1732

De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente

Leonhard Euler

DE LINEA BREVISSIMA

IN SVPERFICIE QVACVNQVE DVO QVAELIBET PVNCTA IVNGENTE.

Auctore

Leonh. Eulero.

I.

M. Nov. 1728. Tab. VI. CVIQVE notum eſt, et a multis tanquam axioma ponitur, lineam ſeu viam breviſſimam a dato puncto ad aliud quodcunque eſſe lineam rectam. Ex hoc facile intelligitur, in ſuperficie plana lineam breuiſſimam duo quaelibet puncta iungentem eſſe rectam, quae ab altero ad alterum ducitur. In ſuperficie ſphaerica, in qua linea recta duci non poteſt, ſtatuitur a Geometris viam breuiſſimam eſſe circulum maximum, qui data duo puncta coniungit.

2. Quae autem in ſuperficie quacunque ſiue conuexa, ſiue concaua, ſiue ex his mixta ſit via breviſſima, quae ex dato puncto ad aliud quodcunque ducitur, nondum eſt generaliter determinatum. Propoſuit mihi hanc quaeſtionem Cel. Ioh. Bernoulli, ſignificans ſe vniuerſalem inueniſſe aequationem, quae ad lineam breuiſſimam determinandam cuique ſuperficiei accommodari poſſit. Solui ego etiam hoc problema, ſolutionemque hac diſſertatione exponere volui.

3. Me-

3. Mechanice hoc problema facillime ſoluitur ope fili, quod per data duo puncta ductum tenditur, quantum fieri poteſt, hoc enim filum in ſuperficie propoſita deſignabit viam breuiſſimam. Neceſſe eſt autem, vt hoc filum vbique ſuperficiem tangat, quemadmodum ſi ſuperficies conuexa ſit, in ſuperficiebus quidem concauis non arcum curuae ſed chordam repraeſentabit. Hoc igitur in caſu filum ita applicari debet, vel applicatum concipi, vt ſemper ſuperficiem in parte conuexa tangat.

4. Hac vero conſtructione geometra contentus eſſe non poteſt, qui naturam huius lineae intimam perſpicere deſiderat, eamque, vt fieri ſolet, aequatione exponere. In mechanica autem conſtructione linea quaeſita tantum aſpectui exponitur, neque ex hoc natura eius poteſt perſpici. Propterea hic methodum ſum traditurus, qua pro omnibus ſuperficiebus, dummodo aequationibus exprimi posſunt, linea breuiſſima determinari poteſt.

5. Ad hoc igitur opus eſt, vt ſuperficierum naturae aequationibus includantur; quo tota operatio analytice poſſit abſolui. Solent lineae curuae in eodem plano ſitae exprimi aequationibus inter duas coordinatas, ex quibus cuiusque puncti ſitus ſecundum longitudinem et latitudinem definitur. In ſuperficiebus autem tres conſiderandae ſunt poſitionum relationes, cum puncti cuiuslibet in ſuperficie locus ſecundum tres dimenſiones debeat eſſe determinatus. Tribus igitur in aequationibus ſuperficierum vti conuenit variabilibus; quarum vna locum

pun-

puncti ſecundum longitudinem, altera ſecundum latitudinem et tertia ſecundum altitudinem determinat.

Fig. 1. 6. Concipiatur planum, quod in figura congruit cum plano chartae, et quod horizontale appellabimus, in eoque recta pro lubitu ducta AP, quae tanquam axis erit conſideranda. Sit nunc M punctum cuiuspiam ſuperficiei extra hoc planum ſitum, demittatur ex eo in planum horizontale perpendiculum MQ plano in Q occurrens, et ex Q in lineam ſeu axem AP ducatur perpendicularis QP. Perſpicuum nunc eſt datis tribus lineis AP, PQ, et QM quantitate, ſitum puncti M fore determinatum.

