1732

Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus

Leonhard Euler

iam a t penderent, quo in casu aequatio non est amplius pro corporibus cylindricis. Simili modo in aequatione pro corporibus rotundis $xdx = ydy + Rdt$, R tantum a t pendet. Si igitur R etiam x et y in se comprehendat, aequatio erit pro nouo superficierum genere, et nihilominus reductionem admittit,

Proposuit mihi hanc quaestionem Cel. Ioh. Bernoulli, postquam ipsi hanc meam solutionem scripsissem, vt nimirum praeter tria exposita superficierum genera alia inuestigarem, quae etiam ad aequationes integrabiles perducant. Solutionem igitur huius quaestionis, quia tam facile ex antecedentibus fluit, hic adiungere volui.

NOVA METHODVS
INNVMERABILES AEQVATIONES DIFFERENTIALES SECVNDI GRADVS REDVCENDI AD AEQVATIONES DIFFERENTIALES PRIMI GRADVS.

Auctore

Leonh. Eulero.

I.

M. Sept. 1728.

QVando ad aequationes differentiales secundi vel altioris cuiuspiam gradus perueniunt analystae, in iis resoluendis duplici modo versantur. Primo inquirunt, an in promtu sit eas integrare; id si fuerit, obtinuerunt

runt, quod desiderabant. Cum autem integratio vel prorsus impossibilis, vel saltem difficilior videtur, conantur eas ad differentiales primi gradus reducere; quippe de quibus facilius iudicari potest, an construi queant; nullaeque aequationes differentiales, nisi primi gradus, adhuc cognitis methodis construi possint. Quod ad illud attinet, de eo hac dissertatione explicare non est propositum; quomodo autem aequationes differentiales altiorum graduum praesertim vero secundi ad differentiales primi gradus sint reducendae, methodum quandam adhuc inusitatam, et quae latissime patet in sequentibus sum expositurus.

2. Iam quidem saepenumero Mathematici, quando aequationes differentiales secundi vel altiorum graduum occurrerunt, eas ad differentiales primi gradus reduxerunt, atque deinde construxerunt; quemadmodum videre licet in constructionibus catenariae, elasticae, proiectoriae in medio quocunque resistenti pluriumque aliarum curuarum, quarum aequationes primo differentiales secundi vel tertii gradus sunt inuentae. Pleraeque quidem earum reipsa integrabiles sunt, sed tamen eas facilius erat integrare, postquam ad differentiales primi gradus fuerant reductae. Earum autem aequationum ratio ita est comparata, vt vel vtraque vel saltem alterutra indeterminata ipsa desit, earum eiusue differentialibus et differentio-differentialibus aequationes tantum ingredientibus.

3. Si autem in aequatione differentio-diffe-

rentiali alterutra indeterminata caret: facile est eam ad simpliciter differentialem reducere substituendo loco differentialis quantitatis deficientis factum ex noua quadam indeterminata in alterum differentiale. Hac enim ratione, si constans quoddam differentiale fuerit positum, differentio-differentiali aequale inuenitur simpliciter differentiale; quo substituto aequatio habetur differentialis primi gradus. Vt in hac aequatione $Pdy^n = Qdv^n + dv^{n-2}\,ddv$, vbi P et Q significant functiones quascunque ipsius y, atque dy constans ponitur. Quia ipsa v non ingreditur aequationem, fiat $dv = zdy$, erit $ddv = dzdy$. His substitutis ista oritur aequatio $Pdy^n = Qz^n dy^n + z^{n-2}\,dy^{n-1}\,dz$, diuisaque hac per dy^{n-1} ista $Pdy = Qz^n\,dy + z^{n-2}\,dz$; quae est simpliciter differentialis.

4. Alias aequationes differentio differentiales, nisi huiusmodi, nemo adhuc, quantum scio, ad differentiales primi gradus vnquam reduxit, nisi forte in promtu fuerit eas prorsus integrare. Hic autem methodum exponam, qua non quidem omnes, sed tamen innumerabiles aequationes differentio-differentiales vtut ab vtraque indeterminata affectae ad simpliciter differentiales reduci poterunt. Ita vero in iis reducendis versor, vt eas certa quadam substitutione in alias transformem, in quibus alterutra indeterminata deest. Quo facto ope substitutionis §. praeced. expositae eae aequationes penitus ad differentiales primi gradus reducentur.

