1735

De innumerabilibus curvis tautochronis in vacuo

Leonhard Euler

Demonstratio. Nam demissis perpendicularibus HI, HT ad rectas PQ et SQ, erunt HI=PX, et HT=SY, jungantur BH, TH et invenietur $BH^2=BR^2+RH^2=BR^2+RX^2+PI^2=RW^2+PW^2+PI^2=PR^2+PI^2=RI^2$, ergo BH=RI, simili argumento erit TH =RT, atqui BH=TH, ergo RI=RT, adeoque per præc. casum erit RI semi axis major, et BR semi axis minor. Q. E. D.

DE
INNUMERABILIBUS CURUIS
TAUTOCHRONIS IN VACUO.

Auct. Leonh. Eulero.

§. 1.

Quoties ego insignem tautochronismi proprietatem, quam *Hugenius* primus in cycloide inesse deprehendit, contemplatus sum, semper dubitabam, an praeter cycloidem aliae curuae eandem forte habeant proprietatem. Hocque mihi eo probabilius videbatur, quod ipsum *Hugenium* non ex tautochronismi contemplatione ad cycloidem peruenisse intelligebam: sed potius cycloidis proprietates scrutantem hanc ipsum inter alias detexisse. *Newtonus* quidem atque *Hermannus*, qui deinceps eandem rem tractarunt, Mens. Sept. 1729. Tab. V. & VI.

analytice cycloidem elicuerunt, sed vsi sunt principio non satis late patente hoc; accelerationes viis percurrendis esse oportere proportionales. Aliis enim modis accelerationes possunt determinari, ut tautochronismus nihilominus conseruetur. Quamobrem mihi jure suspicari visus sum, praeter cycloidem in alias fortasse curvas eandem tautochronismi proprietatem competere.

§. 2. Ad hanc dubitationem tollendam genuina opus esse methodo censebam, qua sine vllo principio aliunde assumto ex sola tautochronismi consideratione curuae hac proprietate praeditae erui possent. Diu igitur omne studium operamque in hanc inuestigationem contuli, donec tandem voti compos factus, quicquid desiderabam, sum consecutus. Animaduerti autem, cum de curua tautochrona inuenienda quaestio proponitur, duas omnino quaestiones bene a se inuicem distinguendas in ea esse inuolutas. Quarum altera hujusmodi curuam requirit, in qua graue descendens aequalibus temporibus ad punctum infimum perueniat, ubicunque sumatur initium descensus. Altera vero in ejusmodi curuis inquirendis est occupata, super quibus integrae oscillationes ex descensu et ascensu constantes omnes sint isochronae. Illi quidem quaestioni solam cycloidem satisfacere deprehendi: huic vero praeter cycloidem innumerabiles aliae conuenire mihi inuentae sunt.

Fig. 1. §. 3. Posteriorem hanc quaestionem primum hoc modo proposui, vt data curua quacunque AMC in-

inueniatur curua ei in A jungenda AND ejusmodi, vt graue ſuper compoſita ex iis curuae CMAND oſcillans omnes oſcillationes abſoluat aequalibus temporibus. Poſtquam autem hujus ſolutionem ſum adeptus, eos inueſtigaui caſus, quibus hae duae curuae vnam conſtituant lineam continuam, atque eadem contineantur aequatione. Hujusmodi mihi curuae admodum notatu dignae viſae ſunt, eo quod eundem quem cyclois, praeſtent effectum et aeque ac illa ad horologia accommodari poſſint. Praeterea non ſine admiratione cognoui in his curuis tautochronis curuas etiam algebraicas contineri, ad quas Analyſtae in problematis ſoluendis tanto ſemper ſtudio peruenire nituntur. Haec igitur omnia eo, quo ipſe ſum aſſecutus modo, hic proponere conſtitui tam propter ipſius methodi nouitatem, quam eorum, quae ex ea prodierunt, dignitatem.

§. 4. Sit igitur curua data AMC, quaeſita vero AND, quae communem habeant axem verticalem AB. Incipiat graue deſcenſum ex puncto quocunque C, aſcendet id rurſus in altera curua ad eandem altitudinem D, ita vt recta CD ſit horizontalis; animum enim ab omni reſiſtentia abſtrahimus. Hac ergo oſcillatione percurrit corpus arcum CAD, ſecundum legem Galileanam et in quouis loco M habebit celeritatem, quam lapſu ex altitudine BP acquirit, ducta nempe per M horizontali MPN. Tautochronismi autem conditio requirit, vt tempus hujus oſcillationis ſit conſtans, retineatque eandem quantitatem, ubicunque accipiatur punctum C. Fig. 1.

 Quam-

Quamobrem formula hoc tempus exprimens ita esse debebit comparata, vt in ea neque linea AB insit neque quaequam alia quantitas a loco puncti C pendens.