7. Hae igitur tres lineae AP, PQ et QM nobis erunt indeterminatae, ex quibus cum conſtantibus aequatio pro ſuperficie punctis M terminata conficitur. Vocabimus AP, t PQ, x, et QM, y, atque pro qualibet ſuperficie, de qua quidquam quaeritur, oportet aequationem inter has indeterminatas inueſtigare. Simili deinceps modo ex huiusmodi aequationibus proprietates eruentur, quo ex aequationibus curuarum earum proprietates deriuantur. Vti ſi ſuperficies fuerit ſphaerica, cuius centrum in A et radius $=a$, erit aequatio eius naturam continens $aa=tt+xx+yy$.

8. Quemadmodum porro in linea curua certum punctum definitur vel determinato valore alterutri indeterminatae aſſignando, vel alia quadam aequatione cum aequatione locali coniungenda. Sic in ſuperficiebus, ſi quaedam trium indeterminatarum deter-

terminatur, vel alia aequatio cum aequatione superficiem definiente coniungitur; habebitur aequatio pro linea quadam in ea superficie sita, quae formatur intersectione datae superficiei et alius noua aequatione expressae. Punctum denique fixum in superficie constituetur, vel duabus indeterminatis determinandis, vel duabus nouis aequationibus adiungendis.

9. Quamobrem ad lineam breuissimaem in superficie quacunque, cuius cognita est aequatio, ducendam aliam aequationem inuestigabo, quae cum illa iuncta definit in superficie ea lineam breuissimam quaesitam. Ex his deinde duabus aequationibus omnia, quae ad situm lineae breuissimae cognoscendum pertinent, elici poterunt. Proiectio scilicet in plano horizontali definietur aequatione, quae ex illis duabus prodit exterminata y. Proiectio in plano verticali horizontale in AP secantehabetur exterminanda x. Et proiectio in plano verticali et perpendiculari ad AP habetur eliminanda littera t.

10. Ad soluendum nunc hoc problema vti oportet *methodo maximorum et minimorum* prout ipsa quaestio postulat. Quaeritur autem in superficie data inter omnes lineas eosdem terminos habentes ea, quae est minima. Proprietas haec minimi non solum in integram lineam quaesitam competet, sed etiam in singulas eius particulas; ita vt duo elementa eius contigua designent intra suos terminos viam breuissimam. Ex hoc igitur facilior nascitur modus ad aequationem perueniendi.

11. Ad determinandam nunc poſitionem duorum elementorum viam intra ſuos terminos breuiſſimam conſtituentium ſequens praemitto lemma. Sint duo puncta fixa I et H et curua inter ea extenſa I K. Quaerendum eſt in ea punctum M tale, vt

Fig. 2.

via (ductis rectis GM et MH) GM+MH ſit omnium, quae per alia puncta curuae IK duci poſſunt, minima. Notum eſt ex *methodo maximorum et minimorum* poni oportere, ſumto *m* puncto proximo ipſi M, GM+MH=G*m*+*m*H, ex hacque aequatione inueniri locum puncti M, per quod tranſiens via GM+MH eſt minima.

12. Demiſſis ex punctis G, H, M, et *m* ad planum horizontale perpendiculis GE, HE, MP et *mp*, producatur *p*P in C eique iungatur normalis AC in plano eodem horizontali ſita, quae tanquam axis conſideretur; ad hancque ducantur perpendiculares EB et FD. Ponamus BC et CD eſſe aequales, tales enim in ſequentibus aſſumere licebit. Sint BC=CD=a; BE=b; EG=c; DF=f; FH=g. Sit porro CP=x et PM=y, quae ſunt coordinatae curvae IK. Erit igitur Cp=$x+dx$ et pm=$y+dy$.

