponatur x vel t vel $s=0$, vt inquam, si fiat $t=b$, quo in casu integrum obtinetur tempus ascensus, tum b quae a quantitate arcus descripti pendet prorsus ex computo abeat. Hoc vt fiat jam alibi demonstraui oportere, vt tota expressio elementi temporis nullam habeat dimensionem. Quaeritur ergo qualis s functio ipsius t esse debeat? Quia ad s exprimendum b in computum ingredi non potest, sed solum t , perspicuum est fore $\frac{\frac{ds}{ns}}{c^{2ma}} = \frac{dt\sqrt{e}}{\sqrt{t}}$ et sic elementum temporis erit $\frac{dt\sqrt{e}}{\sqrt{(bt-it)}}$. Ergo longitudo penduli isochroni in vacuo est $2e$.

§. 15. Ex determinatione curuae, vt fiat tautochrone, haec orta est aequatio $\frac{ds}{\sqrt{e}} : \frac{\frac{ns}{c^{2ma}}}{\sqrt{t}} = dt$ ex qua natura curuae determinari debet. Aequatio ea integrata dat hanc $C - \frac{2ma}{n} c^{\frac{-ns}{2ma}} = 2\sqrt{et}$; vt, facto $t=0$, fiat $s=0$, necesse est, vt sit $C = \frac{2ma}{n}$; Propterea haec inuenitur aequatio pro curua quaesita, $\frac{ma}{n} (1 - c^{\frac{-ns}{2ma}}) = \sqrt{et}$, et sumendis quadratis haec $\frac{m^2 a^2}{n^2} (1 - c^{\frac{-ns}{2ma}})^2 = et$. Quae denuo differentiatata dat

$$\frac{na}{n} (1 - c^{\frac{-ns}{2ma}}) c^{\frac{-ns}{2ma}} ds = edt \text{ seu } mac^{\frac{-ns}{2ma}} ds - mac^{\frac{-ns}{ma}} ds = nedt.$$

Est vero $t = \frac{m-n}{m} \int c^{\frac{-ns}{ma}} dx$, ergo $dt = \frac{m-n}{m} c^{\frac{-ns}{ma}} dx$. Quocirca ejecto t , habebitur aequatio inter s et x , haec $mmac^{\frac{-ns}{2ma}} ds - mmac^{\frac{-ns}{ma}} ds = (m-n) nec^{\frac{-ns}{ma}} dx$. Quae multiplicata per $c^{\frac{ns}{ma}}$ abit in hanc $mmac^{\frac{ns}{2ma}} ds - mmads = (m-n) nedx$.

§. 16. Aequatio differentialis inuenta est iterum integrabilis; integrata vero dat, $\frac{2m^{\frac{3}{2}}aa}{n} c^{\frac{ns}{2ma}} - mmads - \frac{2m^{\frac{3}{2}}aa}{n} = (m-n) nex$, postquam debita constans $\frac{2m^{\frac{3}{2}}aa}{n}$ ablata est. Quae magis accommodatur hoc modo $c^{\frac{ns}{2ma}} = \frac{ns}{2ma} + 1 + \frac{(m-n)nex - m^{\frac{3}{2}}aa + 2m^{\frac{3}{2}}aa + (m-n)n^{\frac{2}{2}}ex}{2m^{\frac{3}{2}}aa}$

Haec quidem aequatio sufficeret ad curuam construendam; sed commodior euadet liberata ab exponentialibus. Hanc ob rem sumantur logarithmi, eritque $\frac{ns}{2ma} = l(m^{\frac{3}{2}}nas + 2m^{\frac{3}{2}}aa + (m-n)n^{\frac{2}{2}}ex) - l2m^{\frac{3}{2}}aa$.