5. Cum obseruassem eam esse quantitatum exponentialium, seu potius earum dignitatum, quarum

rum exponens eſt variabilis manente quantitate elevata conſtante, proprietatem, vt ſi differentientur, denuoque differentientur, ſemper variabilis finita ipſa nonniſi exponentem afficiat; atque differentialia ſint facta ex ipſo integrali in differentialia exponentis. Quantitas huiusmodi eſt c^x vbi c denotet numerum, cuius logarithmus eſt vnitas; erit eius differentiale $c^x dx$, differentio-differentiale $c^x(ddx + dx^2)$, vbi x nonniſi in exponentem ingreditur. Haec conſiderans perſpexi, ſi in aequatione differentio-differentiali loco indeterminatarum huiusmodi exponentialia ſubſtituantur: tum ipſas variabiles tantummodo in exponentibus ſuperfuturas eſſe. Quo cognito oportet, vt ea exponentialia loco indeterminatarum ſubſtituenda ita accommodentur, vt facta ſubſtitutione, ea diuiſione tolli queant; hoc modo alterutra ſaltem indeterminata ex aequatione eliminabitur, eiusque duntaxat differentialia ſupererunt.

6. Haec quidem operatio non in omnibus aequationibus ſuccedit; verumtamen eam tria aequationum differentialium 2^{di} gradus genera admittere obſeruaui. Primum genus eſt omnium earum aequationum, quae nonniſi duobus conſtant terminis. Alterutrum eas comprehendit aequationes, in quarum ſingulis terminis indeterminatae aequalem dimenſionum numerum conſtituunt: neque vero indeterminata ipſa ſolum, ſed etiam eius differentialia cuiusque gradus dimenſionem vnam conſtituere exiſtimanda ſunt. Ad tertium genus eas refero aequationes, in

in quarum ſingulis terminis alterutra indeterminata eundem obtinet dimenſionum numerum ; quorſum eadem pertinent , quae modo de aeſtimatione dimenſionum allata ſunt. Omnes igitur aequationes ad haec tria genera pertinentes hic reducere docebo.

7. Omnes aequationes ad primum genus pertinentes ſub hac generali formula comprehenduntur: $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$, vbi dx conſtans ponitur. Etſi enim in aequatione quapiam neque dx neque dy conſtans accipiatur ; ſed aliud quoddam differentiale inde pendens, id nihil difficultatis habet, cum cognita ſit methodus, quod conſtans erat differentiale, variabile faciendi et vice eius aliud quoddam conſtans. Ad hanc vero aequationem reducendam pono $x = c^{\alpha v}$, et $y = c^v t$. Erit $dx = \alpha c^{\alpha v} dv$, et $dy = c^v(dt + tdv)$. Atque hinc $ddx = \alpha c^{\alpha v}(ddv + \alpha dv^2)$ et $ddy = c^v(ddt + 2dtdv + tddv + tdv^2)$. Sed cum dx ponatur conſtans erit $ddx = o$, adeoque $ddv = -\alpha dv^2$. Hoc ſubſtituto loco ddv , habebitur $ddy = c^v(ddt + 2dtdv + (1-\alpha) tdv^2)$. Surrogentur hi valores loco x et y in aequatione propoſita, transformabitur ea in hanc $ac^{\alpha v(m+p)} \alpha^p dv^p = c^{(n+p-1)v} t^n (dt + tdv)^{p-2} (ddt + 2dtdv + (1-\alpha) tdv^2)$.