13. Ex his inuenietur GM=$\sqrt{[a^2+(x-b)^2+(y-c)^2]}$: eſt enim GM^2=(PM-GE)^2+(CP-BE)^2+BC^2. Similiter habebitur HM=$\sqrt{[a^2+(f-x)^2+(g-y)^2]}$ Tota igitur via GM+MH erit = $\sqrt{[a^2+(x-b)^2+(y-c)^2]}+\sqrt{[a^2+(f-x)^2+(g-y)^2]}$, quae ergo quantitas debet naturam minimi habere. Variabiles eius quantitates ſunt x et y, a quibus punctum M quaeſitum pendet. Differentietur igitur iſta quantitas exprimens

mens GM+MH, et, quod prouenit, ponatur $=0$. Orieturque haec aequatio, $\frac{(x-b)\,dx+(y-c)\,dy}{\sqrt{[a^2+(x-b)^2+(y-c)^2]}}$ $=\frac{(f-x)dx+(g-y)dy}{\sqrt{[a^2+(f-x)^2+(g-y)^2]}}$. Ex qua locus puncti M determinabitur.

14. Quia curua IK ponitur data, dabitur aequatio inter eius coordinatas x et y: Opus autem est tantum aequatione differentiali, propterea ponamus relationem elementorum dx et dy dari hac aequatione $Pdx=Qdy$, seu $dx:dy=Q:P$. Positis nunc his valoribus proportionalibus loco dx et dy, prodibit aequatio $\frac{(x-b)Q+(y-c)P}{\sqrt{(a^2+(x-b)^2+(y-c)^2)}}=\frac{(f-x)Q+(g-y)P}{\sqrt{(a^2+(f-x)^2+(g-y)^2)}}$ quae vacua est a differentialibus quantitatibus.

15. Consideremus iam lineas GM et MH tanquam duo elementa lineae breuissimae in superficie, in qua sumta sunt puncta G et H et curua IK, ducendae. Ponamus $AC=t$, suntque iam factae $CP=x$ et $PM=y$. Erit $BC=CD=a=dt$; $DF=f=x+dx$; $FH=g=y+dy$; $BE=b=x-dx+ddx$; $EG=c=y-dy+ddy$. Substituantur hi valores pro a, b, c, f et g in aequatione supra inuenta, orietur aequatio haec $\frac{Q(dx-ddx)+P(dy-ddy)}{\sqrt{(dt^2+(dx-ddx)^2+(dy-ddy)^2)}}=\frac{Qdx+Pdy}{\sqrt{(dt^2+dx^2+dy^2)}}$

16. Aequatio haec aliud non significat, nisi quod differentiale huius quantitatis $\frac{Qdx+Pdy}{\sqrt{(dt^2+dx^2+dy^2)}}$ aequale sit faciendum nihilo, positis P, Q et dt constantibus (dt quidem re ipsa constans ponitur.) Habebitur ergo ex hac differentiatione aequatio haec $(Qddx+Pddy)\sqrt{(dt^2+dx^2+dy^2)}=(Qdx+Pdy)$

 $(dxddx$

$(dx\,ddx + dy\,ddy) : \sqrt{(dt^2 + dx^2 + dy^2)}$. Quae in ordinem reducta abit in hanc $\frac{Q\,ddx + P\,ddy}{Q\,dx + P\,dy} = \frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$.

17. Introducamus nunc etiam in calculum naturam ſuperficiei; quae aequatione inter tres coordinatas t, x et y commodiſſime exprimitur. Quia vero hic tantum vtimur aequatione differentiali, ſit ea $Pdx = Qdy + Rdt$. Ex hac elici debet aequatio pro curua IK, quippe quae in ſuperficie propoſita eſt ſita. Aequatio autem pro ea inuenitur ſi in aequatione ſuperficiei t ponitur aequalis conſtanti AC, i. e. Si ſit $dt = 0$. Proueniet itaque pro curua IK aequatio $Pdx = Qdy$, eadem, quae ſupra erat aſſumta. Propterea autem aequationem $Pdx = Qdy + Rdt$ aſſumſimus, vt ex ea altera reſultaret, atque ne nouis ſubſtitutionibus opus eſſet.

