1733

Constructio aequationum quarundam differentialium, quae indeterminatarum separationem non admittunt

Leonhard Euler

posuisse, ut ab iis tangendis arceantur tirones, & quotquot tempus omne in Mathesi consumere prohibentur. Autor itaque præcipua illa inventa, quibus in Mathesi non datur sublimius, cum primis principiis evidenter connexa proposuit, ut unusquisque, qui a legendis Elementis Autoris ordine ac lento gradu progreditur, eadem facilitate illa perspicere possit, qua facillima in anterioribus perspexerat, atque adeo brevi temporis spatio, non neglectis studiis aliis, egregios in intimiori Mathesi progressus facere queat. Mechanica inprimis atque Hydraulica, plurimis accessionibus aucta, Theoriam de motu gravium ultra *Galilæanam*, in qua acquiescit prior editio, ad omnem hypothesin possibilem extendit. Addidit methodos investigandi centrum gravitatis in spatiis mixtilineis & in perimetris figurarum rectilinearum. In motu composito tendentiam mediam definire docet. Integrum Caput octavum de descensu & adscensu corporum in lineis curvis inseruit. Continentur in eo præclara maxime hujus ævi inventa de linea isochrona non minus in hypothesi *Galilæana*, quam in hypothesi directionum in centro Telluris convergentium, & in quacunque accelerationis hypothesi; de curva isochrona paracentrica; de curva tautochrona; de tempore descensus per curvam in quacunque gravitatis hypothesi, sive directiones supponantur parallelæ, sive convergentes, sive mobile descendat in concavitate, sive in convexitate curvæ; de curva brachystochrona & synchrona, & de curva æquilibrationis. Theoriam de motu penduli ex sublimioribus inventis fecit uberiorem, theoriam de centro oscillationis planiorem. In determinando centro oscillationis non modo difficiliora quædam adjecit problemata, veluti in figuris circa basin agitatis, sed integram quoque praxin de centro gravitatis in figuris in latus agitatis determinando, eodemque in figuris solidis inveniendo. In Capite de motu projectorum præter alia accessit analytica curvæ projectionis investigatio, non minus in hypothesi gravitatis cujuscunque directionibus in centro Telluris convergentibus, quam in hypothesi directionum parallelarum. Addidit quoque haud pauca,

pauca, quæ desiderabantur, in Capite de motu corporum ex percussione. Inprimis autem theoriam de viribus centralibus uberrime pertractavit, cujus antea primas tantummodo lineas duxerat. Integrum nunc quoque accessit Caput decimum quartum, de resistentia medii, satis amplum. Non commemoramus alias accessiones minores, etsi longe utilissimas, atque hoc nomine silentio præterimus, quæ passim Hydrostaticæ ac Aerometriæ adspersa fuerunt. Hydraulicæ theoria præter alias accessiones duobus Capitibus integris de cursu fluminum & de percussione fluidorum aucta. Ubi de percussione fluidorum agit, vim quoque determinare docet, quam ventus, indirecte impingens in alas molendini, exerit ad eas convertendas, ac inde porro situm alarum analytice investigat, in quo eas ventus maxima celeritate convertit. Reperies quoque ibidem principia, quibus actio aquæ in palmulas rotarum molarium determinatur. Colophonem vero addit problematis de solido minimæ resistentiæ solutio. Quoniam, qui *Tomum primum*, non consentiente Autore, Genevæ recuderat, Privilegium pro toto Opere Cæsareum impetraverat, ut hac ratione adigeret Autorem, ne Tomos ceteros nisi typis suis in lucem publicam emitti pateretur, ex intervallo nunc demum prodit *Tomus secundus*, litibus in foro finitis, & Privilegio ad Viduam *Rengeri* ejusque generum translato. Spem vero facit Autor in Præfatione, fore, ut tertius breviori multo temporis spatio sequatur.