Hinc differentiando acquiritur $\frac{nds}{2ma} = \frac{m^{\frac{3}{2}}nads + (m-n)n^{\frac{2}{2}}edx}{m^{\frac{3}{2}}nas + 2m^{\frac{3}{2}}aa + (m-n)n^{\frac{2}{2}}ex}$ et ex hac ordinando $m^2n^2asds + (m-n)n^3exds = 2(m-n)mn^2aedx$. Quae diuisa per m praebet sequentem aequationem finalem pro curua quaesita, $m^2asds + (m-n)nexds = 2(m-n)maedx$.

§. 17. Si itaque curua AME eam habuerit proprietatem, vt sit $m^2asds + (m-n)nexds = 2(m-n)maedx$

ea erit tautochrone hoc sensu, ut corpus cylindricum altitudinis a super ea descendens eodem tempore ad punctum infimum A perueniat, ubique descensum inceperit. Si loco cylindri placuerit globum adhibere ejusdem grauitatis specificae et diametri a , oportebit loco a in aequatione scribere $\frac{4}{3}a$, habebiturque $4m^2asds + 3(m-n)nexds = 8(m-n)maedx$, pro motu globi, cujus diameter est a . Si longitudo penduli isochroni in vacuo oscillanti dicatur f , erit $e = \frac{1}{2}f$; et hinc resultabit aequatio $8m^2asds + 3(m-n)nfxds = 8(m-n)maf dx$. Hanc aequationem jam ad quemuis casum specialem accommodare licet.

§. 18. Ponamus densitatem fluidi euanescere, quo motus corporis fiat in vacuo; erit, $n = 0$. Hoc igitur posito aequationis terminus secundus $3(m-n)nfxds$ euanescit, et tunc pro tautochrone in vacuo prodibit aequatio $8m^2asds = 8(m-n)maf dx$. Quae, cum sit $n = 0$, diuisa per $8m^2a$ reducitur ad $sds = f dx$. Haec vero integrata est $ss = 2fx$, aequatio ad cycloidem, cujus circuli genitoris diameter est $\frac{1}{2}f$. Id quod prorsus congruit cum iis, quae de tautochronismo cycloidis demonstrata sunt. Si ergo aequatio inuenta tautochronae in fluido ad vacuum reducitur, litera a diametrum globi oscillantis denotans exit ex aequatione; et tautochrone in vacuo proinde a magnitudine et figura corporis oscillantis non pendet. Sed in fluido ad tautochronam determinandam et magnitudine et figura et grauitate specificâ corporis oscillantis opus est.

§. 19. Curua, quam inuenimus, tautochrona inferuit descensui corporis, sed ex ea tautochrona, quae ad ascensum spectat in eodem fluido, inueniri poterit. Ponatur enim corpus in curua AME ascendere celeritate initiali, vt ante, ex altitudine b genita; habebit id et vim grauitatis, et resistentiam fluidi contrarias. Quamobrem, cum supra pro descensu haec inuenta sit aequatio, $madv + (m-n)adx - nvd s = 0$, vbi vis resistentiae, vti rem ibi considerauimus, erat accelerans; hoc in casu corporis ascendentis signum $-$ praefixum termino $nvd s$, qui vim resistentiae fluidi exponit, mutari debet in $+$. Quo facto habebitur aequatio $madv + (m-n)adx + nvd s = 0$. Ex qua ascensus eiusdem corporis, quod ante descendere positum est, determinabitur.

§. 20. Perspicuum est hanc aequationem ex superiore ad descensum spectante deriuari posse, modo in illa fiat s negatiuum. Quocirca, ad tautochronam ascensui inferuentem inueniendam non est necessarium, vt eodem, quo pro descensu, progrediar modo, sed tantum in aequatione pro tautochrona descensus inuenta loco s poni poterit $-s$. Hoc enim ea transformabitur in tautochronam ad ascensum accommodatam. Si ergo corpus ascendens fuerit globus diametri a , eius grauitas specifica ad eam fluidi vt m ad n , habebitur pro tautochrona sequens aequatio $8m^2asds - 3(m-n)nbxds = 8(m-n)mbdx$. Vbi loco f posui b , ne tempora ascensus et descensus aequalia esse debere videantur.