18. Ex his ergo duabus aequationibus in duabus praecedentibus paragr: datis, quarum altera eſt pro ſuperficie propoſita, altera ex natura minimi deducta, inueniri poterit linea breuiſſima in ſuperficie ducenda. Ad hoc coniungi debent duae illae aequationes ex iisque noua confici, quae tantum duas indeterminatas inuoluit. Haecque noua aequatio determinabit proiectionem quampiam lineae breuiſſimae in aliquo plano, quod ex coordinatis binis remanentibus cognoſcetur. Linea itaque breuiſſima quaeſita elicienda eſt ex his duabus aequationibus $Pdx = Qdy + Rdt$, et $\frac{Q\,ddx + P\,ddy}{Q\,dx + P\,dy} = \frac{dx\,dd + dy\,ddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$.

19. Generalem hanc ſolutionem ad tria praecipua formarum ſuperficierum genera accommodabimus

bimus: quae ſunt cylindrica, conica et rotunda ſeu tornata. Ad genus cylindricum non tantum refero cylindros communes baſes circulares habentes, ſed omnia corpora, quorum ſectiones ad axem perpendiculares ſunt inter ſe aequales et ſimiles. Huiusmodi cylinder ſit BHCFGD, cuius axis eſt linea AE. Fig. 3. In hoc ſi ponatur abſciſſa in axe $AQ = t$, huicque perpendicularis quaecunque in plano horizontali BCFD ſumta $QP = x$ et verticalis PM ad ſuperficiem pertingens $= y$. Oportet vt cuicunque conſtanti aequali facta t ſemper eadem prodeat aequatio inter x et y.

20. Aequatio igitur pro huiusmodi ſuperficiebus erit $Pdx = Qdy$, in qua P et Q non inuoluunt litteram t. Si enim vel adeſſet tertius terminus Rdt vel P et Q a t penderent aequationes pro variis ſectionibus ad axem perpendicularibus variae prodirent, quod eſſet contra naturam corporum cylindricorum. Eadem igitur aequatio $Pdx = Qdy$ exprimet naturam baſis BHC. Facta enim in baſi hac $AP = x$ et $PM = y$, aequatio pro hac baſi erit etiam $Pdx = Qdy$. Pro cylindris igitur communibus, in quibus BHC eſt circulus, ſi A fuerit eius centrum erit $xdx = -ydy$.

21. Ad lineam nunc breuiſſimam in ſuperficiebus cylindricis determinandam loco aequationis generalis $Pdx = Qdy + Rdt$ hac vti debemus $Pdx = Qdy$, ſeu $P:Q = dy:dx$. His igitur proportionalibus loco P et Q in aequatione $\frac{Qddx +}{Qdx +} \frac{Pddy}{Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$, ſubſtitutis prodibit haec $\frac{dxddx + dyddy}{dx^2 + dy^2} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$, quae integrata dat $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = m\sqrt{(dt^2 + dx^2 + dy^2)}$,

 cui

cui aequiualet haec $dx^2 + dy^2 = nndt^2$. Consequenter est $nt = \int\sqrt{(dx^2+dy^2)} + C$; seu t semper est proportionalis arcui in respondente sectione transuersa a linea breuissima abscissi, constante quapiam aucti vel minuti.

22. Sumamus loco aequationis $dx^2 + dy^2 = n^2dt^2$ hanc $dx^2 + dy^2 + dt^2 = n^2dt^2$, licet enim pro n numerum quemlibet substituere, erit $nt = \int\sqrt{(dx^2+dy^2+dt^2)}$. Ex quo intelligitur longitudinem lineae breuissimae esse vbique, vt respondentem abscissam in axe t. Ex superiore aequatione autem $nt = \int\sqrt{(dx^2+dy^2)} +$ const. concluditur, si $n = o$ fore arcus in sectionibus transuersis a linea breuissima abscissos omnes aequales, et propterea lineam breuissimam esse rectam in superficie ductam et axi parallelam. Porro est etiam $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)} +$ const. $= n\int\sqrt{(dx^2+dy^2+dt^2)}$; in qua si $n = 1$, erit linea breuissima ipse perimeter sectionis transuersae.