§. 5. Maxima celeritas corporis, dum hanc oscillationem absoluit, est in puncto infimo A, atque respondet altitudini AD, quippe ex qua est genita. Haecque celeritas ipsa debet exponi radice quadrata ex hac altitudine AD, et simili modo in loco quocunque *M* celeritas est vt radix quadrata ex altitudine BP. Quamobrem sumtis elementis Mm et Nn aeque altis, erit corporis celeritas dum vtrumque describit eadem atque vt $\sqrt{BP}$; Et tempusculorum, quibus haec elementa percurruntur, summa est $\frac{Mm+Nn}{\sqrt{BP}}$. Hujus ergo integrale dabit tempus, quo arcus *MAN* absoluitur, et posito in eo AP$=$AB, prodibit tempus integrae oscillationis.

§. 6. Ponantur nunc $AB=b$, $AP=x$; arcus $AM=s$ et $AN=t$. Erit $Pp=dx$; $Mm=ds$; $Nn=dt$ et $BP=b-x$. Celeritas ergo, quam habet corpus elementa Mm et Nn percurrens, erit $=\sqrt{(b-x)}$. Et propterea tempus, quo haec elementa absoluuntur, est $\frac{ds+dt}{\sqrt{(b-x)}}$, seu posito $ds+dt=dv$, erit id $\frac{dv}{\sqrt{(b-x)}}$. Cujus integrale dabit tempus, quo arcus MAN absoluitur, siquidem tanta constans adjicitur, ut facto $x=o$ ipsum tempus euanescat. In illo integrali deinde, si ponatur $x=b$, habebitur tempus totius oscillationis. Quamobrem in eo neque litera b neque alia ab ea pendens inesse debet. Inveniri ergo debet litera v in x vt integrale hanc obtineat proprietatem.

§. 7.

§. 7. Fiat $dv = pdx : e$; per e diuido, vt homogeneitas conseruari possit, cum cognita fuerit functio p. Est itaque differentiale summae temporum $= pdx : e\sqrt{(b-x)}$ siue $\frac{1}{e}. pdx : \sqrt{(b-x)}$. Jam, ut ex praecedentibus elucet, oportet $pdx : \sqrt{(b-x)}$ ita esse constitutum, ut, si integretur talisque constans addatur, quae faciat integrale $= 0$, si $x = 0$ factoque $x = b$, tum b penitus ex expressione excedat. Hisque conditionibus ut satis fiat, oportet determinare p. Consistat integrale hujus $pdx : \sqrt{(b-x)}$ debita constante auctum quotcunque terminis simplicibus; nam et irrationalia in series hujusmodi terminorum resoluere licet. Necesse est igitur, vt vnusquisque horum terminorum quantitate x seu dignitate ejus exponentis affirmativi sit affectus; ea propter ut tota expressio euanescat, si fiat $x = 0$.

§. 8. Singuli ergo termini talem habebunt formam gx^m, ubi g etiam in b dari ponitur. Cum Cum vero in hisce omnibus facto $x = b$, b debeat euanescere seu ex computo egredi: fiat $x = b$, termini hanc habebunt formam gb^m, ex qua vt b eliminetur, oportet sit $g = nb^{-m}$ vbi n ipsa b non sit affectum, sed denotet numerum quem vis in quantitatem datam ductum; hanc vero quantitatem in e complecti licet, vt ergo n solum numerum significare possit. Hac ergo ratione singuli termini erunt $nb^{-m}x^m$. Ubi cum dimensiones ipsius b destruant dimensiones ipsius x, perspicuum est integrale nullam dimensionem habere debere. Deinde id quoque manifestum est in integrali praeter b et x, et numeros alias quantitates contineri non oportere; vnde ſequitur idem et in differentiali locum habere. Quapropter p cum ab b affici nequeat, in meris x dari debebit, eritque p potentia ipſius x quae ſit x^n.

§. 9. Ex hac conditione differentiale $pdx : V(b-x)$ transmutatum eſt in $x^n dx : V(b-x)$. Accedat altera atque prior conditio, qua integrale nullam habere debet dimenſionem, ut inde n determinetur. Requiritur autem ad id, vt integrale nullius ſit dimenſionis, vt et in differentiali dimenſiones ſeſe deſtruant elemento dx vnam dimenſionem implere poſito; manifeſtum enim eſt, ſemper differentiale tot habere dimenſiones, quot integrale. Numerus vero dimenſionum in noſtro differentiali $x^n dx : V(b-x)$ eſt $n+1-\frac{1}{2}$ ſeu $n+\frac{1}{2}$, qui ergo debet aequari nihilo; vnde habetur $n=-\frac{1}{2}$. Ex quo emergit $p=x^{-\frac{1}{2}}$ ſeu $1 : Vx$, hinc porro erit $dv= dx : eVx$. Quia e eum in finem tantummodo erat aſſumtum vt homogeneitas conſeruetur, fiat $e=1 : Va$; eritque $dv=dxV(a : x)$.

