



1732

# Nova methodus innumerabiles aequationes differentialis secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

## Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus" (1732). *Euler Archive - All Works*. 10.  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/10>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

iam a  $t$  penderent, quo in casu aequatio non est amplius pro corporibus cylindricis. Simili modo in aequatione pro corporibus rotundis  $x dx = y dy + R dt$ ,  $R$  tantum a  $t$  pendet. Si igitur  $R$  etiam  $x$  et  $y$  in se comprehendat, aequatio erit pro nouo superficierum genere, et nihilominus reductionem admittit,

Proposuit mihi hanc quaestionem Cel. Ioh. Bernoulli, postquam ipsi hanc meam solutionem scripsissem, vt nimirum praeter tria exposita superficierum genera alia inuestigarem, quae etiam ad aequationes integrabiles perducant. Solutionem igitur huius quaestionis, quia tam facile ex antecedentibus fluit, hic adiungere volui.

---

NOVA METHODVS  
INNUMERABILES AEQVATIONES DIFFERENTIALIALES SECUNDI GRADVS REDV-  
CENDI AD AEQVATIONES DIFFERENTIALIALES PRIMI GRADVS.

*Auctore*

Leonh. Eulero.

I.

M. Sept.  
1728.

**Q**Vando ad aequationes differentiales secundi vel altioris cuiuspiam gradus perueniunt analytiae, in iis resoluendis duplici modo versantur: Primo inquirunt, an in promptu sit eas integrare; id si fuerit, obtinuerunt

runt, quod desiderabant. Cum autem integratio vel prorsus impossibilis, vel saltem difficilior videtur, conantur eas ad differentiales primi gradus reducere; quippe de quibus facilius iudicari potest, an construi queant; nullaeque aequationes differentiales, nisi primi gradus, adhuc cognitae methodis construi possint. Quod ad illud attinet, de eo hac dissertatione explicare non est propositum; quomodo autem aequationes differentiales altiorum graduum praesertim vero secundi ad differentiales primi gradus sint reducendae, methodum quandam adhuc inusitatam, et quae latissime patet in sequentibus sum expositurus.

2. Iam quidem saepenumero Mathematici, quando aequationes differentiales secundi vel altiorum graduum occurrerunt, eas ad differentiales primi gradus reduxerunt, atque deinde construxerunt; quemadmodum videre licet in constructionibus catenariae, elasticae, proejectoriae in medio quocunque resistenti pluriumque aliarum curvarum, quarum aequationes primo differentiales secundi vel tertii gradus sunt inuentae. Pleraque quidem earum reipsa integrabiles sunt, sed tamen eas facilius erat integrare, postquam ad differentiales primi gradus fuerant reductae. Earum autem aequationum ratio ita est comparata, ut vel utraque vel saltem alterutra indeterminata ipsa desit, earum eiusue differentialibus et differentio - differentialibus aequationes tantum ingredientibus.

3. Si autem in aequatione differentio - diffe-

rentiali alterutra indeterminata caret : facile est eam ad simpliciter differentialem reducere substituendo loco differentialis quantitatis deficientis factum ex noua quadam indeterminata in alterum differentiale. Hac enim ratione, si constans quoddam differentiale fuerit positum, differentio-differentiale aequale inuenitur simpliciter differentiale; quo substituto aequatio habetur differentialis primi gradus. Vt in hac aequatione  $Pdy^n = Qdv^n + dv^{n-2} ddv$ , vbi P et Q significant functiones quascunque ipsius  $y$ , atque  $dy$  constans ponitur. Quia ipsa  $v$  non ingreditur aequationem, fiat  $dv = zdy$ , erit  $ddv = dzdy$ . His substitutis ista oritur aequatio  $Pdy^n = Qz^n dy^n + z^{n-2} dy^{n-1} dz$ , diuisaque hac per  $dy^{n-1}$  ista  $Pdy = Qz^n dy + z^{n-2} dz$ ; quae est simpliciter differentialis.

4. Alias aequationes differentio differentiales, nisi huiusmodi, nemo adhuc, quantum scio, ad differentiales primi gradus vnquam reduxit, nisi forte in promptu fuerit eas prorsus integrare. Hic autem methodum exponam, qua non quidem omnes, sed tamen innumerabiles aequationes differentio-differentiales vtut ab vtraque indeterminata affectae ad simpliciter differentiales reduci poterunt. Ita vero in iis reducendis versor, vt eas certa quadam substitutione in alias transformem, in quibus alterutra indeterminata deest. Quo facto ope substitutionis §. praeced. expositae eae aequationes penitus ad differentiales primi gradus reducentur.