23. Sit, transuersa cylindri sectio circulus axisque per centrum transeat, erit $xdx = -ydy$ seu $xx + yy = aa$; cum hac coniungatur aequatio $nt + b = \int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ seu differentialis tantum $n^2dt^2 = dx^2 + dy^2$. Ex his aequationibus deriuetur noua y carens, quae proiectionem lineae breuissimae in plano horizontali determinabit. Prodibit autem $ndt = \frac{adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$ seu $nt = \int\frac{adx}{(\sqrt{aa-xx})}$. Quae dat hanc constructionem: sumta $AQ = t$ abscindatur in basi arcus $HM = nt$, eiusque sinus AP erit aequalis applicatae QP et punctum P in proiectione, quae igitur est linea sinuum.

24. Corpora conoidica hic mihi denotant solida

lida lineis rectis ex curuae cuiuslibet singulis punctis ad punctum fixum extra planum curuae assumtum ductis terminata. Haec in conos ordinarios abeunt si curuae illae fuerint sectiones conicae. Huiusmodi corpus conoidicum sit ACFDA, eius axis AQB, et planum horizontale ACD. Ponamus basem CBDE esse perpendicularem ad axem AB. Manifestum nunc est, omnes sectiones axi perpendiculares fore singulas similes, et proportionales quadratis distantiarum a vertice A. Vocentur vt ante AQ, t; QP, x et PM, y. Fig. 4.

25. Quia omnes sectiones transuersae sunt similes, aequatio inter t, x et y talis esse debet, vt auctis vel minutis duabus harum coordinatarum tertia eadem ratione augeatur vel minuatur. Siue si in aequatione ponatur loco t, x et y hae nt, nx, et ny, vt aequatio immutata persistat. Haec vero est proprietas aequationum homogenearum, in quibus t, x, et y vbique eundem dimensionum numerum constituunt. In his enim facta substitutione memorata in omnibus terminis n eandem habebit potestatem, et propterea ea diuisione tolli poterit, et aequatio prior prodibit.

26. Hanc ergo corpora conoidica habent proprietatem, vt aequatio eorum inter t, x et y facta sit homogenea, i. e. vt in singulis eius terminis idem sit dimensionum numerus ab indeterminatis t, x et y formatus. Si igitur ex hac aequatione quaeratur quid sit t, reperietur t aequalis functioni ex x et y compositae homogeneae et vnius dimensionis. Quamobrem $\frac{t}{x}$ aequabitur functioni ex x

et

y compositae etiam homogeneae et nullius dimensionis.

27. Vocetur haec functio F; erit $\frac{t}{x}=F$. Differentiale vero huius functionis F habebit hanc formam $Mdx+Ndy$. In qua litterae M et N hanc habebunt inter se relationem, vt sit $Mx+Ny=o$. Nam ponatur in functione F $y=qx$, mutabitur ea, quia est homogenea et nullius dimensionis, in aliam, in qua tantum littera q occurret, neque x neque y amplius in ea reperietur. Propterea eius differentiale habebit hanc formam Ldq. Est vero $Ldq=\frac{Ldy}{x}-\frac{Lydx}{xx}=Mdx+Ndy$. Erit igitur $M=-\frac{Ly}{xx}$ et $N=\frac{L}{x}$. Ex quo apparet fore $Mx+Ny=o$. Habetur ergo $N=-\frac{Mx}{y}$ vel $M=-\frac{Ny}{x}$.

28. Quia est $\frac{t}{x}=F$; erit $\frac{xdt-tdx}{xx}=dF=Mdx+Ndy=-\frac{Nydx}{x}+Ndy$. Ex hac prodibit ista aequatio $tdx-Nxydx=-Nxxdy+xdt$ quae comparata cum generali $Pdx=Qdy+Rdt$ dabit $P=t-Nxy$; $Q=-Nxx$; et $R=x$. Ex aequationibus vero duabus $tdx-Nxydx=-Nxxdy+xdt$ et $Mx+Ny=o$, inuenitur $N=\frac{xdt-tdx}{xxdy-xydx}$ et $M=\frac{yxdt-tydx}{xxydx-x^3dy}$. Erit igitur $P=\frac{txdy-xydt}{xdy-ydx}$ et $Q=\frac{yxdt-tydx}{xdy-ydx}$. Factis his substitutionibus in aequatione generali $\frac{Qddx+Pddy}{Qdx+Pdy}=\frac{dxddx+dyddy}{dt^2+dx^2+dy^2}$ inuenietur haec aequatio $\frac{yxdtddx-tydxddx-txdyddy+xydtddy}{yxdtdx-tydx^2+txdy^2-xydtdy}=\frac{dxddx+dyddy}{dt^2+dx^2+dy^2}$.

