1732

Solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata

Leonhard Euler

SOLVTIO PROBLEMATIS

DE

Inuenienda curua, quam format lamina vtcunque elaſtica in ſingulis punctis a potentiis quibuscunque ſollicitata.

Auctore

Leonhardo Eulero.

M. Febr. 1728 Tab. IV.

CVrua, quam Cel. Iacobus Bernoulli primus et poſtea plures alii laminae elaſticae incuruatae aſſignarunt, quaeque nomine curuae elaſticae nota eſt, nonniſi laminae elaſticae grauitatis experti competere ex ſolutionibus eorum intelligitur. Curuatura autem laminae elaſticae grauis, tametſi haec ſola in rerum natura locum obtinere queat, tamen a nemine adhuc, quantum ſcio, determinata eſt. Incidimus nuper Clar. D. Bernoulli, et ego in hanc quaeſtionem, eamque non inelegantem exiſtimantes aggreſſi, atque ſolutiones eodem tempore et egregie inter ſe congruentes conſequuti ſumus. Cum vero ſolutio prima fronte non nihil difficilis inuentu viſa ſit ſolutionem meam hic quoque exponere non abs re fore arbitratus ſum. Quaeſtio quidem primum tantum ad hoc extendebatur, vt inueniatur curua,

quam

quam lamina elaſtica grauis vno termino firmata, alvero potentiam quamuis applicatam habens format. Nunc vero hanc rem generalius complectar laminam in ſingulis punctis vtcunque elaſticam, et praeter pondus appenſum qualescunque applicatas habentem poſiturus; Idque eapropter, tum, quod, etſi quis vnum vel alterum caſum particularem elicuerit, problema tamen hoc modo perceptum exinde non adeo facile ſoluatur; tum propter ſummam eius vniuerſalitatem: etenim non ſolum ad curuaturas laminarum quomodocunque elaſticarum extenditur. Verum etiam ad curuas corporum perfecte flexibilium et a potentiis quomodocunque ſollicitatorum accommodari poteſt; ita ut ex eo omnium corporum flexibilium curuaturae inueniri poſſint. Accedit praeterea, quod ſolutio problematis hoc ſenſu accepti vix prolixior euadat, quam in quouis caſu ſpeciali. Ante vero quam ipſum problema aggredi poſſum, neceſſe eſt nonnulla praemittere ſolutioni inſeruientia.

Hypotheſis.

I. Si duae virgae aB, BC in B e latere iunctae a potentia AD in ſitum ABC torqueantur, vt ang. ABa comprehendat. Erit momentum potentiae AD in B vt vis elaſtica in B et angulus ABa coniunctim. Hoc ſcilicet factum aequipollet facto ex potentia AD in AB. Aſſumitur vulgo haec hypotheſis; eius tamen veritas ſi angulus ABa eſt vehementer paruus ſatis probabiliter poteſt phyſice demonſtrari. Fig. I.

Lem-

Fig. 2. *Lemma* 1. Si curuae ANM in puncto quocunque N applicata sit potentia NO, eaque resoluatur in horizontalem NS et verticalem NR. Erit vis pot. NO ad curuam AM circa M rotandam seu eius momentum aequale NR.FP+NS.GQ. Ductis MQ, AP horizontalibus et AQ, PM verticalibus.

Demonstratio. Potentia NO aequiualet duabus NR et NS simul agentibus. Momentum vero potentiae NR in M est, vt ex principiis staticis constat, NR. PF; et momentum potentiae NS in M. est NS. GQ. Ergo cum ambae potentiae curuam AM versus eandem plagam conuertere conentur, erit momentum ambarum seu momentum potentiae NO=NR.FP+NS.GQ. Q.E.D.

Fig. 3. *Lemma* 2. Si curuae AM in singulis punctis N potentiae parallelae perpendiculares nimirum in AP, applicatae, fuerint determinatae a curua BG, ita vt in punctum N agat potentia, quae est vt QN. Construaturque alia curua AVT, cuius applicatae QV sint vt areae AQHB. Erit summa momentorum omnium potentiarum ad curuam ANB circa M flectendam vt area APT.

Demonstratio. Momentum potentiae QH in M est QH.QP. Puncto M assumatur proximum *m*. ductaque applicata *mp*; erit momentum potentiae QH in *m* aequale QH. Q*p*. Ergo differentia horum momentorum est QH.P*p*. Idem cum de singulis potentiis valeat, erit differentia omnium momentorum in M et in *m* agentium aequalis areae ABGP in P*p* seu PT.P*p*. i. e. elemento P*pt*T. Si iam ponatur summa omnium mo-

momentorum in $m=M+dM$, quarum differentia eſt dM; erit igitur $dM=PptT$, conſequenter M erit = areae APT. Q. E. D.