§. 10. Erat vero $dv=ds+dt$, quare $ds+dt =dxV(a : x)$, cujus integrale eſt $s+t=2Vax$. Erit igitur ſumma arcuum AM+AN ſemper in ratione ſubduplicata ſagittae AP. Conſtruatur ergo alia curva ALE, talis vt productis MN, mn in L et l ſit arcus AL=AM+AN. Eritque $Ll=Mm+Nn=ds +dt=dv$. Vnde AL$=v=2Vax$, adeoque $vv=4ax$. Ex quâ perſpicuum eſt curuam ALE eſſe cycloidem, cu-

cujus circuli generatoris diameter eſt a. Deſcendat corpus in hac cycloide ex puncto E aeque alto ac C vel D; erit velocitas ejus in L vt $\sqrt{(b-x)}$. Ergo tempuſculum per Ll eſt $dv : \sqrt{(b-x)}$. Id quod igitur aequale eſt ſummae tempuſculorum per elementa Mm, Nn. Quare totum tempus deſcenſus per ELA, aequale erit ſummae temporum per arcus CA et DA. Oſcillatio ergo per CAD contemporanea eſt dimidiae oſcillationi penduli longitudinis $2a$, ſeu integrae oſcillationi penduli long. $\frac{1}{2}a$.

§. 11. Ex his jam facile apparet, quomodo data altera curua AC inueniri debeat altera AD. Sit quaeſitae AD applicata $PN = z$; erit $Nn = dt = \sqrt{dx^2 + dz^2}$. Erit igitur $ds + \sqrt{(dx^2 + dz^2)} = dx\sqrt{(a : x)}$. Vnde $\sqrt{(dx^2 + dz^2)} = dx\sqrt{(a : x)} - ds$. Denique $dz = \sqrt{(adx^2 : x + ds^2 - dx^2 - 2dsdx\sqrt{(a : x)})}$. Cum curua AMC ſit data, dabitur ds in x et dx; ponatur igitur $ds = pdx$. Erit $dz = dx\sqrt{(a : x + p^2 - 1 - 2p\sqrt{(a : x)})}$. Quae aequatio, cum p in x dari ponatur, exprimet naturam curuae AND quaeſitae. Hinc intelligitur, cum a non a curua pendeat, et ideo pro lubitu accipi poſſit, infinitas inueniri poſſe curuas loco quaeſitae AND, quae cum AMC junctae tautochronas praebeant. Notandum tamen accidere caſus, quibus, ſi a quantitate quadam minor accipiatur, curua quaeſita fiat immaginaria.

§. 12. Sit curua data AC linea recta, cum verticali AB angulum quemcunque BAC conſtituens, erit $ds = ndx$, n denotante numerum ei angulo conue- Fig. 2.

uenientem, vnde $p = n$, quare $dz = dx\sqrt{(a : x + nn - 1 - 2n\sqrt{(a : x)})}$. Quae aequatio integrationem admittit in casu $n = 1$, quo recta AC fit verticalis inciditque in AB. Hic fit $dz = dx\sqrt{(a : x - 2\sqrt{(a : x)})}$, fiat $2\sqrt{ax} = q$, erit $x = qq : 4a$, et $dx = qdq : 2a$; ergo $dz = \frac{qdq}{2a}\sqrt{(\frac{4aa}{qq} - \frac{4a}{q})} = dq\sqrt{(\frac{a-q}{a})}$. Est igitur $z = C - \frac{2(a-q)\sqrt{(a-q)}}{3\sqrt{a}} = C - \frac{2(a-2\sqrt{ax})\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}{3\sqrt{a}}$. Vt z fiat $= 0$ si $x = 0$, oportet sit $C = \frac{2a}{3}$, adeoque est $z = \frac{2a\sqrt{a} - 2(a-2\sqrt{ax})\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}{3\sqrt{a}}$. Quae est aequatio ad curuam quarti ordinis; Hic x nunquam $\frac{1}{4}a$ superare potest.