§. 21.

§. 21. Cum igitur curuam et descendente corpore et ascendente tautochronam inuenerim; eae si in punctis infimis jungantur, repraesentabunt tautochronam ascensui et descensui simul inferuentem. Sit AM tautochrona pro descensu, altera AN pro ascensu; manifestum est, si corpus semper in curua AM descensum incipiat, et ultra punctum in curua AN ascendat, tum oscillationes has absolutum iri atqualibus temporibus, vbicunque initia descensus in AM assumantur. Si igitur AP fuerit x et AM s , erit $8m^2 as ds + 3(m-n) n f x ds = 8(m-n) m a f dx$, pro altera curua AN vero, si dicatur AQ $= u$, et AN $= t$, erit $8m^2 at dt - 3(m-n) n b u dt = 8(m-n) m a b du$. Tempus vero oscillationis vnus aequale est duabus dimidiis oscillationibus duorum pendulorum in vacuo, quorum alterius longitudo est f , alterius b , seu vni integrae oscillationi penduli cuius long. $= \frac{f + 2\sqrt{fb} + b}{4}$.

§. 22. Si fuerit $f = b$, erunt duae curuae AM, AN partes ejusdem curuae continuae: Id quod ex eo intelligi potest, quod tum, si loco x ponatur u et loco s , quia in altera curua arcus fiunt negatiui, $-t$, aequatio illa ad descensum pertinens mutetur in hanc ascensui inferuentem. Curua ergo MA ab altera parte continuatur in curua AN, et tota curua MAN hanc habet proprietatem vt globus diametri a , et grauitatis specificae m super ea in fluido grauitatis specificae n constituta motum aequalibus semper temporibus oscillationis absoluat. Descensus vero fieri debent in curua MA, et ascensus in AN, nisi forte eae curuae hanc insuper habeant proprietatem,

tem, vt et, si descensus in NA et ascensus in AM fierent, oscillationes totae omnes vt ante essent tautochronae.

§. 23. Aequatio exponentialis §. 16. in eo solum differt ab ea, quam §. 21. dedimus, quod ibi fit a id quod hic est $\frac{2}{3}a$, et e , quod hic $\frac{1}{2}f$. Si ergo in ea aequatione ponatur $\frac{2}{3}a$ loco a , et $\frac{1}{2}f$ loco e , habebitur $64m^3aac^{\frac{3ns}{8ma}} - 64m^3aa - 24m^2nas = 9(m-n)n^2fx$ quae aequatio conuenit cum eâ quae descensui §. 21. inseruire inuenta est, $8m^2asds + 3(m-n)nfcds = 8(m-n)maf dx$. At alteri aequationi ad ascensum pertinenti $8m^2atdt - 3(m-n)nbudt = 8(m-n)mabdu$, respondet haec $64m^3aac^{\frac{3nt}{8ma}} - 64m^3aa + 24m^2nat = 9(m-n)n^2bu$. Hae aequationes exponentiales sufficiunt ad curuas construendas, quarum coordinatae sint x et s ; atque u et t , ex quibus deinceps ipsae curuae tautochronae construi poterunt.

§. 24. Cum c fit numerus cuius logarithmus hyperbolicus est 1, erit $c^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} etc.$ Hanc ob rationem est $c^{\frac{3ns}{8ma}}$ seu dicto $\frac{3n}{8m} = k$, $c^a = 1 + \frac{ks}{a.1} + \frac{k^2ss}{a^2.1.2} + \frac{k^3s^3}{a^3.1.2.3} + \frac{k^4s^4}{a^4.1.2.3.4} etc.$ adeoque $64m^3a^2c^{\frac{ks}{a}} = 64m^3a^2 + \frac{64m^3aks}{1} + \frac{64m^3k^2ss}{1.2} + \frac{64m^3k^3s^3}{a.1.2.3} + \frac{64m^3k^4s^4}{a^2.1.2.3.4} etc.$ Aequatio igitur superior exponentia-