5. Cum obseruassem eam esse quantitatum exponentialium, seu potius earum dignitatum, quarum

rum exponens est variabilis manente quantitate elevata constante, proprietatem, vt si differentientur, denuoque differentientur, semper variabilis finita ipsa nonnisi exponentem afficiat; atque differentia- lia sint facta ex ipso integrali in differentia- lia exponentis. Quantitas huiusmodi est  $c^x$  vbi  $c$  denotet numerum, cuius logarithmus est vnitas; erit eius differentiale  $c^x dx$ , differentio - differentiale  $c^x(dx + dx^2)$ , vbi  $x$  nonnisi in exponentem ingre- ditur. Haec considerans perspexi, si in aequatione differentio-differentiali loco indeterminatarum huius- modi exponentialia substituuntur: tum ipsas variabi- les tantummodo in exponentibus superfuturas esse. Quo cognito oportet, vt ea exponentialia loco in- determinatarum substituenda ita accommodentur, vt facta substitutione, ea diuisione tolli queant; hoc modo alterutra saltem indeterminata ex aequatione eliminabitur, eiusque duntaxat differentia- lia supererunt.

6. Haec quidem operatio non in omnibus ae- quationibus succedit; verumtamen eam tria aequa- tionum differentialium 2<sup>di</sup> gradus genera admittere obseruaui. Primum genus est omnium earum ae- quationum, quae nonnisi duobus constant terminis. Alterutrum eas comprehendit aequationes, in qua- rum singulis terminis indeterminatae aequalem di- mensionum numerum constituunt: neque vero indeter- minata ipsa solum, sed etiam eius differentia- lia cuius- que gradus dimensionem vniam constituere existiman- da sunt. Ad tertium genus eas refero aequationes,  
in

in quarum singulis terminis alterutra indeterminata eundem obtinet dimensionum numerum; quorum eadem pertinent, quae modo de aestimatione dimensionum allata sunt. Omnes igitur aequationes ad haec tria genera pertinentes hic reducere docebo.

7. Omnes aequationes ad primum genus pertinentes sub hac generali formula comprehenduntur:  $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$ , vbi  $dx$  constans ponitur. Et si enim in aequatione quapiam neque  $dx$  neque  $dy$  constans accipiatur; sed aliud quoddam differentiale inde pendens, id nihil difficultatis habet, cum cognita sit methodus, quod constans erat differentiale, variabile faciendi et vice eius aliud quoddam constans. Ad hanc vero aequationem reducendam pono  $x = c^{av}$ , et  $y = c^v t$ . Erit  $dx = ac^{av} dv$ , et  $dy = c^v(dt + t dv)$ . Atque hinc  $ddx = ac^{av}(ddv + a dv^2)$  et  $ddy = c^v(ddt + 2dt dv + t ddv + t dv^2)$ . Sed cum  $dx$  ponatur constans erit  $ddx = 0$ , adeoque  $ddv = -a dv^2$ . Hoc substituto loco  $ddv$ , habebitur  $ddy = c^v(ddt + 2dt dv + (1 - a)t dv^2)$ . Surrogentur hi valores loco  $x$  et  $y$  in aequatione proposita, transformabitur ea in hanc  $ac^{av(m+p)} a^p dx^p = c^{(n+p-1)v} t^n (dt + t dv)^{p-2} (ddt + 2dt dv + (1 - a)t dv^2)$ .

8. Iam  $a$  determinari debet ita, vt exponentialia diuisione tolli possint. Hoc vt fiat, oportet fit  $av(m+p) = (n+p-1)v$ , inde colligitur  $a = \frac{n+p-1}{m+p}$ . Superior igitur aequatio determinato  $a$  abit in sequentem  $a^{\frac{n+p-1}{m+p}} dx^p = t^n (dt + t dv)^{p-2} (ddt + 2dt dv + \frac{m-n+1}{m+p} t dv^2)$ . Quae protinus ex proposita eruta  
fuis-