§. 13. Si curua altera AMC fuerit semicyclois, cujus diameter circuli generatoris $AB = b$. Erit dictis AP, x, AM, s, tum $ss = 4bx$, ergo $s = 2\sqrt{bx}$. Sit altera curua quaesita ANE in qua $AN = t$, oportet sit $s + t = 2\sqrt{ax}$, unde habebitur $t = 2\sqrt{ax} - 2\sqrt{bx}$. Dicatur $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c}$; $t = 2\sqrt{cx}$. Est itaque altera curua ANE etiam cyclois, idque quaecunque: ejus enim diameter c pro lubitu potest accipi. Oscillationes vero cotemporaneae sunt dimidiae oscillationi penduli, cujus longitudo est $2a$, vel integrae si longitudo fuerit $\frac{1}{2}a$. Est vero $\sqrt{a} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$, unde $a = b + 2\sqrt{bc} + c$. Longitudo igitur perduli isochroni est $\frac{1}{2}b + \sqrt{bc} + \frac{1}{2}c$. Notandum vero in cycloide majori AMC initium descensus non supra punctum E, vbi ED producta secat, esse accipiendum; alioquin enim corpus ascendens in curua AE ultra E ascenderet, et oscillatio nusquam terminaretur.

§. 14.

§. 14. Quaeramus casus, quibus ambae curuae sint inter se aequales. Erit igitur $s=t$. Quare cum sit $s+t=2\sqrt{ax}$; erit $2s=2\sqrt{ax}$; seu $s=\sqrt{ax}$. Ex quo cognoscitur, vtramque curuam esse cycloidem, neque alias hoc sensu satisfacere curuas praeter cycloidem: Supra enim demonstratum est nostra methodo problema propositum generalissime solvi. Quemadmodum hic positum erat $s=t$, sic quaecunque aequatio inter s et t potest accipi, et deinde duae curuae dari, vt arcus ascensus et descensus eam habeant inter se relationem. Vt, si quaerantur duae curuae problemati satisfacientes CA, DA, ut sit semper AM : AN$=m:n$, erit $mt=ns$, et $t=ns:m$. Ergo $s+t=(ms+ns):m=2\sqrt{ax}$, unde efficitur $s=\frac{2m}{m+n}\sqrt{ax}$. Perspicuum ergo est, curuam AC esse semicycloidem diametri $\frac{m^2a}{(m+n)^2}$, et alteram ADN quoque semicycloidem diametri $\frac{n^2a}{(m+n)^2}$. Fig. 1.

§. 15. Cum esse debeat $s+t=2\sqrt{ax}$, vt ambae curuae praebeant tautochronam oscillationes isochronas penduli longitudinis $\frac{1}{2}a$ habentem; Sit $s=\sqrt{ax}+v$, et $t=\sqrt{ax}-v$. Hoc igitur modo duae curuae inuenientur satisfacientes. Erit itaque $ds=\frac{adx}{2\sqrt{ax}}+dv$, et $dt=\frac{adx}{2\sqrt{ax}}-dv$. Ponatur $dv=udx$: habebitur $ds=\frac{adx}{2\sqrt{ax}}+udx$, et $dt=\frac{adx}{2\sqrt{ax}}-udx$. Quare si y illius et z hujus curuae denotent applicatas, erit $dy=dx\sqrt{(\frac{a}{4x}+\frac{au}{\sqrt{ax}}+uu-1)}$. Atque $dz=dx\sqrt{(\frac{a}{4x}-\frac{au}{\sqrt{ax}}+uu-1)}$. Hic si loco u substituatur quaecunque fun-

 ctio

ctio ipsius x; habentur duae aequationes pro curuis problemati satisfacientibus. Obseruandum hic, si ponatur $a = 4b$ fore $dz = dx\sqrt{(\frac{b}{x} - \frac{2bu}{\sqrt{bx}} + uu - 1)}$. Quae aequatio conuenit cum aequatione §. 11. $dz = dx\sqrt{}$ $(\frac{a}{x} + pp - 1 - \frac{2ap}{\sqrt{ax}})$ si sit $b = a$, et $u = p$. Ex quo intelligitur curuam $dz = dx\sqrt{(\frac{a}{4x} - \frac{au}{\sqrt{ax}} + uu - 1)}$, etiam cum hac $ds = udx$ seu $dy = dx\sqrt{(uu - 1)}$, conjunctam constituere tautochronam oscillationes absoluentem eodem tempore, quo pendulum longitudinis $\frac{1}{2}b$ seu $\frac{1}{8}a$.

Fig. 4. & 5. §. 16. Constituatur super axe AP curua quaecunque BE, in qua posita $AP = x$ sit $PE = u$. Tum describatur hyperbola cubicalis VKLT, cujus applicata PK vel PL si dicatur r, sit $4xr^2 = a$, recta quadam pro unitate accepta, erit PK vel $PL = \sqrt{(a : 4x)}$. Deinde constituantur duae nouae curuae RF, SG, in quibus sit $PF = \sqrt{(LE^2 - 1)}$; et $PG = \sqrt{(KE^2 - 1)}$. Erit $PF = \sqrt{(\frac{a}{4x} - \frac{au}{\sqrt{ax}} + uu - 1)}$ et $PG = \sqrt{(\frac{a}{4x} + \frac{au}{\sqrt{ax}} + uu - 1)}$. Quibus factis accipiatur PM in 1 ducta aequalis areae APFR: et PN in 1 ducta aequalis areae APGS. Erunt, cum sit $APFR = \int dx\sqrt{(\frac{a}{4x} - \frac{au}{\sqrt{ax}} + uu - 1)}$ et $APGS = \int dx\sqrt{(\frac{a}{4x} + \frac{au}{\sqrt{ax}} + u^2 - 1)}$, $PM = z$ et $PN = y$, atque eapropter curuae MA et NA junctae in A exhibebunt curuam tautochronam.