8. Iam α determinari debet ita , vt exponentialia diuiſione tolli poſſint. Hoc vt fiat , oportet ſit $\alpha v(m+p) = (n+p-1)v$, inde colligitur $\alpha = \frac{n+p-1}{m+p}$. Superior igitur aequatio determinato α abibit in ſequentem $a(\frac{n+p-1}{m+p})^p dv^p = t^n(dt + tdv)^{p-2} (ddt + 2dtdv + \frac{m-n+1}{m+p} tdv^2)$. Quae protinus ex propoſita eruta fuiſ-

fuiſſet, ſi poſuiſſem $x=c^{(n+p-1)v:(m+p)}$, et $y=c^v t$. Eſt autem $n+p-1$ numerus dimenſionum, quas y conſtituit; et $m+p$ quas x. Facile ergo in quouis caſu particulari α determinatur ſtatimque debita ſubſtitutio habebitur. In aequatione inuenta, cum abſit v, ponatur $dv=zdt$, erit $ddv=zddt+dzdt$, ſed $ddv=-\alpha dv^2=\frac{1-n-p}{m+p}z^2dt^2$. Hinc inuenitur $ddt=\frac{-dzdt}{z}+\frac{1-n-p}{m+p}zdt^2$. His ſubſtitutis emergit $a(\frac{n+p-1}{m+p})^p z^p dt^p=t^n(dt+tzdt)^{p-2}(\frac{1-n-p}{m+p}zdt^2-\frac{dzdt}{z}+2zdt^2+\frac{m-n+1}{m+p}tzzdt^2)$. Quae diuiſa per dt^{p-1} dabit $a(\frac{n+p-1}{m+p})^p z^p dt=t^n(1+tz)^{p-2}(\frac{1+2m-n+p}{m+p}zdt-\frac{dz}{z}+\frac{m-n+1}{m+p}tz^2dt)$.

9. Reducta ergo eſt aequatio generalis propoſita $ax^m dx^p=y^n dy^{p-2}ddy$ ad hanc differentialem primi gradus $a(\frac{n+p-1}{m+p})^p z^{p+1} dt=tz^n(1+z)^{p-2}(\frac{1+2m-n+p}{m+p}z^2dt+\frac{m-n+1}{m+p}tz^3dt-dz)$, multiplicata aequatione inuenta per z. Haec aequatio vnico actu ex ea inueniri poteſt, poſito in prima ſubſtitutione loco v hoc $\int zdt$. Fieri ergo debet $x=c^{(n+p-1)\int zdt:(m+p)}$ et loco y poni debet $c^{\int zdt}t$ ſiue quod eodem redit, ponatur $x=c^{(n+p-1)\int zdt}$ et $y=c^{(m+p)\int zdt}t$. Si ex aequatione differentiali inuenta iterum propoſita differentialis ſecundi gradus inueniri debeat, videamus quales loco z et t ſubſtitutiones adhiberi debeant. Cum ſit $x=c^{(n+p-1)\int zdt}$ erit $t^{\int zdt}=x^{1:(n+p-1)}$: quare $y=x^{(m+p):(n+p-1)}t$. Vnde habetur $t=yx^{-(m+p):(n+p-1)}$. Deinde quia $c^{\int zdt}=x^{1:(n+p-1)}$ erit $\int zdt=\frac{1}{n+p-1}lx$; ergo $zdt=\frac{dx}{(n+p-1)x}$. Sed eſt $dt=x^{-(m+p):(n+p-1)}dy-\frac{(m+p)}{n+p-1}yx^{-(m-n-2p+1):(n+p-1)}dx$. Conſequenter inuenietur

$z=$

eadem manet. Possent adhuc addi $ex^r y^{-n-1} dx^q dy^{2-q}$ et huiusmodi quotquot libuerit; prout exempla particularia, ad quae reducenda generalis accommodari debet, pluribus paucioribusue constant terminis. Tres vero terminos, vt dixi, assumsisse sufficit: cum plures alium reducendi modum non requirant.