Dicantur iam abſciſſae in AP aſſumtae, x, et reſpondentes applicatae in curua AT, P. Deſignat autem P ſummam omnium potentiarum in x contentarum; ergo ſumma omnium momentorum in M $=\int Pdx$.

Problema Generale.

Sit lamina BMA vtcunque elaſtica et in ſingulis punctis a potentiis quibusuis ſollicitata, fixa autem ea ſit in B, atque in A duo pondera appenſa habens E et F, quorum E ſecundum verticalem AE, et alterum F ſecundum horizontalem AC trahit. Oportet determinare curuam AMB iuxta quam lamina hoc modo ſollicitata flectitur. Fig. 4.

Solutio. Sumatur horizontalis AC pro axe, in quo capiantur abſciſſae $AP=x$. Sit ei orthogonalis $PM=y$ et $AM=s$, cuius elementa conſtantia accipiantur. Ponatur radius curuedinis in $M=r$; erit angulus, quem duo elementa in M conſtituunt, reciproce vt r. Deſignetur vis elaſtica in M litera v; erit vis hunc angulum producens vt $\frac{v}{r}$. (hyp.) Huic ergo proportionalis eſſe debet ſumma omnium momentorum in M agentium tam ortorum a ſingulis potentiis curuae AP applicatis, quam a ponderibus E et F. Eſt autem momentum potentiae ſeu ponderis E in $M=E.AP=Ex$ (Lemma 1.) et ponderis F momentum eſt $=F.PM=Fy$ (cit.) Praeter haec ſollicitatur punctum M etiam a potentiis ſingulorum

pun-

punctorum arcus AM. Iis in verticales secundum AE et horizontales secundum AC agentes resolutis, vocetur summa omnium verticalium P, et horizontalium ab A in M vsque, Q. Erit summa momentorum potentiarum verticalium $=\int Pdx$ (Lem. 2.) et summa momentorum potentiarum horizontalium $=\int Qdy$. Erit itaque tota vis in M agens $=Ex+Fy+\int Pdx+\int Qdy$. Cui cum proportionalis esse debeat $\frac{v}{r}$, habebitur haec aequatio $\frac{Av}{r}=Ex+Fy+\int Pdx+\int Qdy$. Si loco P+E scribatur tantum P, et Q loco Q+F; habebitur $\frac{Av}{r}=\int Pdx+\int Qdy$, sit $\frac{Av}{r}=Z$; erit $Z=\int Pdx+\int Qdy$ seu $dZ=Pdx+Qdy$ Ex qua natura curuae AMB cognoscitur. Q. E. I.

Vt vsus huius aequationis melius percipiatur, ad casus particulares eam accommodabo, eosque partim iam tractatos, vt congruentia eorum perspici queat, partim vero ad nondum agitatos, vt plurimas a natura formatas curuas adhuc ignotas in lucem producam.

Problema. Inuenire aequationem generalem pro curuis, quas corpora perfecte flexibilia a potentiis quomodocunque sollicitata formant.

Solutio. Obtinebimus corpora perfecte flexibilia, quando vis elastica vbique euanescit, tum enim vel minima vis duo elementa adquemuis angulum inclinare valebit; Exprimitur autem quantitas vis elasticae litera v ponatur igitur $v=o$ et resultat aequatio $o=Ex+Fy+\int Pdx+\int Qdy$, quae ergo satisfaciet quaesito. Q. E. I.