§. 17. Ex hisce perspicuum est, quomodo data curua quacunque inueniri oporteat alteram tautochronismo producendo aptam. Nunc eos inuestigare statui casus, quibus ambae eae curuae ita, vt decet, junctae, eandem constituunt curuam contitinuam; vt et aliae curuae eaeque innumerae cycloidis ſimiles habeantur, eundem effectum in horologiis praeſtantes. Sit MAN hujusmodi curua circa axem verticalem AP poſita. Dicatur, vt ante, AP, x, arcus AM, s et alter AN, t, oportet eſſe $s+t=2\sqrt{ax}$. Conſtituatur alia curua GAH talis, ut ejus applicatae PG, PH ſint arcubus AM, AN reſpectiue aequales. Erit ergo PG$=s$, PH$=t$, eaque curuae GAH erit proprietas, ut ſit $s+t=2\sqrt{ax}$. Perſpicuum eſt, ſi curua GAH fuerit data, alteram MAN ex ea poſſe conſtrui, atque ſi illa fuerit curua continua, et hanc quaeſitam talem fore. Huc igitur quaeſtio eſt reducta, vt inueniatur curua GAH, quae ſit continua, eamque habeat proprietatem, vt ſit GP+GH$=2\sqrt{a}.$ AP. Fig. 6.

§. 18. Reſpondent ergo in curua GAH ſingulis abſciſſis AP duae applicatae GP, PN, quarum altera eſt negatiua, ſi altera affirmatiua fuerit. Talis proinde aequatio inter abſciſſas et applicatas eſſe debet, vt litera applicatas denotans pro ſingulis abſciſſis duos habeat valores ad conditionem quaeſtionis accommodatos. Vt haec facilius efficiam, aſſumo nouam indeterminatam v, ex qua vna cum conſtantibus et abſciſſae et applicatae determinari debent; ita autem, ut, poſita v affirmatiua, inueniatur punctum G; poſita vero v negatiua, tunc punctum H inueniatur. Conſideremus igitur x, tanquam functionem ipſius v, atque s. Functio autem s ſignificans dabit t ſed negatiue, quia PN ad alteram axis AP partem cadit, ſi v abeat in $-v$.

§. 19. Cum abfciffa AP eadem maneat pro utroque puncto G et H, oportet ut ea x ita in v determinetur, vt eadem maneat transmutato v in $-v$. Siue x debet effe functio par ipfius v: fit talis functio P, erit $x=P$. Ponatur applicata PG, $s=Q+R$, denotantibus Q functionem imparem, R vero parem ipfius v. Ponatur in hac formula $Q+R$ loco v, $-v$, abibit ea in $-Q+R$; quemadmodum conftat ex iis, quae de functionibus paribus et imparibus in differtatione de trajectoriis reciprocis tradidi. Pofito vero $-v$ loco v, habebitur punctum H, quare $-Q+R$ exprimet applicatam PH. Quae autem, cum in alteram partem cadere debeat, erit valor $-Q+R$ negatiuus. Abfoluta ergo applicatae PH feu t magnitudo erit $Q-R$, unde habetur $t=Q-R$. At vero eft $s=Q+R$, et $x=P$.

§. 20. Ex conditione problematis haec habetur proprietas, vt fit $s+t=2\sqrt{ax}$, vt in §. 17. oftenfum eft. Quare cum fit $s=Q+R$, $t=Q-R$, et $x=P$, erit $2Q=2\sqrt{aP}$ feu $QQ=aP$, hincque $P=QQ:a$. Hic inquirendum eft, an hic valor ipfius P inuentus, et fuperior, fecundum quem P debet effe functio par ipfius x inter fe non repugnent? Si enim repugnarent, nihil inde ad propofitum elici poffet. Non autem ii inter fe repugnant: nam, quia Q eft functio impar, ejus quadratum erit functio par; porro diuifore a nihil ad haec faciente, perfpicuum eft hic P functioni pari aequale poni. Eft ergo $P=QQ:a$. Ex his curua GAH inuenitur. Accipiatur enim AP feu $x=QQ:a$, et PG feu $s=Q+R$,

vbi

vbi loco Q quaecunque functio impar, loco R vero quaecunque par substitui potest ipsius v. Quia $x = QQ : a$ erit $Q = \sqrt{ax}$, et idcirca $s = R + \sqrt{ax}$. Hic R potest accipi functio par ipsius Q seu $\sqrt{ax}$, siue duntaxat ipsius $\sqrt{x}$.