lis,

lis, quae ob $\frac{3n}{8m} = k$ et inde $3n = 8km$, mutatur in
 $64m^3 aac^{\frac{ks}{a}} - 64m^3 aa - 64km^3 as = 64(1 - \frac{8}{3}k)k^2 m^3 fx$,
 feu in $a^2 c^{\frac{ks}{a}} - aa - kas = (1 - \frac{8}{3}k)k^2 fx$, reducetur ad fe-
 quentem ex terminorum infinito numero constan-
 tem $\frac{k^2 s^2}{1.2} + \frac{k^3 s^3}{a.1.2.3} + \frac{k^4 s^4}{a^2.1.2.3.4} - etc = (1 - \frac{8}{3}k)k^2 fx$, quae diuifa
 per kk dat $\frac{ss}{1.2} + \frac{k s^3}{a.1.2.3} + \frac{k^2 s^4}{a^2.1.2.3.4} - etc = (1 - \frac{8}{3}k)fx$ simili-
 ter pro ascensu erit $\frac{tt}{1.2} + \frac{k t^3}{a.1.2.3} + \frac{k^2 t^4}{a^2.1.2.3.4} - etc = (1 - \frac{8}{3}k)hu$.

§. 25. Ex his aequationibus colligitur, curuam
 vtramque et descensus et ascensus abire in cycloides, si
 $k:a$ fuerit infinite paruum; est vero $k = \frac{3n}{8m}$; Ergo eae
 curuae erunt cycloides si $3n : 8ma$ fuerit quantitas
 euanescentes. Id duplici modo euenire potest; Pri-
 mo si $n:m = 0$, id est, si fluidi densitas nulla fit, quo
 casu motus fit in vacuo. Alter est casus, si $a = \infty$ feu
 si globus oscillans fuerit infinite magnus ratione vi-
 delicet arcuum descriptorum s . Id ergo si accide-
 rit, tautochrone quoque erit cyclois. Porro et id
 inde concluditur, quo major minorue fit fractio
 $3n : 8ma$ seu tantum $n : ma$ eo magis minusue tauto-
 chronas a cycloide discrepare. Ex quo, quanto
 magis minusue in quouis fluido datus globus secun-
 dum cycloidem oscillans a tautochronismo aberret,
 perspici poterit.

§. 26. Perpendam nunc, qualem tautochronae
 inuentae figuram habere debeant, et primum ea,
 Tom .IV. L quae

Fig. 3. quae ad descensum pertinet. Sit AMB talis curua super axe AP vt dictis abscissis AP, x , applicatae PM expriment s . Habebitur pro hac curua haec aequatio, $8m^2asds + 3(m-n)nf x ds = 8(m-n)maf dx$, vel haec

$64m^3aac^{\frac{3ns}{8ma}} - 64m^3aa - 24m^2nas = 9(m-n)n^2fx$. Ex hac aequatione apparet hanc curuam nusquam habere punctum flexus contrarii, sed vniformi tractu, vt parabolam, in infinitum progredi. Curua autem inde formata, cujus arcus sunt respondentibus applicatis PM aequales, ibi habebit punctum reuerfionis vbi $ds = dx$. Hoc vero erit ibi, vbi est $8m^2as + 3(m-n)nf x = 8(m-n)maf$. Quae cum exponentiali

aequatione conjuncta dat $64m^3aac^{\frac{3ns}{8ma}} - 64m^3aa = 24(m-n)mna f$. Hinc elicitur punctum flexus contrarii esse in eo loco; vbi $s = \frac{8ma}{3n} + \frac{8m^2a + 3(m-n)nf}{8mma} - \frac{8ma}{3n} \left(1 + \frac{3(m-n)nf}{8mma}\right)$.