12. Aequationem propositam reduco substituendis loco z, c^v et loco y, $c^v t$. Cum igitur sit $x = c^v$ et $y = c^v t$; erit $dx = c^v dv$ et $dy = c^v(dt + tdv)$: porroque $ddx = c^v(ddv + dv^2)$ et $ddy = c^v(ddt + 2dtdv + tdv^2 + tddv)$. Quia vero dx ponitur constans, erit $ddx = 0$, hinc igitur $ddv = -dv^2$, hanc ob rem habebitur $ddy = c^v(ddt + 2dtdv)$. Ponantur hi valores in aequatione loco $x, y, dx. dy$ et ddy, transformabitur ea in sequentem: $ac^v t^{-m-1} dv^p (dt + tdv)^{2-p} + bc^v t^{-n-1} dv^q (dt + tdv)^{2-q} = c^v (ddt + 2dtdv)$. Quae diuisa per c^v abibit in hanc $at^{-m-1} dv^p (dt + tdv)^{2-p} + bt^{-n-1} dv^q (dt + tdv)^{2-q} = ddt + 2dtdv$. In hac cum desit v pono $dv = zdt$ erit $ddv = zddt + dzdt$, sed $ddv = -dv^2 = -z^2 dt^2$ ergo $ddt = -zdt^2 - \frac{dzdt}{z}$. Hinc ista obtinebitur aequatio, $at^{-m-1} z^p dt^p (dt + ztdt)^{2-p} + bt^{-n-1} z^q dt^q (dt + ztdt)^{2-q} = zdt^2 - \frac{dzdt}{z} + 2zdt^2$ seu haec ordinatior $at^{-m-r} z^p dt (1 + zt)^{2-p} + bt^{-n-1} z^q dt (1 + zt)^{2-q} = zdt - \frac{dz}{z}$.

13. Aequatio haec differentialis primi gradus vnico actu ex proposita elici potuisset, si statim positum esset $x = c^{\int zdt}$ et $y = c^{\int zdt} t$; vnde foret $dx = c^{\int zdt} zdt$ et $dy = c^{\int zdt}(dt + tzdt)$; atque $ddx = c^{\int zdt}(zddt + dzdt + zzdt^2) = 0$. quare $ddt = -zdt^2 - dzdt : z$. Hoc in vsum vocato habebitur $ddy = c^{\int zdt}(zdt^2 - dzdt : z)$. Propositum sit hoc exemplum $y^{\alpha+1} ddy = x^\alpha dx^2$, mutetur id in $ddy = x^\alpha y^{-\alpha-1} dx^2$. Collato hoc cum gene-

$z = dx : [(n+p-1)\, x^{-(m-n+1):(n+p-1)}\, dy - (m+p)\, y\, x^{-(m+p):(n+p-1)} dx]$. Perſpicuum autem eſt, ſi z in t vel t in z detur etiam relationem, quam x et y inter ſe habeant, inveniri poſſe.

10. Illuſtremus haec, quae generaliter inventa ſunt exemplo quodam particulari. Sit $xdxdy = yddy$, quae reducitur diuidendo per dy, ad ad hanc $xdx = ydy^{-1} ddy$. Huic generali accommodata, habebitur $a=1, m=1, p=1, n=1$. Subſtitutis his in aequatione differentiali primi gradus, habebitur ea, ad quam propoſita reducitur, $\frac{1}{2} zdt = t (1+tz)^{-1} (\frac{3}{3} z^2 dt + \frac{1}{2} tz^3 dt - dz)$, quae abit in $z^2 dt + tz^3 dt = 3tz^2 dt + t^2 z^3 dt - 2tdz$. Ad hanc aequationem propoſita $xdxdy = yddy$ reducitur, ſi fiat $x = c^{\int zdt}$ et $y = c^{2\int zdt}\, t$. Conſtructio ergo aequationis propoſitae pendet a conſtructione aequationis differentialis inuentae; haec ſi conſtrui poterit, et ea conſtruetur; ſi fuerit reipſa integrabilis, ea quoque integrari poterit.

11. Secundum genus aequationum differentio-differentialium, quas mea methodo ad differentiales primi gradus reducere poſſum, eas complectitur, quae in ſingulis terminis eundem dimenſionum, quas indeterminatae earumque differentialia conſtituunt, numerum tenent. Aequatio generalis huc pertinens eſt ſequens $ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} = ddy$. In huius ſingulis terminis eſt vnica dimenſio indeterminatarum: poniturque dx conſtans. Etſi vero aequatio haec aſſumta tribus tantum conſtat terminis: tamen quodcunque libuerit inſuper adiici poſſunt, operatio enim

earali aequatione fiet $a=1$, $b=o, m=\alpha, p=2$. Si ergo hoc exemplum, vt generalis formula, reducatur, haec inuenietur aequatio $t^{-\alpha-1}z^2dt = zdt-dz:z$. Siue haec $t^{-\alpha-1}z^3dt=z^2dt-dz$. Quae ſi conſtructionem admitteret, et differentialis ſecundi gradus ex ea conſtrui poſſet. Notandum eſt, ſemper fere ad eiusmodi aequationes differentiales perueniri, quae admodum difficulter vel prorſus non conſtrui queant.