Vt autem P et Q, quippe quae a summatione pen-

pendent, eliminentur, et loco eorum dP et dQ introducantur, quae denotant potentias ipſas in punctis M applicatas, differentietur aequatio et habebitur $Edx + Fdy + Pdx + Qdy = o$. Ergo $Q + \frac{Pdx}{dy} + F + \frac{Edx}{dy} = o$. Vnde $dQ + \frac{Pdyddx - Pdxddy}{dy^2} + \frac{dPdx}{dy} + \frac{Edyddx - Edxddy}{dy^2} = o$. Sed cum ponatur ds conſtans erit $dyddy = -dxddx$. et $dyddx - dxddy = \frac{ds^2 ddx}{dy}$. Quare $dQ + \frac{Pds^2 ddx}{dy^3} + \frac{Eds^2 ddx}{dy^3} + \frac{dPdx}{dy} = o$. Et ex hac $\frac{dQdy^3}{ds^2 ddx} + P + E + \frac{dPdy^2 dx}{ds^2 ddx} = o$. Vnde porro $\frac{dy^3 ddQ}{ds^2 ddx} + \frac{3dQdy^2 ddxddy - dQdy^3 d^3x}{ds^2 ddx^2} + dP + \frac{dy^2 dxddP}{ds^2 ddx} + \frac{2dPdydxddyddx + dPdy^2 ddx^2 - dPdy^2 dxd^3x}{ds^2 ddx^2} = o$. Ex hac prodibit haec $dy^3 ddQddx - 3dQdydxddx^2 - dQdy^3 d^3x + dy^2 dxddPddx - 3dPdx^2 ddx^2 + dPds^2 ddx^2 - dPdy^2 dxd^3x = o$. Haec aequatio fiet multum ſimplicior, ſi introducatur radius oſculi r, qui eſt $= \frac{dsdy}{ddx} = \frac{-dsdx}{ddy}$ tunc enim prodibit $o = rdxddP + 2dPdsdy + dPdrdx + rdyddQ - 2dQdsdx + dQdrdy$. Quae aequatio omnes poſſibiles curuas, quas corpora perfecte flexibilia quomodocunque ſollicitata formare poſſunt ſub ſe comprehendit.

Probl. Inuenire curuam, quam format filum perfecte flexile, cui in ſingulis punctis potentiae verticales ſunt applicatae.

Solut. Euaneſcunt igitur hoc in caſu potentiae

ho-

horizontales, vnde $Q = o$. Quare $o = Ex + Fy + \int P dx$; et hinc $E dx + F dy + P dx = o$: porroque $dP + \frac{F dx ddy - F dy ddx}{dx^2} = o$; seu $dP dx^2 dy = F ds^2 ddx$. Eſt vero $\frac{ds dy}{ddx} = r$, vnde $r dP dx^2 = F ds^3$. Et ex hiſce aequationibus curua in exemplis ſpecialibus cognoſcetur. Q. E. I. Dat haec aequatio omnis generis catenarias.

Sit $dP = a ds$ ſeu potentiae ſint vbique aequales, prodire debet catenaria communis pro catenis aequaliter craſſis. Habebitur autem $a dx^2 dy = F ds ddx$, quae integrata dat $ay = C - \frac{F ds}{dx}$ ſeu neglecta conſtante C, quae naturam curuae non immutat, et loco F poſito $-$ F obtinetur $ay dx = F ds$, et hinc $dx = \frac{F dy}{\sqrt{(aayy - FF)}}$ quae eſt aequatio pro catenaria, hoc modo applicanda: ob F negatiue aſſumtum, pondus ea littera indicatum trahere debet in plagam contrariam ei, verſus quam F trahere initio ponebamus. Ex A demittatur verticalis $Aa = F : a$, et horizontalis aP erit axis curuae AMB, quae erit convexa verſus aP et tangentem in A habebit parallelam axi aP, erit igitur AB catenaria vulgaris.

Fig. 5.

Sit $dP = a dx$. erit $a dx^3 dy = F ds^2 ddx$ ergo $ay = -\frac{F ds^2}{2 dx^2}$. ſeu ſumto F negatiuo erit $2ay dx^2 - F dx^2 = F dy^2$. Vnde $dx = \frac{dy \sqrt{F}}{\sqrt{(2ay - F)}}$ quae eſt aequatio pro parabola appolloniana, vt conſtat.

Problema. Inuenire curuam, quam format filum flexile, cui in ſingulis punctis potentiae normales ſunt applicatae.

Solu-

Solutio. Sit curua AMB, et vt supra $AP = x$, $PM = y$, et $AM = s$. Sit potentia in M normalis $MR = dN$ resoluatur ea in verticalem et horizontalem, erit verticalis $dP = \frac{dNdx}{ds}$ et horizontalis $dQ = \frac{dNdy}{ds}$ vnde $P = \int\frac{dNdx}{ds}$ et $Q = \int\frac{dNdy}{ds}$; atque $ddP = \frac{dNddx + dxddN}{ds}$. et $ddQ = \frac{dNddy + dyddN}{ds}$; quibus valoribus substitutis in aequatione generali pro corporibus perfecte flexibilibus; sed loco ddP, $\frac{dNdy}{r} + \frac{dxddN}{ds}$ et loco ddQ, $-\frac{dNdx}{r} + \frac{dyddN}{ds}$, vt radius osculi in computum ducatur; inuenietur $dNdr + rddN = o$ vnde $rdN = Cds$. Est igitur potentia normalis reciproce vt radius osculi. Q. E. I. Fig. 6.

Conuenit haec proprietas cum iam inuentis, quare non immorabor deriuandis ex ea curuis linteariis, velariis, et quae ex hac proprietate consequuntur.