§. 27. Cum fit $8m^2as + 3(m-n)nf x = 8(m-n)maf$ erit $x = \frac{8ma}{3n} - \frac{8m^2as}{3(m-n)nf}$

Sed inuentum est $s = \frac{8ms}{3n} \left(1 + \frac{3(m-n)nf}{8m^2a}\right)$. Quamobrem punctum reuerfionis erit ad altitudinem x ab imo puncto A, estque $x =$

$\frac{8ma}{3n} - \frac{64m^3aa}{9(m-n)n^2f} \left(1 + \frac{3(m-n)nf}{8mma}\right)$. Conuertam logarith-

num in seriem, vt facilius de loco puncti reuerfionis iudicare liceat. Est vero $\left(1 + \frac{3(m-n)nf}{8mma}\right) = \frac{3(m-n)nf}{8mma}$

$\frac{9(m-n)^2n^2ff}{2.64m^4aa} + \frac{27(m-n)^3n^3f^3}{3.512m^6a^3} - \frac{81(m-n)^4n^4f^4}{4.4096m^8a^4}$ etc, ergo $\frac{64m^3aa}{9(m-n)n^2ff}$

$\left(1 + \frac{3(m-n)nf}{8mma}\right)$

$$I(1 + \frac{3(m-n)nf}{8m^2a}) = \frac{8ma}{3n} \frac{(m-n)f}{2n} + \frac{3(m-n)^2nff}{3.8m^3a} - \frac{9(m-n)^3n^2j^2}{4.64m^5aa} + \frac{27(m-n)^4n^3j^4}{5.512m^7a^3} etc.$$

Consequenter habebitur $x = \frac{(m-n)f}{2m}$

$$- \frac{3(m-n)^2nff}{3.8m^3a} + \frac{9(m-n)^3n^2j^2}{4.64m^5aa} - \frac{27(m-n)^4n^3j^4}{5.512m^7a^3} etc.$$

Quia haec series eam habet proprietatem, ut ex logarithmis notum est, ut summa ejus minor sit termino primo, manifestum est quo minor sit fractio $\frac{nf}{ma}$, eo magis eam conuergere, et proinde eo esse punctum reuersionis altius situm.

§. 28. Sit pro ascensu curua AN, in qua, *Fig. 4.* dicta AQ = u sit QN = t, erit $8mmatdt - 3(m-n)nbudt$

$= 8(m-n)mbdu$, seu $64m^3aac \frac{3nt}{8ma} - 64m^3aa + 24mmnat = 9(m-n)nbu$. Neque vero haec curua habet punctum flexus contrarii, sed quoque in infinitum vniformiter protenditur, non vero ut prior, quemadmodum parabola, sed fere ut hyperbola. Multo enim magis ab axe diuergit quam illa. Si ex hac tautochrone ascensui inserviens construenda sit, oportet describere curuam ad eundem axem, cujus arcus sint applicatis QN aequales. Hujus tautochronae punctum reuersionis habebitur, si capiatur $u = \frac{(m-n)b}{2m} + \frac{3(m-n)^2nff}{3.8m^3a} + \frac{9(m-n)^3n^2b^2}{4.64m^5aa} etc$, semper ergo est altius situm, quam in curua pro descensu, et sunt prorsus casus, vbi in infinitum excurrit, aut nullibi existit, id quod euenit si $3(m-n)nf$ est aequale vel majus quam $8mma$.

Fig. 1.