29. Ad hanc aequationem reducendam pono $tt+xx+yy=zz$, et $dt^2+dx^2+dy^2=ds^2$; erit

xdx

$xdx + ydy = zdz - tdt$, et $dx^2 + dy^2 = ds^2 - dt^2$. Porro $dxddx + dyddy = dsdds$, et $yddy + xddx = zddz + dz^2 - ds^2$. Ope horum valorum peruenitur ad hanc aequationem $\frac{zdtddz + dtdz^2 - dtds^2 - tdsdds}{zdzdt - tds^2} = \frac{dds}{ds}$. Ex hac erit $\frac{zdsddz + dz^2 ds - zdzdds}{ds^2} = ds$. Quae integrata dat $\frac{zdz}{ds} = s$ haecque iterum integrata hanc $ss = zz + C = tt + xx + yy + C$. Erit igitur longitudo lineae breuissimae $s = \surd(tt + xx + yy + C)$. Et ex hac proprietate in quolibet casu particulari determinabitur linea breuissima quaesita. Pro cono recto, in quo omnes sectiones transuersae sunt circuli, est $yy + xx = nntt$. Erit ergo $s = \surd[(nn + 1)tt + C]$.

30. Haec quae hactenus de linea breuissima ducenda in superficiebus cylindricis tradidimus, alia methodo facilius inueniuntur ex ea horum corporum proprietate, quod eorum superficies euolutione in planas transmutentur. Quae igitur linea in his planis est breuissima, erit etiam in ipsis superficiebus cylindricis et conicis breuissima. Quare linea breuissima in huius modi superficiebus hanc habere debet proprietatem, vt superficiebus euolutis et in planas transmutatis linea breuissima transmutetur in rectam.

31. Haec vero methodus latius non patet, neque ad alias superficies, quae non possunt euolutione in planas mutari, potest accommodari. Pro talibus vero methodus hac dissertatione exposita aeque ac pro illis valet. Vtamur igitur hac methodo in superficiebus corporum rotundorum seu tornato-

rum, quae generantur circumrotatione cuiusque figurae circa axem immobilem; quemadmodum ſphaera generatur conuerſione ſemicirculi circa diametrum; conus rectus trianguli conuerſione circa alterutrum latus; cylinder rectus conuerſione parallelogrammi circa latus.

Fig. 5. 32. Sit huiusmodi corpus rotundum ABMC generatum conuerſione curuae AQC circa axem AQ. In eo ſit BMC ſectio transuerſa, quae erit circulus, cuius centrum in Q. Vocentur vt ante BQ, t; QP, x et PM, y. Aequatio inter has coordinatas hanc debebit habere proprietatem, vt poſito t conſtante ſeu $dt=o$, ea abeat in aequationem circuli $xx+yy=$ Conſt. ſeu $xdy=-ydy$. Quamobrem aequatio pro ſolidis rotundis eſt $xx+yy=\mathrm{T}$ vbi T denotat functionem quamcunque ipſius t et conſtantium. Haec igitur differentiata dat $xdx=-ydy+\mathrm{R}dt$, in qua R ſolis t et conſtantibus pendet.

33. Hac aequatione in generali §. 10 $\frac{Qddx+Pddy}{Qdx+Pdy}=\frac{dxddx+dyddy}{dt^2+dx^2+dy^2}$ ſubſtitutis orietur aequatio iſta $\frac{xddy-yddx}{xdy-ydx}=\frac{dxddx+dyddy}{dt^2+dx^2+dy^2}$. Cuius integralis aequatio eſt $l(xdy-ydx)=l\surd(dt^2+dx^2+dy^2)+la$, vel $xdy-ydx=a\surd(dt^2+dx^2+dy^2)$. Haec ſi coniungatur cum aequatione naturam ſuperficiei exprimente $xdx=-ydy+\mathrm{R}dt$ determinabit lineam breuiſſimam.