Haec duo postrema problemata iam dudum a Geometris solutiones nacta sunt. Quando scilicet potentiarum directiones vel inter se parallelae vel in curuam formatam normales sunt. Quomodo autem curuae corporum flexibilium, quibus potentiae qualescunque sunt applicatae, inueniri debeant, nemo adhuc monstrauit, praeter Celeberrimum Iac. Hermannum, cuius in Phoronomia extat huius problematis solutio.

Problema. Inuenire curuam, quam format filum AMB perfecte flexile, cui in singulis punctis M applicatae sunt duae potentiae verticales et normales. Fig. 7.

Solutio. Resoluatur normalis MR, in laterales MN et MK, quarum MK sit verticalis et MN horizontalis. Erit $dP = ML + MK$ et $dQ = MN$. Dicatur $ML = dL$ et $MR = dN$. Erit $MK = \frac{dNdx}{ds}$ et $MN = \frac{dNdy}{ds}$; vnde $dP = dL + \frac{dNdx}{ds}$ et $dQ = \frac{dNdx}{ds}$. Et vlterius $ddP = ddL + \frac{dNddx + dxddN}{ds} = ddL + \frac{dNdy}{r} + \frac{dxddN}{ds}$. Atque $ddQ = \frac{dNddy + dyddN}{ds} = \frac{-dNdx}{r} + \frac{dyddN}{ds}$. Quibus valoribus substitutis obtinebitur $dNdsdr + rdsddN + rdxddL + dLdxdr + 2dLdsdy = o$. seu $rdsdN + rdxdL + \int dLdsdy = o$. Vnde natura curuae patebit. Q. E. I.

Ponatur potentia verticalis dL, proportionalis elemento curuae ds. Vt habeatur filum vbique aequaliter crassum et graue. Sit igitur $dL = ads$ habebitur $rdsdN + ardsdx + ayds^2 C = ds^2$, quae diuisa per ds, dat $rdN + ardx + ayds = Cds$.

Fig. 8. Sit AMB lintearia grauis vsque in BI liquore repleta, erit vis normalis dN vt MI, sit $PI = b$; erit $MI = b - y$. Ponatur igitur $dN = bds - yds$; erit $brds - yrds + ardx + ayds = Cds$. Est autem $r = \frac{dsdy}{ddx}$; vnde $bsdy - ydsdy + adxdy + ayddx = Cddx$, quae integrata dat $byds - \frac{1}{2}yyds + aydx = eds + Cdx$ seu $(yy - by + e)ds = aydx - Cdx$. Mutatis constantibus, vt numeri euitentur: haec aequatio transibit in sequentem $dx = \frac{(yy - by + e)dy}{\sqrt{(ay - c)^2 - (yy - by + e)^2}}$ vt haec aequatio pro axe AP valeat, oportet vt euanescente y fiat $dy : dx = 0 : 1$. eritque $cc = ee$. et $c = \pm e$. Si a fiat $= o$, habebitur aequatio pro nota lintei curua.

Fig. 9. Quaeratur curuatura velariae grauis vniformis AMB

EXEMP. Irruat ventus secundum TM parallelam axi AP. Erit eius vis, qua in curuam normaliter agit vt quadratum sinus anguli AMT id est vt $\frac{dy^2}{ds^2}$ ponatur itaque $dN = \frac{dy^2}{ds}$, habebitur $\frac{rdy^2}{ds} + ardx + ayds = Cds$. Cum autem sit $r = \frac{dsdy}{ddx}$ erit $dy^3 + adsdydx + aydsddx = Cdsddx$. Est autem $ddx = \frac{-dyddy}{dx}$ ergo $dy^2dx + adsdx^2 - aydsddy + Cdsddy = 0$ ponatur $ds = pdy$; erit $ddy = \frac{dpdy}{p}$ et $dx = dy\sqrt{pp-1}$. Vnde erit $dy\sqrt{pp-1} + ap(pp-1)dy = cdp - aydp$, seu $\frac{dy}{c-ay} = \frac{dp}{\sqrt{(pp-1)} + ap(pp-1)}$. Sit $\sqrt{pp-1} = p-q$; erit $\frac{dy}{c-ay} = \frac{-4qdq}{4qq+a-aq^4}$ resoluatur $4qq+a-aq^4$ in duos factores $1+\beta qq$ et $a+\delta qq$; vbi est $\beta = \frac{2}{a} + \sqrt{(\frac{4}{aa}+1)}$ et $\delta = 2-\sqrt{(4+aa)}$. Et hinc erit $\frac{dy}{c-ay} = \frac{mqdq}{1+\beta qq} + \frac{nqdq}{a+\delta qq}$, vbi $m = \frac{-4-2\sqrt{(4+aa)}}{a\sqrt{4+aa}}$ et $n = \frac{4-2\sqrt{(4+aa)}}{\sqrt{(4+aa)}}$. Erit igitur $-\frac{1}{a}l(c-ay) = \frac{m}{2\beta}\,l(1+\beta qq) + \frac{n}{2\delta}\,l(a+\delta qq) = \frac{-l(1+\beta qq)+l(a+\delta qq)}{\sqrt{4+aa}} = \frac{1}{\sqrt{(4+aa)}}\,l\frac{a2+aqq(2-\sqrt{(4+aa)})}{a+qq(2+\sqrt{(4+aa)})}$ est autem $q = p-\sqrt{pp-1} = \frac{ds-dx}{dy}$ vnde habebitur $(\frac{c-ay}{D})^{\sqrt{(4+aa)}:a}$