L. EULERI CONSTRUCTIO ÆQUATIONUM *quarundam differentialium, quæ indeterminatarum separationem non admittunt.*

Constructiones, quibus Geometræ ad determinandas quasvis magnitudines utuntur, duplicis sunt generis; ad quorum alterum referri possunt omnes constructiones Geometricæ, tam planæ, quam solidæ & lineares; ad alterum vero pertinent eæ constructiones, quæ vel quadraturis curvarum, vel rectificationibus, perficiuntur. Illas adhibemus in Geometria communi ad radices æquationum algebraicarum quarumcunque exprimendas; id quod efficitur, uti constat, intersectione linearum vel rectarum, vel curvarum, prout æquatio oblata postulat. Posterioris vero generis constructiones, quas transscendentes appellare licet, inserviunt ad æquationes differentiales resolvendas, quæ in algebraicas transmutari nequeunt. Æquationes autem, sive algebraicæ, sive transscendentes, in quibus duæ insunt quantitates indeterminatæ, hujusmodi requirunt constructiones, ut, altera indeterminatarum pro lubitu assumta, altera determinetur; in quo efficiendo pro æquationibus algebraicis, tanquam postulatum, præmittitur, ut data magnitudine z, ejus quæcunque functio algebraica Z possit exhiberi. Pro differentialibus autem vel transscendentibus æquationibus insuper requiritur, ut, posita quantitate z, functio ejus quæcunque transscendens $\int Z\,dz$, in qua Z significat functionem quamcunque ipsius z, sive algebraicam, sive transscendentem, denuo definiri, atque adeo tanquam data considerari possit. Hanc ob rem igitur, quoties æquatio proposita ita potest transformari, ut altera indeterminata, vel ejus quædam functio, æqualis esse debeat certæ cuidam functioni alterius indeterminatæ, toties illius æquationis constructio erit in promtu. Vocari autem solet ista æquationum transmutatio indeterminatarum separatio; ex quo simul intelligitur, quare semper ad æquationes transscendentes construendas hujusmodi separatio tam solicite requiratur. In algebraicis quidem æquationibus hæc separatio non est necessaria ad constructionem adornandam. Quomodocunque enim in iis indeterminatæ sint permixtæ, totum negotium æque facile perficitur. Verum, quod ad differentiales æquationes attinet, ne unica quidem poterit assignari, quæ construi, neque tamen separari, queat. Usitatæ enim constructiones omnes ita sunt comparatæ, ut ex iis ipsis separatio indeterminatarum, etiamsi alias fuerit inventu difficillima, sponte sequatur. Hanc ob rem non parum me præstitisse arbitror, cum nuper in constructiones æquationum quarundam differentialium, quæ indeterminatas a se invicem separari

rari non patiuntur, incidissem, simulque cognovissem, has constructiones plus non postulare, quam ante concedi solere observaveram. Prima æquatio, quæ occurrebat, erat hujus formæ $dy + \frac{y^2dx}{x} = \frac{xdx}{x^2-1}$ in qua non solum indeterminatas a se invicem separare ego non possum, sed ipsa etiam constructio demonstrabit, hujusmodi separationem locum habere non posse. Si enim succederet, perspicuum erit, comparationem perimetrorum ellipsium dissimilium ex ea esse secuturam, quæ tamen, ne circuli quidem concessa quadratura, exhiberi potest. Istam vero æquationem sequenti modo construo. Fiant super eodem axe conjugato infinitæ ellipses, quæ ergo solo axe transverso a se invicem discrepant. Ex his conficiatur nova curva, in qua, si abscissæ æquales capiantur axibus ellipsium transversis, applicatæ sint æquales peripheriis earundem ellipsium. Hoc facto, vocetur axis ille conjugatus constans 1, abscissa hujus novæ curvæ, seu axis transversus ellipsis cujusdam ponatur $= r$, & applicata, seu perimeter ejusdem ellipsis $= q$. Accipiatur nunc $x = \sqrt{(r^2-1)}$, eritque $y = \frac{(r^2-1)dq}{qrdr}$, quæ constructio, quia q ex data r per rectificationem curvæ cognitæ habetur, prorsus est legitima. Simili modo deductus sum mox ad constructionem celebris hujus æquationis $ax^n\,dx = dy + y^2dx$, quam primum Cl. Comes *Riccati* in lucem produxit, cunctisque Geometris examinandam tradidit. Deinceps quidem variæ comparuerunt meditationes, quæ autem omnes nihil aliud continent, nisi ut casus particulares, seu valores loco n substituendos, exhibuerint, quibus ista æquatio separationem & integrationem quoque admittit. Nemo vero, quantum scio, ne unicum quidem assignavit casum, quo constructio perfici possit, præter illos exhibitos. Ut taceam igitur universalem, quicquid n significet, constructionem, quæ, nisi meæ methodi beneficio, vix a quoquam poterit inveniri: sequenti ratione ego istam æquationem resolvo. Quantitas ista differentialis $n(n+4)\,dz\,(1-z^2)^{\frac{-n-4}{2n+4}} + 2\,dz\,(1-z^2)^{\frac{-n-4}{2n+4}}$