fuiſſet, ſi poſuiſſem  $x = c^{(n+p-1)v \cdot (m+p)}$ , et  $y = c^v t$ .  
 Eſt autem  $n + p - 1$  numerus dimensionum, quas  $y$   
 conſtituit; et  $m + p$  quas  $x$ . Facile ergo in quouis  
 caſu particulari  $\alpha$  determinatur ſtatimque debita ſub-  
 ſtitutio habebitur. In aequatione inuenta, cum ab-  
 ſit  $v$ , ponatur  $dv = z dt$ , erit  $d^2 v = z ddt + dz dt$ , ſed  
 $ddv = - a dv^2 = \frac{1-n-p}{m+p} z^2 dt^2$ . Hinc inuenitur  $ddt =$   
 $\frac{-adz dt}{z} + \frac{1-n-p}{m+p} z dt^2$ . His ſubſtitutis emergit  $a^{\frac{(n+p-1)}{m+p} p}$   
 $z^p dt^p = t^n (dt + tz dt)^{p-2} (\frac{1-n-p}{m+p} z dt^2 - \frac{dz dt}{z} + z z dt^2 +$   
 $\frac{m-n+1}{m+p} tz z dt^2)$ . Quae diuiſa per  $dt^{p-1}$  dabit  $a^{\frac{(n+p-1)}{m+p} p}$   
 $z^p dt = t^n (1 + tz)^{p-2} (\frac{1+2m-n+p}{m+p} z dt - \frac{dz}{z} + \frac{m-n+1}{m+p} tz^2 dt)$ .

9. Reducta ergo eſt aequatio generalis pro-  
 poſita  $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$  ad hanc differentialem  
 primi gradus  $a^{\frac{(n+p-1)}{m+p} p} z^{p+1} dt = tz^n (1+z)^{p-2}$   
 $(\frac{1+2m-n+p}{m+p} z^2 dt + \frac{m-n+1}{m+p} tz^3 dt - dz)$ , multiplicata ae-  
 quatione inuenta per  $z$ . Haec aequatio vnico actu  
 ex ea inueniri poteſt, poſito in prima ſubſtitutione  
 loco  $v$  hoc  $\int z dt$ . Fieri ergo debet  
 $x = c^{(n+p-1) \int z dt \cdot (m+p)}$  et loco  $y$  poni debet  $c^{\int z dt} t$  ſiue  
 quod eodem redit, ponatur  $x = c^{(n+p-1) \int z dt}$   
 et  $y = c^{(m+p) \int z dt} t$ . Si ex aequatione differentiali in-  
 uenta iterum propoſita differentialis ſecundi gradus  
 inueniri debeat, videamus quales loco  $z$  et  $t$  ſub-  
 ſtitutiones adhiberi debeant. Cum ſit  $x = c^{(n+p-1) \int z dt}$   
 erit  $t^{\int z dt} = x^{1:(n+p-1)}$ ; quare  $y = x^{(m+p):(n+p-1)} t$ . Vn-  
 de habetur  $t = y x^{-(m+p):(n+p-1)}$ . Deinde quia  
 $c^{\int z dt} = x^{1:(n+p-1)}$  erit  $\int z dt = \frac{1}{n+p-1} \ln x$ ; ergo  $z dt =$   
 $\frac{dx}{(n+p-1)x}$ . Sed eſt  $dt = x^{-(m+p):(n+p-1)} dy - \frac{(m+p)}{n+p-1}$   
 $y x^{-(m-n-2p+1):(n+p-1)} dx$ . Conſequenter inuenietur

eadem manet. Possent adhuc addi  $ex^r y^{n-1} dx^q$   
 $dy^{2-q}$  et huiusmodi quotquot libuerit; prout exem-  
 pla particularia, ad quae reducenda generalis accom-  
 modari debet, pluribus paucioribusue constant termi-  
 nis. Tres vero terminos, ut dixi, assumisse sufficit: cum  
 plures alium reducendi modum non requirant.