$$\frac{ady^2+(ds-dx)^2(2+\sqrt{4+aa})}{ady^2+(ds-dx)^2(2-\sqrt{4+aa})}$$ pro velaria graui.

Si ventus incidat deorsum iuxta TM, erit eius vis in velum vt quadratum sinus anguli AMT: id est vt $\frac{dx^2}{ds^2}$. Ponatur igitur $DN = \frac{dx^2}{ds}$ habebitur $\frac{rdx^2}{ds} + ardx + ayds = Cds$. Quia autem $r = \frac{dsdy}{ddx}$, erit dx^2dy Fig. 10.

+

$+adsdxdy+aydsddx = Cdsddx$, vnde $\frac{dy}{Cds-ayds} = \frac{ddx}{dx^2+adsdx} = \frac{1}{ads}\cdot\frac{ddx}{dx} - \frac{1}{ads}\cdot\frac{ddx}{dx+ads}$ quae integrata abit in hanc $= \frac{1}{ads}l(cds-ayds) = \frac{1}{ads}l\frac{dx+ads}{dx} + \frac{1}{ads}lbds$. Ergo $\frac{c-ay}{b} = \frac{dx+ads}{dx}$ seu $cdx-aydx = bdx+abds$. Sit $c-b=e$; erit $dx^2\,(e-ay)^2 = aabbds^2$ consequenter $dx = \frac{abdy}{\sqrt{((e-ay)^2-aabb)}}$. vt AP sit axis, oportet sit $dy:dx = o:1$. si $y=0$ erit ergo $e = \pm ab$. Ideoque $dx = \frac{bdy}{\sqrt{(yy\pm 2by)}}$ Quae est aequatio pro catenaria eademque manet quomodocunque a varietur, vt ergo non a pondere fili pendeat. Hoc autem ita accidere oportere ex eo patet, quod tam vis venti, quam grauitatis seorsim eandem catenariam producant.

Sit vis normalis quoque constans, nempe $dN = bds$ erit $brds+ardx+ayds = cds$. quia vero $r = \frac{dsdy}{ddx}$ erit $bdsdy+adxdy+ayddx = cddx$, quae integra dat $\frac{eds}{c-ay} = bds+adx$. Sit $e = bc+ac$; erit $cds = cdx-byds-aydx$. atque $dx = \frac{(c+by)dy}{\sqrt{(c-ay)-(c+by)^2}}$.

Fig. 11. *Problema.* Si curuae AMB in quouis puncto M duae potentiae applicatae fuerint, quarum altera normalis in curuam vt MN, altera tangentialis MT: inuenire aequationem pro curua, quam format filum perfecte flexile.

Solutio. Resoluantur ambae potentiae in laterales, quarum vna verticalis altera horizontalis, nempe MN in MR et RN, et MT in MS et TS; Erit $dP = MR+MS$ et $dQ = NR-TS$. Sit autem $MN = dN$. et $MT = dT$. Erit $MR = \frac{dNdx}{ds}$, $NR = \frac{dNdy}{ds}$, $MS = \frac{dTdy}{ds}$ et $TS = \frac{dTdx}{ds}$. Ergo $dP = \frac{dNdx+dTdy}{ds}$ et

$dQ =$

$\frac{dNdy - dTdx}{ds}$; vnde $ddP = \frac{dNddx + dxddN + dTddy + dyddT}{ds}$ $= \frac{dNdy - dTdx}{r} + \frac{dxddN}{ds} + \frac{dyddT}{ds}$. Et $ddQ = \frac{-dNdx}{r} - \frac{dRdy}{r}$ $+ \frac{dyddN}{ds} + \frac{dxddT}{ds}$. Quibus valoribus ſubſtitutis obtinebitur ſequens aequatio $dNdr + rddNd + Tds = o$ ſeu poſt integrationem $rdN + Tds = Cds$; vnde ob $r = \frac{dsdy}{ddx}$ erit $dNdy + Tddx = Cddx$. Q. E. I.