§. 29. Progredior nunc ad ipsius curvae constructionem et quaero aequationem inter coordinatas orthogonales. Sit AME tautochrone descensui inseruiens. Sit AP=x PM=y et arcus AM=s. Hujus curvae natura exprimitur ex §. 24. hac aequatione $8mmasds + 3(m-n)nfxdx = 8(m-n)maf dx$. Ponatur ds constans, et differentietur aequatio, habebitur $8mmasds^2 + 3(m-n)nf dx ds = 8(m-n)maf dx$. Fiat ds=pdx, erit $dy = dx\sqrt{pp-1}$; verum $dds = 0 = pddx + dx dp$, quare est $ddx = -dx dp : p$. Quibus in aequatione substitutis ea abibit in $8m^2 app dx + 3(m-n) nfp dx + 8(m-n) maf dp : p = 0$. Ex qua obtinetur $dx = \frac{-8(m-n)maf dp}{8m^2 ap^2 + 3(m-n)nfp}$. Quocirca ad curvam construendam, accepta variabili tertia p, sumatur $x = 8(m-n) maf \int \frac{-dp}{8m^2 ap^2 + 3(m-n)nfp}$. Deinde quia $dy = dx\sqrt{pp-1}$ capiatur $y = 8(m-n) maf \int \frac{-dp\sqrt{pp-1}}{8m^2 ap^2 + 3(m-n)nfp}$. Atque hoc modo curva quaesita erit constructa.

§. 30. Simili modo ut curva pro ascensu construatur, hoc tantum opus est, ut in illa constructione ponatur -a loco +a. Hoc enim modo, ut ex aequationibus generalibus celeritatem corporum in medio resistente motorum exprimentibus videre licet, aequatio descensui inseruiens transmutatur in eam, quae ad ascensum pertinet. Porro radius osculi curvae in puncto M erit $= \frac{(m-n)fdy}{3ns}$. Vnde patet radium osculi in puncto infimo A esse $= \frac{m-nf}{m}$,
Cui

Cui in eo puncto longitudo penduli aequalis accipi debet. Denique ex constructione colligere licet, qualem figuram nostra curua habeat. Sit AB tautochrona descensus, quae continua erit cum AC curua ascensus. Ultra B et C continuatur in D et E, ita ut arcus BD, ED similes et aequales sint arcui BAC. Atque hoc modo in infinitum producitur.

Fig. 5.

§. 31. Perpendamus nunc qualis corporis seu globi, ut positum est, super curua tautochrona inuenta sit motus. Consideremus oscillationem unam, qua globus in puncto infimo habeat velocitatem ex altitudine b acquisitam. Dicatur, ut ante, altitudo genitrix velocitatis globi in puncto quo-

cunque curuae descensus v . Erit ex §. 13. $v = c^{\frac{ns}{ma}}(b-t)$

vbi est $t = \frac{m-n}{m} \int c^{\frac{-ns}{ma}} dx$. Hic vero a altitudinem cylindri oscillantis designat, ut ergo globus introducatur ponatur $\frac{2}{3}a$ loco a , prout §. 17. factum est et erit

$v = c^{\frac{3ns}{4ma}}(b-t)$, et $t = \frac{m-n}{m} \int c^{\frac{-3ns}{4ma}} dx$. Cum his aequationibus ea quae naturam curuae exprimit est con-

jungenda, quae est haec $64m^3aac^{\frac{3ns}{8ma}} - 64n^3aa - 24m^2nas = 9(m-n)n^2fx$; seu hujus differentialis, ut

habeatur dx , $24m^2nac^{\frac{3ns}{8ma}}ds - 24m^2nads = 9(m-n)n^2fdx$, siue $8m^2ac^{\frac{3ns}{8ma}}ds - 8m^2ads = 3(m-n)nf dx$.

§. 32. Est igitur ex posteriore aequatione

$\frac{m-n}{m} dx = \frac{8ma}{3nf} c^{\frac{3ns}{8ma}} ds - \frac{8ma}{3nf} ds$. Vnde erit $\frac{m-n}{m} c^{\frac{-3ns}{4ma}} dx = \frac{8ma}{3nf}$

$\frac{8ma}{3nf} \frac{-3ns}{8ma} ds - \frac{8ma}{3nf} \frac{-3ns}{4ma} ds$. Quae integrata dat $t=C-$

$\frac{64m^2aa}{9n^2f} c^{\frac{-3ns}{8ma}} + \frac{32m^2aa}{9n^2f} c^{\frac{-3ns}{4ma}}$. Constans C adjecta ita debet determinari, utposito $s=0$, fiat et $t=0$, ut