12. Aequationem propositam reduco substi-  
 tuendis loco  $z$ ,  $c^v$  et loco  $y$ ,  $c^v t$ . Cum igitur sit  $x =$   
 $c^v$  et  $y = c^v t$ ; erit  $dx = c^v dv$  et  $dy = c^v(dt + t dv)$ ; por-  
 roque  $ddx = c^v(d dv + dv^2)$  et  $ddy = c^v(ddt + 2 dt dv +$   
 $t dv^2 + t d dv)$ . Quia vero  $dx$  ponitur constans, erit  
 $ddx = 0$ , hinc igitur  $d dv = -dv^2$ , hanc ob rem habebi-  
 tur  $ddy = c^v(ddt + 2 dt dv)$ . Ponantur hi valores in ae-  
 quatione loco  $x, y, dx, dy$  et  $ddy$ , transformabitur ea in  
 sequentem:  $ac^v t^{-m-1} dv^2(dt + t dv)^{2-p} + bc^v t^{-n-1} dv^2(dt +$   
 $t dv)^{2-q} = c^v(ddt + 2 dt dv)$ . Quae diuisa per  $c^v$  abibit in  
 hanc  $at^{-m-1} dv^2(dt + t dv)^{2-p} + bt^{-n-1} dv^2(dt + t dv)$   
 $^{2-q} = ddt + 2 dt dv$ . In hac cum desit  $v$  pono  $dv = z dt$  e-  
 rit  $d dv = z ddt + dz dt$ , sed  $d dv = -dv^2 = -z^2 dt^2$  ergo  
 $ddt = -z dt^2 - \frac{dz dt}{z}$ . Hinc ista obtinebitur aequatio,  
 $at^{-m-1} z^p dt^2(dt + z dt)^{2-p} + bt^{-n-1} z^q dt^2$   
 $(dt + z dt)^{2-q} = z dt^2 - \frac{dz dt}{z} + 2 z dt^2$  seu haec ordinatio  
 $at^{-m-r} z^p dt(1 + zt)^{2-p} + bt^{-n-1} z^q dt(1 + zt)^{2-q} = z dt - \frac{dz}{z}$ .

13. Aequatio haec differentialis primi gradus  
 vnico actu ex proposita elici potuisset, si statim po-  
 situm esset  $x = c^{\int z dt}$  et  $y = c^{\int z dt} t$ ; vnde foret  $dx = c^{\int z dt}$   
 $z dt$  et  $dy = c^{\int z dt}(dt + t z dt)$ ; atque  $ddx = c^{\int z dt}(z ddt +$   
 $dz dt + z z dt^2) = 0$ . quare  $ddt = -z dt^2 - dz dt : z$ . Hoc in  
 vsu vocato habebitur  $ddy = c^{\int z dt}(z dt^2 - dz dt : z)$ . Pro-  
 positum sit hoc exemplum  $y^{\alpha+1} ddy = x^\alpha dx^2$ , mute-  
 tur id in  $ddy = x^\alpha y^{-\alpha-1} dx^2$ . Collato hoc cum gene-



$z = dx : [(n+p-1)x^{-(m-n+1)}(n+p-1)dy - (m+p)y x^{-(m+p)}(n+p-1)dx]$ . Perspicuum autem est, si  $z$  in  $t$  vel  $t$  in  $z$  detur etiam relationem, quam  $x$  et  $y$  inter se habeant, inveniri posse.

10. Illustremus haec, quae generaliter inventa sunt exemplo quodam particulari. Sit  $x dx dy = y ddy$ , quae reducitur dividendo per  $dy$ , ad ad hanc  $x dx = y dy^{-1} ddy$ . Huic generali accommodata, habebitur  $a=1, m=1, p=1, n=1$ . Substitutis his in aequatione differentiali primi gradus, habebitur ea, ad quam proposita reducitur,  $\frac{1}{2} z dt = t (1+tz)^{-1} (\frac{3}{2} z^2 dt + \frac{1}{2} tz^3 dt - dz)$ , quae abit in  $z^2 dt + tz^3 dt = 3tz^2 dt + t^2 z^3 dt - 2tdz$ . Ad hanc aequationem proposita  $x dx dy = y ddy$  reducitur, si fiat  $x = e^{sz dt}$  et  $y = e^{2sz dt} t$ . Constructio ergo aequationis propositae pendet a constructione aequationis differentialis inventae; haec si construi poterit, et ea constructur; si fuerit reipsa integrabilis, ea quoque integrari poterit.