14. Aſſumo aliud exemplum, $xdxdy-ydx^2=y^2ddy$, quod ad modum generalis aequationis hanc induit formam $xy^{-2}dxdy-y^{-1}dx^2=ddy$. Reducatur huc generalis aequatio, et erit $\alpha=1$, $m=1$, $p=1$, $b=-1$, $n=o$, $q=2$. Reſpondet ergo exemplo propoſito ſequens aequatio differentialis $t^{-2}zdt(1+zt)-t^{-1}z^2dt=zdt-dz:z$. Multiplicetur haec per t^2z, habebitur $z^2dt+z^3tdt-z^3tdt=z^2t^2dt-t^2dz$ ſiue $z^2dt=zt^2dt^2-t^2dz$, quae ſeparata dat $dz:z^2=dt(t^2-1):tt$ et integrata hanc $-1:z=t+1:t-a$ ſiue $atz-t=t^2z+z$. Eſt vero $z=dv:dt$. Itaque $atdv-tdt=t^2dv+dv$. ſeu $dv=tdt:(at-tt-11)$. Quia vero $c^v=x$ erit $v=lx$ et $t=y:x$ ergo $dv=dx:x$ et $dt=(xdy-ydx):xx$ conſequenter $ydy+xdx=aydx$. Haec aequatio iterum integrari poteſt, cum vero tantum noto caſum, quod ſi $a=o$ ea tranſeat in aequationem circuli.

15. Accipio nunc caſum, quo plures, quam in generali aequatione, ſint termini $yydx^3+xxdy^3$ $yxdxdy^2-yxdx^2dy+yx^2dxddy-y^2xdxddy=o$. Hoc exemplum modo ſupra expoſito reducere licebit. Cum dx ponatur conſtans, maneant eaedem ſubſtitutiones ſcilicet, $x=c^v$. $y=c^vt$; $dx=c^vdv$; $dy=c^v$

(dt

$(dt + tdv)$ et $ddy = c^v(ddt + 2dtdv)$. Est vero $ddv = -dv^2$. His substitutis atque aequatione proueniente ordinata, inuenitur $dt^3 + 2tdt^2dv - ttdtdv^2 + tdtdv^2 + tdvddt - ttdvddt = 0$. Hic cum desit v, ponatur $dv = zdt$, erit vt ante $ddt = -zdt^2 - dzdt:z$. Exinde reperitur haec aequatio in ordinem reducta, $dt + 2tzdt - tdz + ttdz = 0$. Quae, cum z vnicam tantum habeat dimensionem separari potest methodo a Cel. Ioh. Bernoulli in Actis Lips. tradita. Sed sine vlla substitutione eam eique similes quascunque statim integrare seu ad integralem formam solum reducere possum, sequenti modo.

16. Reducatur aequatio nostra ad hanc $dz + \frac{2zdt}{t-1} + \frac{dt}{tt-t} = 0$, vt dz nullo affectum sit coefficiente tum sumatur id, quo z est affectum, nempe $\frac{2dt}{t-1}$ cuius integrale exprimatur per $2\int\frac{dt}{t-1}$. Iam aequatio proposita multiplicetur per $c^{2\int\frac{dt}{t-1}}$ et habebitur $c^{2\int\frac{dt}{t-1}}dz + 2c^{2\int\frac{dt}{t-1}}\frac{zdt}{t-1} + c^{2\int\frac{dt}{t-1}}\frac{dt}{tt-t} = 0$. Nunc autem aequatio integrabilis est facta, duorum enim priorum terminorum integrale est $c^{2\int\frac{dt}{t-1}}z$. Est igitur $c^{2\int\frac{dt}{t-1}}z + \int c^{2\int\frac{dt}{t-1}}\frac{dt}{tt-t} = a$. Sed cum sit $\int\frac{dt}{t-1} = l(t-1)$ erit $c^{2\int\frac{dt}{t-1}} = (t-1)^2$. Ergo $(t-1)^2z + \int\frac{(t-1)dt}{t} = a$, hincque $(t-1)^2z + t - lt = a$. Hoc modo omnes aequationes differentiales in quibus alterutra variabilis vna plures dimensiones nusquam habet, integrari seu fal-