§. 13. requirebatur, est igitur $C = \frac{32m^2aa}{9n^2f}$. Quamobrem cum ea expressio euadat quadratum erit $t=$

$\frac{32m^2aa}{9n^2f} (1 - c^{\frac{-3ns}{8ma}})^2 = \frac{32m^2aa}{9n^2f} c^{\frac{3ns}{8ma}} (c^{\frac{3ns}{8ma}} - 1)^2$. Sed ex aequa-

tione exponentiali pro curua habetur $c^{\frac{3ns}{8ma}} - 1 =$

$\frac{24m^2nas + 9(m-n)nf^2s}{64m^2aa}$. Itaque erit quoque $t =$

$\frac{(8m^2as + 3(m-n)nf^2s)^2}{128m^4aaf c^{\frac{3ns}{4ma}}}$. Ex his reperitur $v = c^{\frac{3ns}{4ma}} (b -$

$\frac{32m^2aa}{9n^2f} c^{\frac{3ns}{8ma}} - 1)^2 = bc^{\frac{3ns}{4ma}} - \frac{32m^2aa}{9n^2f} (c^{\frac{3ns}{8ma}} - 1)^2$. Vel et-

iam hoc modo $v = bc^{\frac{3ns}{4ma}} - \frac{(8m^2as + 3(m-n)nf^2s)^2}{128m^4aaf}$.

§. 33. Expressio haec celeritatis dabit locum in curua descensus, quo velocitatem globus habet maximam; etenim ea non incidit in punctum infimum. Id vero punctum erit ibi, vbi $dv=0$. Quare cum inuenta sit $v = bc^{\frac{3ns}{4ma}} - \frac{32m^2aa}{9n^2f} (c^{\frac{3ns}{8ma}} - 1)^2$, erit

$dv = \frac{3nb}{4ma} c^{\frac{3ns}{4ma}} ds - \frac{8ma}{3nf} (c^{\frac{3ns}{8ma}} - 1) c^{\frac{3ns}{8ma}} ds$. Ergo erit $dv=0$;

fi $\frac{3nb}{4ma} c^{\frac{3ns}{8ma}} - \frac{8ma}{3nf}$, seu si $c^{\frac{3ns}{8ma}} = \frac{32m^2a^2}{32m^2a^2 - 9n^2bf}$

Vnde deducitur $s = \frac{8ma}{3n} \log \frac{32m^2a^2}{32m^2a^2 - 9n^2bf}$ seu $s = \frac{8ma}{3n}$

$(1 - \frac{9n^2bf}{32m^2a^2})$. Ex quo colligitur arcum s eo esse majorem quo factum bf majus fuerit, quam a^2 , ceteris paribus. Porro ex velocitate finali, quae est $v = \sqrt{b}$, inuenitur totus arcus descensus faciendo $v = 0$.

Quo in casu erit $c^{\frac{3ns}{8ma}} \sqrt{b} = \frac{4ma}{3n} (c^{\frac{3ns}{8ma}} - 1) \sqrt{\frac{2}{f}}$ seu $3nc^{\frac{3ns}{8ma}}$

$\sqrt{\frac{1}{2}bf} = 4mac^{\frac{3ns}{8ma}} - 4ma$, vnde $c^{\frac{3ns}{8ma}} = \frac{4ma}{4ma - 3n\sqrt{\frac{1}{2}bf}}$

Totus igitur arcus descensus erit $= \frac{8ma}{3n} \log \frac{4ma}{4ma - 3n\sqrt{\frac{1}{2}bf}}$