34. Litera a eſt arbitraria ſeu pendet a loco punctorum per quae linea breuiſſima tranſire debet. Si ponatur $a=o$; erit $xdy=ydx$ atque $y=nx$. Vnde cognoſcitur peripheriam curuae circa axem rotatae in

in quolibet ſitu repraeſentare lineam breuiſſimam inter ſuos terminos. Hic ergo caſus valet, ſi duo puncta inter quae linea breuiſſima duci debet, ſunt cum axe in eodem plano. Ex hisce apparet in ſphaera lineam breuiſſimam ſemper eſſe circulum maximum: quia ſphaera conuerſione circuli circa diametrum generatur, et ſibi vbique eſt aequalis et ſimilis.

35. Ad aequationem tractabiliorem efficiendam pono $xx+yy=zz$, et $dx^2+dy^2=ds^2$; erit $xdx+ydy=zdz$. Ex his apparet fore $zzds^2-zzdz^2=(xdy-ydx)^2$. Quare cum ſit $xdy-ydx=a\sqrt{(dt^2+dx^2+dy^2)}$, erit $z^2ds^2-zzdz^2=aadt^2+aads^2$ atque $ds=\sqrt{\left(\frac{zzdz^2-aadt^2}{zz-aa}\right)}$. Si vlterius ponatur elementum ipſius lineae breuiſſimae $=dv$, erit $dv=\sqrt{(ds^2+dt^2)}=z\sqrt{\left(\frac{dz^2+dt^2}{zz-aa}\right)}$. Etſi hic duae variabiles z et t occurrere videntur, tamen in quolibet caſu ex aequatione pro ſuperficie determinabitur t in z, et longitudo lineae breuiſſimae ſaltem per quadraturas cognoſcetur.

36. Haec ſunt tria praecipua corporum genera in quorum ſuperficiebus lineas breuiſſimas delineandi methodus hic fuſius eſt tradita. Habent hi caſus hanc prae aliis proprietatem, vt generalis aequatio ad hos accommodata reduci poſſit ad differentialem primi gradus. Ex his vero alii ſe produnt caſus ſimiliter integrationem admittentes. Vt pro corporibus cylindricis aequatio eſt $Pdx=Qdy$. In qua P et Q ab x et y pendere dicta ſunt. Perſpicuum autem eſt reductionem aeque ſuccedere, ſi P et Q et-

iam a t penderent, quo in casu aequatio non est amplius pro corporibus cylindricis. Simili modo in aequatione pro corporibus rotundis $xdx = ydy + Rdt$, R tantum a t pendet. Si igitur R etiam x et y in se comprehendat, aequatio erit pro nouo superficierum genere , et nihilominus reductionem admittit,

Proposuit mihi hanc quaestionem Cel. Ioh. Bernoulli, postquam ipsi hanc meam solutionem scripsissem, vt nimirum praeter tria exposita superficierum genera alia inuestigarem, quae etiam ad aequationes integrabiles perducant. Solutionem igitur huius quaestionis, quia tam facile ex antecedentibus fluit, hic adiungere volui.

NOVA METHODVS
INNVMERABILES AEQVATIONES DIFFERENTIALES SECVNDI GRADVS REDVCENDI AD AEQVATIONES DIFFERENTIALES PRIMI GRADVS.

Auctore

Leonh. Eulero.

I.