11. Secundum genus aequationum differentio-differentialium, quas mea methodo ad differentiales primi gradus reducere possum, eas complectitur, quae in singulis terminis eundem dimensionum, quas indeterminatae earumque differentia constituant, numerum tenent. Aequatio generalis huc pertinens est sequens  $ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} = ddy$ . In huius singulis terminis est vnica dimensio indeterminatarum: poniturque  $dx$  constans. Etsi vero aequatio haec assumpta tribus tantum constat terminis: tamen quodcumque libuerit insuper adiici possunt, operatio enim

rali aequatione fiet  $a=1$ ,  $b=0$ ,  $m=a$ ,  $p=2$ . Si ergo hoc exemplum, ut generalis formula, reducat, haec inuenietur aequatio  $t^{-a-1}z^2dt = zdt - dz$ :  $z$ . Sive haec  $t^{-a-1}z^3dt = z^2dt - dz$ . Quae si constructionem admitteret, et differentialis secundi gradus ex ea construi posset. Notandum est, semper fere ad eiusmodi aequationes differentiales perveniri, quae admodum difficulter vel prorsus non construi queant.

14. Assumo aliud exemplum,  $x dx dy - y dx^2 = y^2 ddy$ , quod ad modum generalis aequationis hanc induit formam  $xy^{-2} dx dy - y^{-1} dx^2 = ddy$ . Reducatur huc generalis aequatio, et erit  $a=1$ ,  $m=1$ ,  $p=1$ ,  $b=-1$ ,  $n=0$ ,  $q=2$ . Respondet ergo exemplo proposito sequens aequatio differentialis  $t^{-2}zdt(1+zt) - t^{-1}z^2dt = zdt - dz$ :  $z$ . Multiplicetur haec per  $t^2z$ , habebitur  $z^2dt + z^3tdt - z^3tdt = z^2t^2dt - t^2dz$  sive  $z^2dt = zt^2dt^2 - t^2dz$ , quae separata dat  $dz:z^2 = dt(t^2-1):tt$  et integrata hanc  $-1:z = t + 1:t - a$  sive  $atz - t = t^2z + z$ . Est vero  $z = dv:dt$ . Itaque  $atdv - tdt = t^2dv + dv$ . seu  $dv = tdt:(at - tt - 11)$ . Quia vero  $c^v = x$  erit  $v = lx$  et  $t = y : x$  ergo  $dv = dx : x$  et  $dt = (xdy - ydx):xx$  consequenter  $ydy + xdx = aydx$ . Haec aequatio iterum integrari potest, eum vero tantum noto casum, quod si  $a=0$  ea transeat in aequationem circuli.

15. Accipio nunc casum, quo plures, quam in generali aequatione, sint termini  $yydx^3 + xxdy^3 - yx dx dy^2 - yx dx^2 dy + yx^2 dx ddy - y^2 x dx ddy = 0$ . Hoc exemplum modo supra exposito reducere licebit. Cum  $dx$  ponatur constans, maneant eadem substitutiones scilicet,  $x = c^v$ ,  $y = c^vt$ ;  $dx = c^v dv$ ;  $dy = c^v$   
( $dt$ )

$(dt + t dv)$  et  $ddy = c^2(ddt + 2dt dv)$ . Est vero  $ddv = -dv^2$ . His substitutis atque aequatione proueniente ordinata, inuenitur  $dt^3 + 2tdt^2 dv - ttdtdv^2 + tdt dv^2 + t dv ddt - ttdv ddt = 0$ . Hic cum desit  $v$ , ponatur  $dv = zdt$ , erit vt ante  $ddt = -zdt^2 - dzdt : z$ . Exinde reperitur haec aequatio in ordinem reducta,  $dt + 2tzdt - tdz + ttdz = 0$ . Quae, cum  $z$  vnicam tantum habeat dimensionem separari potest methodo a Cel. Ioh. Bernoulli in Actis Lips. tradita. Sed sine vlla substitutione eam eique similes quascunque statim integrare seu ad integram formam solum reducere possum, sequenti modo.

16. Reducatur aequatio nostra ad hanc  $dz + \frac{2zdt}{t-1} + \frac{dt}{t-1} = 0$ , vt  $dz$  nullo affectum sit coefficiente tum sumatur id, quo  $z$  est affectum, nempe  $\frac{2dt}{t-1}$  cuius integrale exprimitur per  $2\int \frac{dt}{t-1}$ . Iam aequatio proposita multiplicetur per  $c^{2\int \frac{dt}{t-1}}$  et habebitur