§. 34. Deinceps, si corpus celeritate descensu acquisita in altera parte ejusdem curuae ascendat, (inseruit enim ea pars ascensui) inuenitur totus arcus descensus $= \frac{8ma}{3n} \log \frac{4ma}{4ma + 3n\sqrt{\frac{1}{2}bf}}$. Si hi logarithmi in

series resoluantur habebitur arcus descensus $= 2\sqrt{\frac{1}{2}bf}$

$+ \frac{3n(\frac{1}{2}bf)}{2 \cdot 2ma} + \frac{9nn(\frac{1}{2}bf)^2}{3 \cdot 8m^2a^2} + \frac{27n^3(\frac{1}{2}bf)^3}{4 \cdot 32m^3a^3} etc.$ Simili modo

erit arcus ascensus $= 2\sqrt{\frac{1}{2}bf} - \frac{3n(\frac{1}{2}bf)}{2 \cdot 2ma} + \frac{9n^2(\frac{1}{2}bf)^2}{3 \cdot 8m^2a^2}$

$- \frac{27n^3(\frac{1}{2}bf)^3}{4 \cdot 32m^3a^3} etc.$ Ex quibus perspicuum est arcum

ascensus esse minorem arcu descensus. Si $\frac{nbf}{ma}$ valde fuerit

fuerit paruum, harum ferierum duos terminos initiales tantum assumere sufficit, et tum differentia inter arcum descensus et ascensus erit $\frac{3nbf}{4ma}$. Cum eorum summa sit $2\sqrt{2bf}$. Sunt ergo differentiae q , p , in ratione duplicata summarum.

§. 35. Haec est igitur tautochrone in medio, quod mobili resistit in ratione duplicata velocitatum. Pro aliis vero medii resistentis hypothesebus, quibus resistentia alii cuidam celeritatis dignitati aut functioni proportionalis ponitur, hac methodo tautochronae inueniri non possunt; non quidem vitio methodi, quasi ea vniuersalis non esset, sed defectu analysis; quod in aliis hypothesebus velocitas non potest exprimi. Persuasus autem sum hanc solam resistentiae hypothesin secundum quadrata celeritatum in rerum natura locum habere. Quanquam enim ex experimentis constat, fluida aliam praeter hanc exercere resistentiam a tenacitate eorum ortam, quae velocitati proportionalis esse nonnullis visa est, tamen *Newtonus in Princip. Phil. Edit. nouissima pag. 274* potius existimat eam prorsus non a velocitate pendere, verum eam esse vniiformem seu in ratione momentorum temporum. Qua fit vt vires viuae amissae sint, vt spatia percursa, id quod aliis rationibus ex natura huius resistentiae deductis praetermissis ex eo intelligi potest, quod mobile, si resistentiae velocitatibus essent proportionales nunquam ad quietem perueniret, quod tamen tandem accidere experimenta confirmant; si vero insuper resistentia adfit, secundum quam mobile amittit de

vi viva in ratione spatiorum descriptorum, tautochronam exhibere in promptu est; eaque facile ex inuentâ hac formari potest. Ponatur enim tantummodo in aequatione nostra tautochronae inuenta loco x haec quantitas $x + gr$, vbi litera g , ex quantitate hujus resistentiae a tenacitate vel frictione orta determinari debet. Quo factô habebitur tautochrona quaesita.

PROBLEMA ASTRONOMICUM
 INUENIENDI ALTITUDINEM POLI VNA
 CUM DECLINATIONE STELLAE EJUSDEM-
 QUE CULMINATIONE EX TRIBUS ALTI-
 TUDINIBUS STELLAE ET DUOBUS TEM-
 PORUM INTERUALLIS BREUI CAL-
 CULO SOLUTUM.

Auctore

Daniele Bernoulli Joh. Fil.

Lemma. Sint tres arcus circulares contigui IP, PQ, QR, dico fore $\frac{IZ}{IV} = \frac{LN \times QX - LM \times RY}{LN \times PX - LM \times PY}$ vbi IZ significat tangentem arcus IP; LN differentiam cosinum pro arcubus IP et IR; LM differentiam cosinum pro arcubus IP et IQ, QX et RY sunt sinus versi arcuum PQ et PR; et PX, PY sunt eorundem arcuum sinus: denique IV est si-

Mens. Nov.
 1729.
 Tab. VIII.
 Fig. 1.

Tom. IV.

M

nus