M. Sept. 1728. Qvando ad aequationes differentiales secundi vel altioris cuiuspiam gradus perueniunt analystae, in iis resoluendis duplici modo versantur. Primo inquirunt, an in promtu sit eas integrare : id si fuerit, obtinuerunt

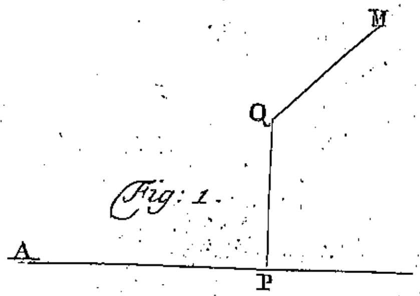

Fig: 1.

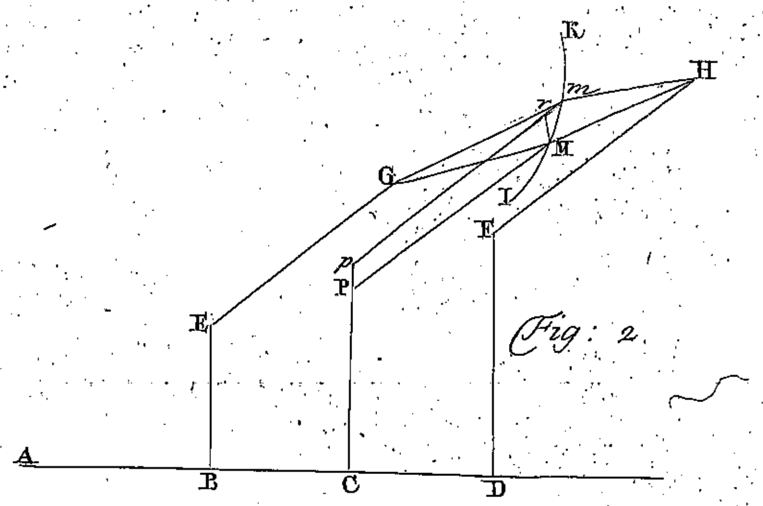

Fig: 2.

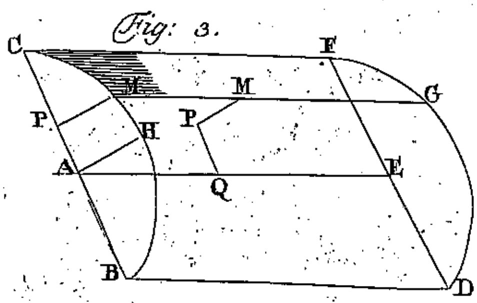

Fig: 3.

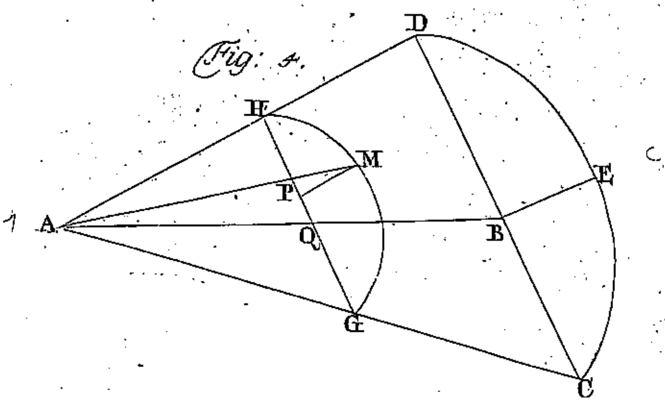

Fig: 4.

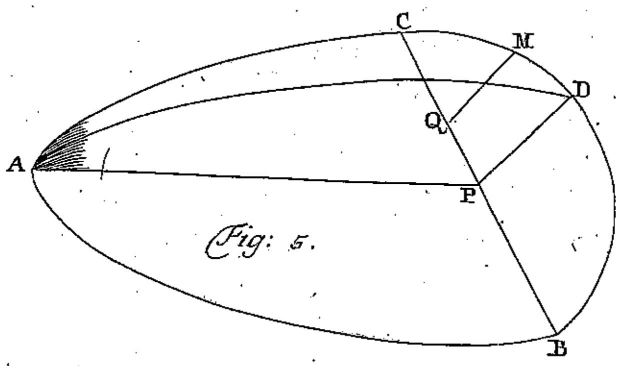

Fig: 5.