$c^{2\int \frac{dt}{t-1}} dz + \frac{2c^{2\int \frac{dt}{t-1}} z dt}{t-1} + \frac{c^{2\int \frac{dt}{t-1}} dt}{t-1} = 0$ . Nunc autem aequatio integrabilis est facta, duorum enim priorum terminorum integrale est  $c^{2\int \frac{dt}{t-1}} z$ . Est igitur

$c^{2\int \frac{dt}{t-1}} z + \int \frac{c^{2\int \frac{dt}{t-1}} dt}{t-1} = a$ . Sed cum sit  $\int \frac{dt}{t-1} = l(t-1)$  erit  $c^{2\int \frac{dt}{t-1}} = (t-1)^2$ . Ergo  $(t-1)^2 z + \int \frac{(t-1) dt}{t-1} = a$ , hincque  $(t-1)^2 z + t - lt = a$ . Hoc modo omnes aequationes differentiales in quibus alterutra variabilis vna plures dimensiones nusquam habet, integrari seu

faltem construibiles redduntur. Hac de industria methodo sum vsus, quo magis intelligatur quanti sint vsus exponentialia in tractandis aequationibus.

17. Aequatio ad quam est peruentum haec est  $(t-1)^2 z + t - lt = a$ . Haec ulterius reducatur, ut tandem aequatio inter  $x$  et  $y$  rursus obtineatur: quoniam erat  $dv = zdt$  erit  $z = dv : dt$ : quamobrem aequatio abibit in  $(t-1)^2 dv + tdt - dtlt = adt$  haec vero in  $dv = \frac{adt - tdt + dtlt}{(t-1)^2}$ . Quae denuo integrationem admittit;

integrata vero hanc habet formam  $v = \frac{-a + t - tlt}{t-1}$  constante vero addita hanc  $v = \frac{b-a + t - bt - tlt}{t-1}$ . Quia vero est  $x = c^v$ ; erit  $v = lx$ . Et cum sit  $y = c^{vt}$  erit  $y = tx$  et ideo  $t = y : x$ . His substitutis habebitur sequens aequatio  $lx = \frac{bx - ax + y - by - yly + ylx}{y-x}$ . Vnde oritur haec  $(b-a)x + (1-b)y = yly - xlx$ . Ponatur brevitatis causa  $b-a = f$ , et  $1-b = g$ ; erit  $fx + gy = yly - xlx$ . Quae est integralis aequatio propositae §. 15. Si fiat  $f = 0$ , et  $g = 0$ , erit  $yly = xlx$ . Ex qua fumendis numeris reperitur haec  $y^y = x^x$ .

18. Tertium genus aequationum quarum hic reducendarum methodum trado, eas complectitur, in quarum singulis terminis alterutra indeterminata eundem tenet dimensionum numerum. Hic duo distinguendi sunt casus, prout vel ipsius illius variabilis vbique eundem dimensionum habentis differentiale constans ponitur vel secus. Ad primum casum spectat sequens aequatio vniuersalis  $Px^m dy^{m+2} + Qx^{m-b} dx^b dy^{m+2-b} = dx^m ddy$ . In qua  $x$  in singulis terminis  $m$  habet dimensiones, et  $dx$  ponitur constans. Significant autem P et Q functiones quascunque

que ipsius  $y$ . Ad hanc reducendam vnica substitutione opus est : nempe fiat  $x=c^v$  erit  $dx=c^v dv$  et  $ddx=c^v(ddv+dv^2)=0$ . ergo  $ddv=-dv^2$ . His subrogatis habetur  $Pdy^{m+2} + Qdv^b dy^{m+2-b} = dv^m ddy$ . Postquam nimirum diuisa est per  $c^{mv}$ .

19. Cum in aequatione inuenta  $v$  non deprehendatur reducetur substituendo loco  $dv, zdy$ . Erit  $ddv = zddy + dydz = -dv^2 = -z^2 dy^2$ . Hinc inuenietur  $ddy = -zdy^2 - dydz : z$ . substituuntur ergo in aequatione inuenta loco  $dv$  et  $ddy$  hi valores reperti et habebitur haec aequatio  $Pdy^{m+2} + Qz^b dy^{m+2} = -z^{m+1} dy^{m+2} - z^{m-1} dy^{m+1} dz$ . Quae diuisa per  $dy^{m+1}$  abit in hanc  $Pdy + Qz^b dy = -z^{m+1} dy - z^{m-1} dz$ . Quae est primi gradus, vt erat propositum. Ad hanc statim perueniri potuisset, si positum esset  $x=c^{szdy}$ . Vnde foret  $dx = c^{szdy} zdy$  et  $ddx = c^{szdy} (zdy^2 + dzdy + zddy) = 0$  et hinc  $ddy = -zdy^2 - dzdy : z$ . Hi valores loco  $x, dx, ddy$  substituti statim inuentam aequationem praebent.