$\frac{2z\sqrt{f}}{n+2}$

(c

$\left(c^{\frac{2z\sqrt{f}}{n+2}} + c^{\frac{-2z\sqrt{f}}{n+2}}\right)$, in qua z eſt variabilis, f conſtans, & c numerus, cujus logarithmus hyperbolicus eſt 1, ita integretur, ut, facto $z=0$, tota evaneſcat. Quod quidem integrale, etiamſi re ipſa exhiberi nequeat, tamen per quadraturas conſtrui, ideoque tanquam cognitum conſiderari poterit. In hoc deinceps integrali ponatur $z=1$, & habebitur quantitas, quæ erit functio quædam ipſius f. Scribatur porro in hac functione ax^{n+2} loco f, & quantitas reſultans, quæ tota ex x & conſtantibus erit compoſita, vocetur P. Invento nunc hoc modo P, dico, fore $y=\frac{dP}{Pdx}$, qui eſt verus ipſius y valor in æquatione propoſita $ax^n dx = dy + y^2 dx$. Notandum eſt autem, hanc ſolutionem locum non habere, quoties n fuerit numerus intra hos terminos 0 & -2 contentus. At huic incommodo facile remedium adhibetur, ita, ut iſta conſtructio nihilominus pro univerſali ſit habenda. Cum enim, uti conſtat ex iis, quæ Cl. *Daniel Bernoulli* hac de æquatione in publicum edidit, iſta æquatio, ſi ſit ſeparabilis in caſu $n=m$, ſeparari quoque poſſit in caſu $n=\frac{-m}{m+1}$ vel $n=-m-4$; perſpicuum eſt, caſus omnes intra limites 0 & -2 contentos reduci poſſe ad alios, qui intra limites -2 & -4 comprehenduntur, & hanc ob rem non amplius excluduntur. Obſervo autem, formulam illam differentialem $n\ (n+4)\ dz$

$$(1-z^2)^{\frac{-n-4}{2n+4}} + 2dz\ (1-z^2)^{\frac{-n-4}{2n+4}} \left(c^{\frac{2z\sqrt{f}}{n+2}} + c^{\frac{-2z\sqrt{f}}{n+2}}\right),$$

quoties $\frac{-n-4}{2n+4}$ ſit vel 0 vel numerus integer affirmativus, toties re ipſa poſſe integrari. Hoc vero accidit, quoties fuerit $n=\frac{-4K}{2K-1}$, denotante K numerum quemcunque affirmativum integrum. Quia deinde æquatio, ſi exponens ipſius x eſt $\frac{-n}{n+1}$, ad hanc $ax^n dx = dy + y^2 dx$ poteſt reduci, erit illa formula quoque integrabilis, ſi fuerit $n=\frac{-4K}{2K+1}$. Atque ſic prodeunt illi ipſi caſus, jam ab aliis eruti, quibus indeterminatæ in æquatione propoſita a ſe invicem poſſunt ſeparari.

CONSPECTUS REIPUBLICÆ LITERARIÆ, ſive Via ad Hiſtoriam Literariam, juventuti ſtudioſæ aperta a CHRISTOPH. AUG HEUMANNO, D. Editio tertia, locupletior.

Hanoveræ, apud Jo. Jac. Fœrſterum, 1733, 8.
Alph. 1 pl. 7.

Liber hic, cujus prima editio, plagulis novem conſtans, A. 1718 prodiit, altera, ita locupletata, ut ſeptendecim impleret plagulas, A. 1722 publicata eſt, cum abunde notus tritusque ſit; noviſſimam hanc editionem ita tractabimus, ut ex iis tantum quædam excerpamus, quæ nunc demum acceſſerunt. Etſi vero *trium* quoque *priorum Capitum* nec paucæ ſunt, nec leves, acceſſiones, libet tamen *quartum* ſtatim *Caput* ingredi, in quo per compendium deſcribitur Hiſtoria literarum inde a vetuſtiſſimis temporibus uſque ad hanc noſtram ætatem. Hic §. 2 e ſcholis Propheticis, quarum in ſacro Codice non una mentio, concludit, literas haud negligenter coluiſſe veteres Hebræos. Non enim videntur in ſcholas ſuas a Prophetis recepti fuiſſe, niſi qui in minoribus ſcholis jam perceperant legendi ſcribendique artem, Arithmeticam, fundamenta religionis prima, & hujusmodi alia. Græciam jam antiquiſſimis temporibus fuiſſe literarum domicilium, ex eo §. XI manifeſtum facit, quod jam olim Carthagine, itemque Romæ, regnante *Romulo*, denique apud Perſas, lingua Græca fuerit lingua literatorum. Eccleſiam Chriſtianam primos ſuos ſcriptores pleroſque accepiſſe ab ethnicis, obſervat §. 15. *Origenem* non honoris cauſa vocatum fuiſſe *Adamantium*, ſed id nominis inde a puero geſſiſſe, docet §. 17, ubi & de *Lactantii* nomine idem ſtatuit. De Theologi-