ſaltem conſtruibiles redduntur. Hac de induſtria methodo ſum vſus, quo magis intelligatur quanti ſint vſus exponentialia in tractandis aequationibus.

17. Aequatio ad quam eſt peruentum haec eſt $(t-1)^2 z + t - lt = a$. Haec vlterius reducatur, vt tandem aequatio inter x et y rurſus obtineatur: quoniam erat $dv = zdt$ erit $z = dv : dt$: quamobrem aequatio abibit in $(t-1)^2 dv + tdt - dtlt = adt$ haec vero in $dv = \frac{adt - tdt + dtlt}{(t-1)^2}$. Quae denuo integrationem admittit; integrata vero hanc habet formam $v = \frac{-a + t - tlt}{t-1}$ conſtante vero addita hanc $v = \frac{b - a + t - bt - tlt}{t-1}$. Quia vero eſt $x = c^v$; erit $v = lx$. Et cum ſit $y = c^v t$ erit $y = tx$ et ideo $t = y : x$. His ſubſtitutis habebitur ſequens aequatio $lx = \frac{bx - ax + y - by - yly + ylx}{y-x}$. Vnde oritur haec $(b-a)x + (1-b)y = yly - xlx$. Ponatur breuitatis cauſa $b - a = f$, et $1 - b = g$; erit $fx + gy = yly - xlx$. Quae eſt integralis aequatio propoſitae §. 15. Si fiat $f = 0$, et $g = 0$, erit $yly = xlx$. Ex qua ſumendis numeris reperitur haec $y^y = x^x$.

18. Tertium genus aequationum quarum hic reducendarum methodum trado, eas complectitur, in quarum ſingulis terminis alterutra indeterminata eundem tenet dimenſionum numerum. Hic duo diſtinguendi ſunt caſus, prout vel ipſius illius variabilis vbique eundem dimenſionum habentis differentiale conſtans ponitur vel ſecus. Ad primum caſum ſpectat ſequens aequatio vniuerſalis $Px^m dy^{m+2} + Qx^{m-b} dx^b dy^{m+2-b} = dx^m ddy$. In qua x in ſingulis terminis m habet dimenſiones, et dx ponitur conſtans. Significant autem P et Q functiones quaſcunque

que ipſius y. Ad hanc reducendam vnica ſubſtitutione opus eſt: nempe fiat $x = c^v$ erit $dx = c^v dv$ et $ddx = c^v(ddv + dv^2) = 0$. ergo $ddv = -dv^2$. His ſubrogatis habetur $Pdy^{m+2} + Qdv^b dy^{m+2-b} = dv^m ddy$. Poſtquam nimirum diuiſa eſt per c^{mv}.

19. Cum in aequatione inuenta v non deprehendatur reducetur ſubſtituendo loco dv, zdy. Erit $ddv = zddy + dydz = -dv^2 = -z^2dy^2$. Hinc inuenietur $ddy = -zdy^2 - dydz:z$. ſubſtituantur ergo in aequatione inuenta loco dv et ddy hi valores reperti et habebitur haec aequatio $Pdy^{m+2} + Qz^b dy^{m+2} = -z^{m+1} dy^{m+2} - z^{m-1} dy^{m+1} dz$. Quae diuiſa per dy^{m+1} abit in hanc $Pdy + Qz^b dy = -z^{m+1} dy - z^{m-1} dz$. Quae eſt primi gradus, vt erat propoſitum. Ad hanc ſtatim perueniri potuiſſet, ſi poſitum eſſet $x = c^{\int zdy}$. Vnde foret $dx = c^{\int zdy} zdy$ et $ddx = c^{\int zdy}(zdy^2 + dzdy + zddy) = 0$ et hinc $ddy = -zdy^2 - dzdy:z$. Hi valores loco x, dx, ddy ſubſtituti ſtatim inuentam aequationem praebent.