Haec aequatio hunc habet vſum, vt, cum admodum ſimplex ſit, facile ad omnes caſus applicari poſſit, ſed nihilominus generalis eſt, etenim omnis potentia in normalem et tangentialem reſolui poteſt. Praeterea iſtud adhuc monendum eſſe puto, aequationem generaliſſimam quoque hoc modo ſuccinctiorem reddi, loco verticalium et horizontalium normales et tangentiales in computum ducendo, haec autem oritur $dNdrds + rdsddN + dTds^2 = rd^3Z + drddZ + \frac{ds^2 dZ}{r}$ vbi $Z = \frac{Av}{r}$.

Problema. Inuenire aequationem generalem pro curuis, quas fila vtcunque elaſtica in ſingulis punctis nullas potentias applicatas habentia, formare debent. Fig. 12.

Solutio. Erit ergo hoc in caſu et $dP = o$, et $dQ = o$. Ergo $rd^3z + drddz + \frac{ds^2 dz}{r} = o$, ex aequatione generali modo concinnata; erit enim in ea $dN = o$ et $dT = o$: vnde $rrddzd^3z + rdrddz^2 + ds^2dzddz = o$, quae integrata dat $rrddz^2 + ds^2dz^2 = ads^4$ ſeu $rddz = ds\sqrt{(ads^2 - dz^2)}$ Eſt autem $r = \frac{dsdy}{ddx}$, vnde $\frac{ddz}{\sqrt{(ads^2 - dz^2)}}$ $= \frac{ddx}{dy} = \sqrt{\frac{ddx}{ds^2 - dx^2}}$. Hac ope logarithmorum integrata obtinebitur $\frac{1}{\sqrt{-1}} l \frac{dz + \sqrt{(dz^2 - ads^2)}}{ds\sqrt{-a}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} l \frac{dx + \sqrt{(dx - ds)^2}}{ds\sqrt{-b}}$ feu $\frac{dz + \sqrt{(dz^2 - ads^2)}}{\sqrt{a}} = \frac{dx + \sqrt{(dx^2 - ds^2)}}{\sqrt{q}} = \frac{dx + dy\sqrt{-1}}{\sqrt{b}}$ vnde $\frac{dz}{\sqrt{a}} - \frac{dx}{\sqrt{b}} = \frac{dy\sqrt{-1}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{(dz^2 - ads^2)}}{\sqrt{a}}$. Ex qua oritur $\frac{dz^2}{a} - \frac{2dzdx}{\sqrt{ab}} + \frac{dx^2}{b} = \frac{-dy^2}{b} + \frac{dz^2}{a} - ds^2 - \frac{2\sqrt{(ads^2dy^2 - dy^2dz^2)}}{\sqrt{ab}}$ feu $\frac{\overline{b+1}.ds^2}{b} - \frac{2dzdx}{\sqrt{ab}} = \frac{-2\sqrt{(ads^2dy^2 - dy^2dz^2)}}{\sqrt{ab}}$: porro $\frac{(b+1)^2ds^4}{b} + \frac{4dx^2dz^2}{a} - \frac{4(b+1)ds^2dxdz}{\sqrt{ab}} = \frac{4ads^2dy^2}{a} - \frac{4dy^2dz^2}{a}$ feu $\frac{(b+1)^2ds^2}{b} + \frac{4dz^2}{a} - 4dy^2 = \frac{4(b+1)dxdz}{\sqrt{ab}}$. Et $\frac{2dz}{\sqrt{a}} = \frac{(b+1)dx}{\sqrt{b}} \pm \sqrt{(\frac{(b+1)^2dx^2}{b} - \frac{(b+1)^2ds^2}{b} + 4dy^2)} = \frac{\overline{b+1}.xd}{\sqrt{b}} \pm dy \sqrt{(4 - \frac{(b+1)^2}{b})}$ Ergo $\frac{2z}{\sqrt{a}} = \frac{\overline{b+1}.x}{\sqrt{b}} \pm y\sqrt{(4 - \frac{(b+1)^2}{b})}$ feu $z = Ex + Fy = \frac{Av}{r}$.

Eadem aequatio inuenitur ex primo inuenta aequatione, vbi $\int Pdx$ et $\int Qdy$ euanefcunt adeoque reftat $Ex + Fy = \frac{Av}{r}$ Q. E. I.

Fig. 13. *Problema.* Inuenire curuaturam elateris grauitatis expertis, et vbiuis eiusdem vis elafticae.