§. 21. Ex hisce facile elicitur curuarum nostro instituto inseruientium constructio. Circa axem verticalem AP constituatur parabola MAN, cujus parameter $= a$. Ducta ergo ordinata ad axem orthogonali MN, erit, si sit $AP = x$, $PM = \sqrt{ax}$. Infra hanc parabolam circa eundem axem describatur curuaqu aecunque QAS, cujus axis AQ simul est diameter. Ducantur verticales MR, NS, horizontalem per A transeuntem secantes in T et V. Erit $AT = \sqrt{ax}$, et $AV = -\sqrt{ax}$; TR autem et SV erunt aequales. Quae, cum sint ad eandem plagam sitae, erunt functio par lineae AI quae est $\sqrt{ax}$, quare IR exprimet functionem R. Tum noua construatur curua GAH, cujus applicata PG sit $= PM + TR$, erit altera PH ob legem continuitatis $= PN - SV$ seu $PN - TR$. Quare erit $PG = R + \sqrt{ax}$, et $PH = -R + \sqrt{ax}$. Vnde sequitur curuam GAH eandem esse, quae quaeritur.

§. 22. Hoc ergo modo inueniuntur curuae infinitae, non quidem tautochronae, sed tales ex quibus tautochronae possunt construi. Sit curua AG praecedenti modo constructa, inde si alia AM construatur, ut ejus arcus AM ubique sit aequalis respondenti applicatae PG, erit haec curua tautochrona (§. 17.). Ex data vero AG, requisita AM Fig. 8.

 sefequenti modo conftruetur. Ducatur recta in G tangens GI, occurrens axi producto in I. Centro G radio GP defcribatur arcus circuli PL, quem horizontalis ex I ducta fecet in L. Jungatur GL, et a P in axe capiatur longitudo arbitraria PE, fed ubique eadem. Tum ex E ducatur linea ER parallela ipfi LG, fecans applicatam PG in R. Per omnia hoc modo determinata puncta R tranfeat curua SR, quae plerumque affymtoton habebit horizontalem AO. Denique conftruatur curua AM talis, vt rectang. PM. PE aequale fit fpatio OAPRS. Erit haec AM curua tautochrona. Eft enim arcus AM $=$PG.

§. 23. Rem analytice perfequor. Cum x debeat effe functio par ipfius v, infuper autem fit $Q=\sqrt{ax}$, oportet fit $\sqrt{ax}$ functio impar ipfius v, pono $\sqrt{ax}=v$, erit $x=v^2:a$ functio par, vt requiritur. Habemus igitur ex §. 20. hanc aequationem $s=R+v$, vbi R denotat functionem parem ipfius v. Erit itaque $ds=dR+dv$, fit $dR=Vdv$, neceffe eft, vt V fit functio ipfius v impar. Quare erit $ds=dv(1+V)$, ideoque $ds^2=dv(1+2V+VV)=dx^2+dy^2$. Quoniam autem $x=v^2:a$, erit $dx=2vdv:a$, et $dx^2=4v^2dv^2:a^2$. Confequenter $dy^2=dv^2(1+2V+VV-4v^2:a^2)$ atque $dy=\frac{dv}{a}\sqrt{(a^2+2a^2V+a^2V^2-4v^2)}$. Hanc aequationem nullo modo rationalem efficere potui, fubftituendis loco V valoribus legitimis, vt nimirum V aequalis ponatur functioni impari ipfius v. Quamobrem nefcio, an alii cafus in-

inde erui queant, quae integrationem admittunt, praeter eum, quem hic expositurus sum.

§. 24. Ponatur aV, id quod fieri potest; aequale $2v$, vt termini a^2V^2 et $4v^2$ sese destruant; erit $dy = \frac{dv}{a}\sqrt{(aa + 4av)}$, quae aequatio integrationem admittit quia v unius tantum est dimensionis. Integralis ejus est haec aequatio $y = \frac{C + (a + 4v)\sqrt{(a + 4v)}}{6\sqrt{a}} = \frac{C + (a + 4\sqrt{ax})\sqrt{(a + 4\sqrt{ax})}}{6\sqrt{a}}$ ob $v = \sqrt{ax}$. Vt y euanescat, posito $x = 0$, oportet vt sit $C = -a\sqrt{a}$; erit igitur $y = \frac{-a\sqrt{a} + (a + 4\sqrt{ax})\sqrt{(a + 4\sqrt{ax})}}{6\sqrt{a}}$ seu $6y\sqrt{a} + a\sqrt{a} = (a + 4\sqrt{ax})\sqrt{(a + 4\sqrt{ax})}$. Hinc habebitur $a + 4\sqrt{ax} = (6y\sqrt{a} + a\sqrt{a})^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(36ayy + 12aay + a^3)}$. Quamobrem sumtis utrinque cubis erit $12aa\sqrt{ax} + 48aax + 64ax\sqrt{ax} = 36ayy + 12aay$ seu $12ax + (3a + 16x)\sqrt{ax} = 9yy + 3ay$. Quae penitus ad rationalitatem reducta dabit hanc aequationem ordinis quarti: $81y^4 + 54ay^3 - 216axyy - 256ax^3 + 9aayy - 72aaxy + 48aaxx - 9a^3x = 0$.