20. Alter casus aequationum ad genus tertium pertinentium respicit sequentem generalem aequationem.  $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-b} dx^b dy^{m-b+1} = dx^{m-1} ddx$ . In qua aequatione  $dy$  ponitur constans, P et Q designant functiones ipsius  $y$  quascunque. Et vt perspicuum est  $x$  in singulis terminis  $m$  tenet dimensiones. Ponatur, vt ante,  $x=c^v$ ; erit  $dx=c^v dv$ , et  $ddx=c^v (ddv+dv^2)$ . Hisce in aequatione substitutis, resultat haec aequatio diuisione facta per  $c^{mv}$ ,  $Pdy^{m+1} + Qdv^b dy^{m-b+1} = dv^{m+1} + dv^{m-1} ddv$ . Haec aequatio, vt vltius reducatur, cum  $v$  desit, ponatur  $dv=zdy$   
erit

erit ob  $dy$  constans  $ddv = dzdy$ . Hanc ob rem aequatio vltima transmutabitur in  $Pdy^{m+1} + Qz^b dy^{m+1} = z^{m+1} dy^{m+1} + z^{m-1} dy^m dz$ . Haec autem, si diuidatur per  $dy^m$ , dabit istam  $Pdy + Qz^b dy = z^{m+1} dy + z^{m-1} dz$ . Pendet ergo constructio propositae aequationis a constructione huius inuentae.

21. Ex hisce, arbitror, intelligitur, quomodo aequationes differentiales secundi gradus ad vnum aliquod trium expositorum genus pertinentes tractari oporteat. Facile quidem concedo raro admodum ad tales aequationes perueniri, in quibus non alterutra indeterminata desit; Tamen a nemine hoc nomine vtilitatem huius inuenti impugnatum iri puto. Fieri potest, vt nouus aliquis campus aperiat problemata suggerens quorum resolutio ad aequationes tales deducat. Memini me aliquando physicum problema quoddam resoluentem ad hanc peruenisse aequationem  $y^2 ddy = x dx dy$ . Qua tum temporis neque a me neque ab aliis, cum quibus communicaueram, vilo modo reduci potuerat. Nunc vero, cum et ad primum et ad secundum genus pertineat, reductio facile successit vt ex §. 10 videre licet.

22. Hoc vero praeterea de assumenda constante monendum duxi: In aequationibus ad secundum genus relatis nihil interest, quodcunque differentiale constans sit assumtum. Potest id esse vel differentiale alterutrius variabilis, vel aliud differentiale ex vtriusque variabilis differentialibus vt libet compositum, modo id sit, vt natura rei exigit, homogeneum

neum. Illud quidem in generali exemplo locum obtinuit; sed ex illa operatione simul intelligitur, quomodo, si differentiale constans sit quaecunque, aequationes tractari oporteat. Aliter res se habet in duobus reliquis generibus primo et tertio; ibi enim necesse est, ut alterutrius variabilis differentiale constans sit positum. Id si non fuerit methodo exposita reductio non succedit. Hic vero in casibus constans debet immutari, et aequatio in aliam transformari, in qua alterutrius variabilis differentiale sit constans.

23. Methodus in hac dissertazione exposita aequationes differentiales secundi gradus ad simpliciter differentiales reducendi consistit in idonea substitutione quantitatum exponentialium pro indeterminatis. Ea vero adhuc latius patet, quam hic est expositum. Possunt eius beneficio infinitae aequationes differentiales tertii ordinis ad alias, quae sint tantum secundi ordinis reduci. Et generaliter aequationes differentiales ordinis  $n$ . ad alias reducentur, quae sint ordinis tantum  $n-1$ . Aequationum vero cuiusque ordinis differentialium, quae hac methodo reducuntur, quoque sunt tria genera constituenda, eademque, quae hic sunt exposita. Ex his igitur etiam intelligitur, quantum huiusmodi substitutiones in aequationibus differentialibus primi gradus tractandis usum habere possint. Sed de his non opus est plura exponere.