Solutio. Cum vis elaftica vbique fit eadem ponatur $v = a$; eritque $Ex + Fy = \frac{Aa}{r}$. Poni poteft loco $Ex + Fy = Gt$, vbi t denotet abfciffam alio loco affumtam, eritque $Gt = \frac{Aa}{r}$, quae aequatio praebet curuam elafticam iam cognitam, hoc vero modo integrabitur. Erit $Exdsdy + Fydsdy = Aaddx$ feu $xdy + \frac{Fydy}{E} = \frac{Aaddx}{Eds}$. Etiam autem eft $Exdsdx + Fydsdx = -Aaddy$. feu $ydx + \frac{Exdx}{F} = -\frac{Aaddy}{Fds}$. Confequenter addenendo et integrando habebitur $yx + \frac{Exx}{2F} + \frac{Fyy}{2E} = \frac{Aadx}{Ed}$ $\frac{Aady}{Fds} + C$. Ergo $2FEdxds + EExxds + FFyyds = 2AFadx - 2AEady + 2EFCds = ds(Ex + Fy)^2$. Quae dabit etiam elasticam. Q. E. I.

Problema. Inuenire curuam quam format filum, AMB aequabiliter graue, et aequabiliter vbique elasticum. Fig. 12.

Solutio. Cum filum sit vbique aequaliter graue, erit dP constans, nempe $= ads$: vnde $P = a$ et $Q = o$. Praeterea quia elasticitas vbiuis eadem, ponatur $v = b$; erit $\frac{Ab}{r} = Ex + Fy + \int asdx$. Augeatur as constanti E et aequatio non immutabitur, eritque $\frac{Ab}{r} = Fy + \int asdx$ seu $\frac{-Abdr}{rr} = Fdy + asdx$: atque abiiciendis superfluis constantibus $asdx + cdy + \frac{bdr}{rr} = o$. Est autem $r = \frac{dsdy}{ddx}$; ergo $\frac{1}{r} = \frac{ddx}{dsdy}$: ex quo $\frac{dr}{rr} = \frac{ddxddy - dyd^3x}{dsdy^2} = \frac{-dxddx^2 - dy^2d^3x}{dsdy^3}$. Ergo $asdsdxdy^3 + cdsdy^4 = bdxddx^2 + bdy^2d^3x$. Ponatur $dx = pds$, erit $dy = ds\sqrt{(1 - pp)}$ et $ddx = dpds$ et $d^3x = dsddp$. Quibus substitutis habebitur $aps(1 - pp)^{3:2} ds^2 + c(1 - pp)^2 ds^2 = bpdp^2 + bddp(1 - pp)$. Hanc vero aequationem nullo pacto eo reducere potui, vt construi possit.

Caeterum elegans est hoc problema, quod veram curuam tam filorum perfecte flexibilium quam laminarum elasticarum exhibeat: etenim nullus extat funis, qui perfecte sit flexilis, neque vlla lamina elastica, quae non sit grauis, nisi forte in fluido aequalis grauitatis specificae flectatur. Idem hoc problema in Act. Eruditorum Lips. A. 1724. proposipositum est, vt curuatura funis elastici seu non perfecte flexilis inueniatur, nec vero quantum scio solutionem hucusque vllus dedit, praeter Clar. Dan. Bernoulli, qui eodem propemodum tempore, quo ego, solutionem nactus est.

Fig. 14. *Problema.* Inuenire curuam, quam format lamina elastica BMA in B fixa proprioque pondere incuruata.

Solutio. Fluit ex praecedente, vbi duntaxat F et E pondera applicata euanescere debent, quare haec habebitur aequatio $\frac{Ab}{r} = \int asdx$ seu neglectio superfluis constantibus $\frac{A}{r} = \int sdx$ quae vt supra ad sequentem reducitur $sp^2(1-pp)^{\frac{3}{2}}ds^2 = Apdp^2 + A(1-pp)ddp$. At neque haec ad construendum accommoda effici potest.

Fig. 15. *Problema.* Inuenire curuam fili AB in A fixi in B liberi, agitati a vento NM.

Solutio. Sit vis grauitatis in M $= ads$, et vis venti $= \frac{bdy}{ds}^{2}$. Inuenietur haec aequatio $brdy^2 = ardsdx + ayds^2$. Est r radius osculi $= \frac{dsdy}{ddx}$. Quare $bdsdy^3 = ads^2dxdy + ayds^2ddx$. seu $bdy^3 = adsdxdy + aydsddx$. Ponatur $dx = pdy$ erit $ddx = pddy + dpdy = $ (ob $dxddx = -dyddy$) $= \frac{-pdxddx}{dy} + dpdy$, ex qua inuenitur $ddx = \frac{dpdy}{1+pp}$. His factis substitutionibus orietur aequatio $bdy\, V(1+pp) = apdy(1+pp) + aydp$ et $\frac{dy}{y} = \frac{adp}{bV(1+pp) - ap(1+pp)}$. In qua indeterminatae sunt a se inuicem separatae, et propterea curua quaesita construi potest.