§. 25. Habemus ergo curuam algebraicam ordinis quartis, quae perinde atque cyclois ad oscillationes omnes aequitemporaneas faciendas est idonea. Eam igitur aliquanto accuratius hic describere operae pretium erit. Sit axis AE; habebit cur- Fig. 9.
ua nostra hanc formam BACD, ejusque, dictis AP, y, ea erit aequatio, quam §. praecedente inuenimus. Tempus autem, quo oscillatio quaecunque per MAN absoluitur, aequale erit tempori oscillationis penduli ordinarii, cujus longitudo est $\frac{1}{2}a$. Notandum est, hanc curuam ab altera parte axis AE, in

in C habere punctum reuerſionis; Punctum vero C reperitur ſumendo $AE = \frac{1}{16}a$, et applicatam $EC = \frac{1}{6}a$. Porro in C curua producta ita reuertitur, vt ſit arcus CD aequalis ſimilisque arcui CAB. Quapropter ſi ex C ducatur verticalis CF, erit ea diameter curuae orthogonalis. Oſcillationes vero in alterutra tantum parte BAC conſtitui debent.

§. 26. Cum igitur CF ſit diameter hujus curuae, quaeramus aequationem ad hanc diametrum relatam. Sit nimirum $CQ = t$, et $QM = z$, erit $AP = x = AE - CQ = \frac{1}{16}a - t$, et $PM = y = QM - CE = z - \frac{1}{6}a$, his valoribus loco x et y in aequatione inuenta §. 24. ſubſtitutis, ſequens reſultabit aequatio, $81z^4 + 216atzz + 256at^3 - 18aazz = 0$, ſiue, quae ad hujus curuae proprietates inueniendas magis eſt apta, haec $t = \frac{aa - (\sqrt[3]{36azz} - a)^2}{16a}$ ſeu $z = \pm(a \pm \sqrt{(aa - 16at)})^{\frac{2}{3}} : 6\sqrt{a}$. Unde perſpicuum eſt z quatuor valores habere manente t, idque hoc modo, ſi ambo ſigna + valeant habetur punctum M; Si prius ſignum − et alterum + valeant habebitur punctum K; Si prius + et poſterius − ſumantur, punctum N; Si denique vtrumque ſignum − locum habeat, obtinebitur punctum L.

§. 27. Ex hac aequatione perſpicitur curuam hanc eſſe quadrabilem. Ponatur $a \pm \sqrt{(aa - 16at)} = p$, erit $t = \frac{2ap - pp}{16a}$ et $z = \frac{p\sqrt{a}}{6\sqrt{a}}$. Ergo $dt = \frac{dp}{8} - \frac{pdp}{8a}$. Itaque $zdt = \frac{pdp\sqrt{p}}{48\sqrt{a}} - \frac{ppdp\sqrt{p}}{48a\sqrt{a}}$. Quod integratum dabit $\int zdt = \frac{pp\sqrt{p}}{120\sqrt{a}} - \frac{p^3\sqrt{p}}{168a\sqrt{a}}$. Quae quantitas exprimit ſpatium inter

ter abſciſſam, applicatam et curuam contentum. Conſtat deinde ex curuae inuentione eam eſſe rectificabilem. Quia $z = \frac{p\sqrt{p}}{6\sqrt{a}}$ erit $dz = \frac{dp\sqrt{p}}{4\sqrt{a}}$; vnde $dz^2 = \frac{pdp^2}{16a}$. Eſt vero $dt^2 = \frac{dp^2}{64} - \frac{pdp^2}{32a} + \frac{p^2dp^2}{64aa}$. Quare $dt^2 + dz^2 = \frac{dp^2}{64} + \frac{pdp^2}{32a} + \frac{p^2dp^2}{64aa}$, et hinc $\sqrt{(dt^2+dz^2)} = \frac{dp}{8} + \frac{pdp}{8a}$. Conſequenter $\int\sqrt{(dt^2+dz^2)} = \frac{2ap+pp}{16a}$. Quae expreſſio dat vel arcum CN vel CAM vel quoque eorum negatiuos CL vel CLK.