20. Alter caſus aequationum ad genus tertium pertinentium reſpicit ſequentem generalem aequationem. $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-b} dx^b dy^{m-b+1} = dx^{m-1} ddx$. In qua aequatione dy ponitur conſtans, P et Q deſignant functiones ipſius y quaſcunque. Et vt perſpicuum eſt x in ſingulis terminis m tenet dimenſiones. Ponatur, vt ante, $x = c^v$; erit $dx = c^v dv$, et $ddx = c^v(ddv + dv^2)$. Hiſce in aequatione ſubſtitutis, reſultat haec aequatio diuiſione facta per c^{mv}, $Pdy^{m+1} + Qdv^b dy^{m-b+1} = dv^{m+1} + dv^{m-1} ddv$. Haec aequatio, vt vlterius reducatur, cum v deſit, ponatur $dv = zdy$

erit

erit ob dy constans $ddv = dzdy$. Hanc ob rem aequatio vltima transmutabitur in $Pdy^{m+1} + Qz^h dy^{m+1} = z^{m+1} dy^{m+1} + z^{m-1} dy^m dz$. Haec autem, si diuidatur per dy^m, dabit istam $Pdy + Qz^h dy = z^{m+1} dy + z^{m-1} dz$. Pendet ergo constructio propositae aequationis a constructione huius inuentae.

21. Ex hisce, arbitror, intelligitur, quomodo aequationes differentiales secundi gradus ad vnum aliquod trium expositorum genus pertinentes tractari oporteat. Facile quidem concedo raro admodum ad tales aequationes perueniri, in quibus non alterutra indeterminata desit; Tamen a nemine hoc nomine vtilitatem huius inuenti impugnatum iri puto. Fieri potest, vt nouus aliquis campus aperiatur problemata suggerens quorum resolutio ad aequationes tales deducat. Memini me aliquando physicum problema quoddam resoluentem ad hanc peruenisse aequationem $y^2 ddy = xdxdy$. Qua tum temporis neque a me neque ab aliis, cum quibus communicaueram, vllo modo reduci potuerat. Nunc vero, cum et ad primum et ad secundum genus pertineat, reductio facile successit vt ex §. 10 videre licet.

22. Hoc vero praeterea de assumenda constante monendum duxi: In aequationibus ad secundum genus relatis nihil interest, quodcunque differentiale constans sit assumtum. Potest id esse vel differentiale alterutrius variabilis, vel aliud differentiale ex vtriusque variabilis differentialibus vt libet compositum, modo id sit, vt natura rei exigit, homogeneum

neum. Illud quidem in generali exemplo locum obtinuit; sed ex illa operatione simul intelligitur, quomodo, si differentiale constans sit qualecunque, aequationes tractari oporteat. Aliter res se habet in duobus reliquis generibus primo et tertio; ibi enim necesse est, vt alterutrius variabilis differentiale constans sit positum. Id sinon fuerit methodo exposita reductio non succedit. Hic vero in casibus constans debet immutari, et aequatio in aliam transformari, in quâ alterutrius variabilis differentiale sit constans.

23. Methodus in hac dissertatione exposita aequationes differentiales secundi gradus ad simpliciter differentiales reducendi consistit in idonea substitutione quantitatum exponentialium pro indeterminatis. Ea vero adhuc latius patet, quam hic est expositum. Possunt eius beneficio infinitae aequationes differentiales tertii ordinis ad alias, quae sint tantum secundi ordinis reduci. Et generaliter aequationes differentiales ordinis n. ad alias reducentur, quae sint ordinis tantum $n-1$. Aequationum vero cuiusque ordinis differentialium, quae hac methodo reducuntur, quoque sunt tria genera constituenda, eademque, quae hic sunt exposita. Ex his igitur etiam intelligitur, quantum huiusmodi substitutiones in aequationibus differentialibus primi gradus tractandis vsum habere possint. Sed de his non opus est plura exponere.