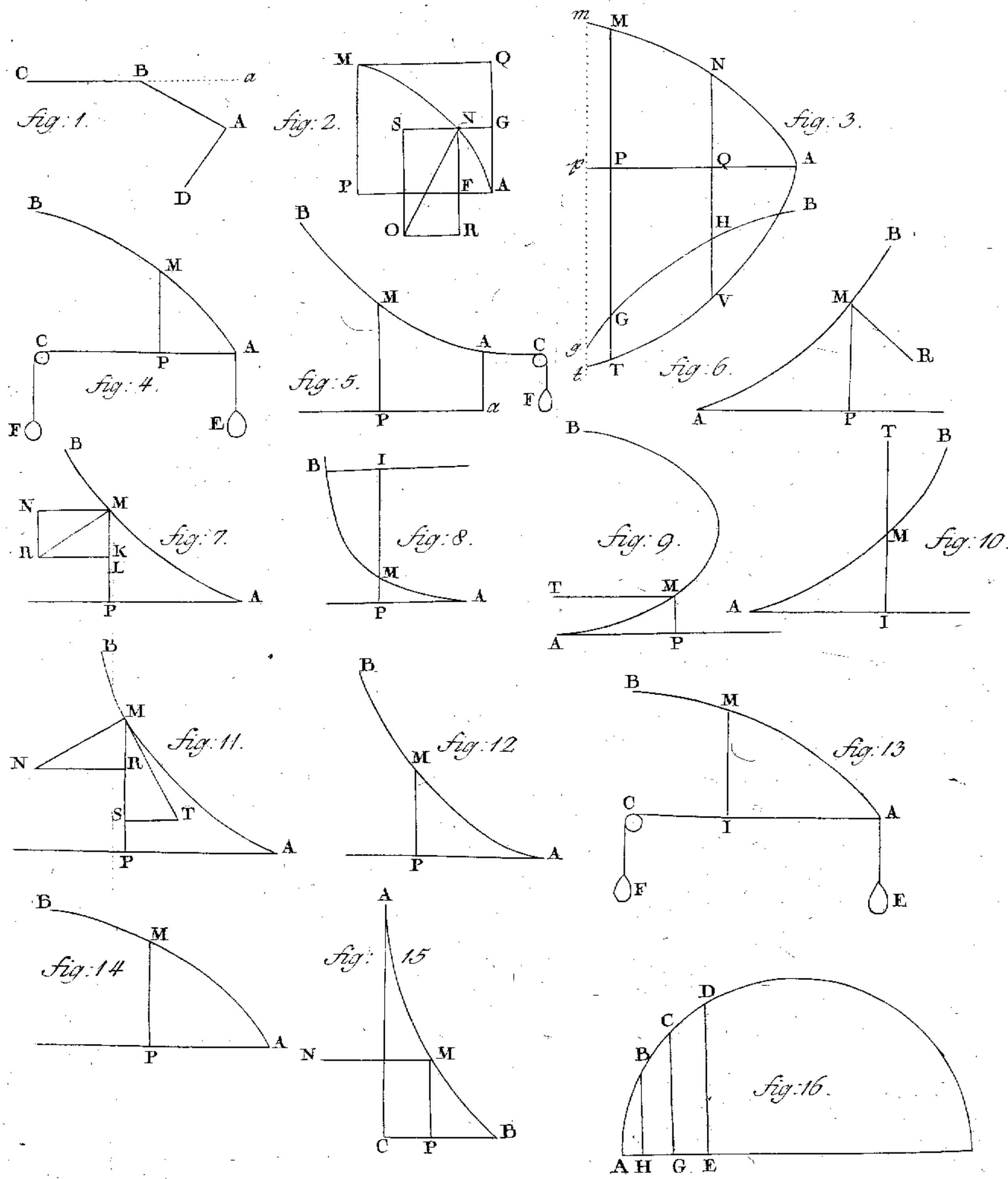
fig: 1.
fig: 2.
fig: 3.
fig: 4.
fig: 5.
fig: 6.
fig: 7.
fig: 8.
fig: 9.
fig: 10.
fig: 11.
fig: 12
fig: 13
fig: 14
fig: 15
fig: 16.