§. 28. Inuentis area et longitudine hujus curuae; reſiduum eſt id, quod maxime ad uſum ejus in horologiis pertinet, vt inueſtigemus radium oſculi, eoque inuento curuae hujus euolutam, quo pendulum oſcillationes in hac curua abſoluens conſtitui queat. Radius osculi vero erit, poſito dz conſtante $\frac{(dt^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dzddt}$, cujus valor ex ſuperioribus inuenietur Namque eſt $(dt^2+dz^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{(a+p)^3dp^3}{512a^3}$, atque $dz = \frac{dp\sqrt{p}}{4\sqrt{a}}$, hinc quia dz ponitur conſtans, erit $ddz = 0 = \frac{2pddp+dp^2}{8\sqrt{ap}}$, unde habetur $ddp = \frac{-dp^2}{2p}$. Denique quia $dt = \frac{adp-pdp}{8a}$, erit $ddt = \frac{addp-dp^2-pddp}{8a} = \frac{-adp^2-pdp^2}{16ap}$. His valoribus in formula $\frac{(dt^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dzddt}$ ſubſtitutis, orietur radius osculi $= \frac{-(a+p)^2\sqrt{ap}}{8aa}$, ſignum − indicat radium osculi et diametrum inter ſe diuergere.

§. 29. Cum radius osculi ſit cognitus, facile erit curuae noſtrae tautochronae euolutam inuenire. Fig. 10. Sit CNB tautochrona. Maneant CQ $= t = \frac{2ap - pp}{16a}$, QN $= z = \frac{p\sqrt{p}}{6\sqrt{a}}$. Sit radius osculi $= \frac{(a+p)^2\sqrt{ap}}{8aa}$, qui tanget in M euolutam quaeſitam CM. Demittatur ex M in axem applicata MP, ſintque CP $= x$, PM $= y$. Inuenientur hae coordinatae ex relatione cognita coordinatarum CQ et QN. Calculo vtpote facili hic omiſſo habebitur $x = \frac{2ap + 5pp}{16a}$ et $y = \frac{(3aa - 3pp + 4ap)\sqrt{ap}}{24aa}$, harum aequationum ope euoluta CM per infinita puncta jam deſcribi poterit. Si autem velimus p eliminare, vt aequatio inter x et y ſuperſit, p ex priore aequatione inuenitur in a et x, qui valor ſi deinde in altera ſubſtituatur, ſequens emergit aequatio: $576ayy - \frac{37632}{125}axx - \frac{32160}{625}a^2x + \frac{529}{3125}a^3 = (\frac{2304}{125}xx + \frac{8608}{625}ax + \frac{529}{3125}a^2)\sqrt{(a^2 + 80ax)}$. Quae aequatio ſi prorſus ad rationalitatem reducatur, erit ordinis quinti.

§. 30. Id denique ſilentio praetereundum non eſt, hanc curuam tautochronam eandem eſſe prorſus, quam lineae rectae verticali jungendam inuenimus (§. 12.). In eo enim ſolo aequationes differunt, quod ibi parameter a quadruplo ſit major quam hic. Quia igitur longitudo penduli iſochroni pro noſtrâ curua tautochrona eſt $\frac{1}{2}a$, erit ſi haec eadem curua cum verticali AE jungatur, longitudo penduli iſochroni $\frac{1}{8}a$. Tempora ergo oſcillationum in curua MAN duplo ſunt majora quam oscillacillationum per PAN. Quare ſi in vtroque lapſu graue ad N vsque perueniat aſcendendo, erit $tMA + tAN = 2tPA + 2tAN$. Conſequenter $tMA - tAN = 2tPA$. Differentia ergo temporum deſcenſuum per arcus MA et NA aequatur duplo tempori deſcenſus per verticalem AP.

CURVA TAUTOCHRONA IN FLUIDO RESISTENTIAM FACIENTE SECUNDUM QUADRATA CELERITATUM.

Auct. Leonh. Eulero.

§. 1.

Poſtquam *Hugenius* primum inueniſſet cycloidem eſſe curuam Tautochronam in vacuo et Hypotheſi grauitatis vniformis; *Neutonus* atque *Hermannus* dederunt quoque Tautochronas pro hypotheſi grauitatis difformiter agentis et tendentis ad punctum quodcunque fixum tanquam centrum. Poſuerunt autem motum fieri in vacuo, neque vllam pati reſiſtentiam. Quod vero ad media reſiſtentia attinet, *Neutonus* etiam demonſtrauit cycloidem eſſe tautochronam in medio in celeritatum ratione reſiſtente; ad alia autem reſiſtentia media neque ipſe neque quisquam alius eſt progreſſus, vt, quae curuae in iis tautochroniſmum producant, oſtenderent. M. Octobr. 1729. Tab. VII.