1729

Tentamen explicationis phaenomenorum aeris

Leonhard Euler

ne vnico albo ſimilis figurae, in medio ſecundum longitudinem ſulcato. Haec capſula praeter ea inſtructa eſt duobus foliolis hiſpidis ceu ſcutis, quae omnia melius deſcribuntur quam delineantur ob exiguitatem, hinc nullam figuram adiecimus. Flos etiam tubuloſus magis infundibuliformibus quam campaniformibus accenſeri meretur. Abiecto igitur Capanulae nomine *Serpillifoliam* vocare viſum eſt.

TENTAMEN EXPLICATIONIS PHAENOMENORVM AERIS.

Auctore

Leonh. Eulero.

I.

QVanquam ad intima rerum penetralia et cognitionem vltimae partium ſtructurae aditus non ita patet, vt phaenomenorum, quae inde oriuntur ratio reddi queat: Tamen, vt plerumque a Phyſicis factum eſt, a corporum naturalium proprietatibus, quas obſeruauimus, quodammodo ad ipſam eorum ſtructuram concludere licet. Ex qua percepta corporum ſtructura, quo plura phaenomena explicari poſſunt, eo perfectior ea eſt; Et, ſi ex qua Theoria omnes prorſus proprietates, quas quidem co- *M. Sept. 1727.*

 gno-

gnoſcere impoſſibile eſt, deriuari poſſent, dubium non eſt, quin ea vera ſit, et re ipſa exiſtat.

II. Aeris quam plurima nota ſunt phaenomena, eaque parum a ſe inuicem dependentia; vt is profecto multum praeſtitiſſe cenſendus ſit; qui eadem theoria omnibus ſatisfacere poſſet. Sed theoriam ita maxime conficere conuenit, vt primum excogitetur partium ſtructura, ex qua vna tantum proprietas fluat; id quod plerumque pluribus modis fieri poteſt: et deinceps inquiratur, num ea caeteris quoque proprietatibus explicandis ſufficiat? et, ſi plures primum theoriae conceptae ſunt, tum quaeratur, quae maximae parti vel quae omnibus ſatisfaciat.

III. Inter alias aeris, quas cognoſcimus, proprietates ea inprimis idonea viſa eſt, ſecundum quam ſtructura aeris adornetur, qua aer ſeſe continuo expandere conatur, et reipſa ſe expandit, ſi quae impedimento fuerant, remoueantur. Haec enim aeris elaſticitas prae caeteris proprietatibus maxime explicatu difficilis videtur, vt eius ratione cognita reliqua facile fluere videantur.

IV. Niſi velimus hoc aeris phaenomenon occultae cuidam particularum proprietati et vi inſitae adſcribere, alia via non ſupereſt, niſi vt conatus iſte a motu materiae cuiusdam ſubtilis deriuetur. Conatus autem ſeu vis mortua, vti a Leibnitio vocatur, a materia mota ortum trahere poteſt, ſi ea in gyrum moueatur; quo fit vt quaeuis particula a centro aufugere conetur, atque ita huiusmodi vortex vim ſeſe expandendi acquirat. Hoc vſus principio Cel. Ioh. Bernoulli omnem vim elaſticam

ex-

explicare instituit in schediasmate *de communicatione motus* Lutetiae nuper impresso. Quo vim elasticam a vi centrifuga materiae subtilis oriri asserit.

V. Sequor itaque hac in re, istam, vti mihi videtur; maxime probabilem elasticitatis aeris causam, atque in hac dissertatione examini subiiciam, quantum aeris structura ex hoc fundamento formata reliquis aeris proprietatibus explicandis sufficiat, quantumue minus, vt appareat, vtrum aer hanc partium structuram habere possit, an vero non? Quo in casu meliorem oporteret excogitare aeris constitutionem.

VI. Suppono igitur aerem constare aceruo infinitarum minimarum bullularum, in quibus materia subtilis motu circulari gyratur et vi centrifuga bullulas continuo expandere conatur, easque reipsa semotis obstaculis, expandit. Suppono porro bullulas esse pellicula obductas; quod quidem opus non esset, cum huiusmodi vorticuli sine pelliculis constare possent et tamen mutuo non permiscerentur. Vnus enim alterum impedit, quominus extrauagetur: Attamen propterea bullulas pelliculis obductas suppono, quod aer nunquam tam purus sit, vt prorsus a vaporibus liber sit. Vapores autem particulas aeris ad instar pellicularum obducere valde probabile est.

VII. Constet itaque aer infinito bullularum minimarum numero, quarum crusta exterior sit aquea pro diuerso aeris statu maior minorue; intra hanc crustam gyretur materia subtilis certa cum velocitate, quae subinde ab alia subtiliori adhuc materia omnes poros penetrante accelerationes nancifcitur, ne motus tandem conſumatur et euaneſcat. Conſtat enim aerem calorem ſemel acceptum ſenſim amittere, cum autem aer calore rarefiat, ſequitur materiam ſubtilem motu vehementiore agitari; ceſſante ergo calore, indicio id eſt, motum materiae eſſe retardatum.

VIII. Ex hiſce de ſtructura aeris praemiſſis conſequitur, eum in infinitum ſe expandere debere atque extremum raritatis gradum accipere, quando nihil eſt quod eius conatum compeſcat. Sed accedente grauitate, aliter ſe res habebit, eritque, quod vi aeris elaſticae ſe opponet. Quum enim aer ſuperior inferiorem premat pondere ſuo, inferior vlterius ſe expandere nequit, quam quoad eius vis elaſtica, quae expanſione continuo diminuitur, aequalis ſit vi incumbentis aeris comprimenti.

IX. Patet porro ex concepta aeris conſtitutione, eum in infinitum comprimi non poſſe, propter grauitatem ſpecificam, quae in infinitum augeretur. Nam cum in qualibet bullula certa et determinata materiae ſubtilis quantitas comprehendatur, eaque ſemper ſuperficiei adhaereat ob vim centrifugam, neceſſe eſt vt circa centrum ſpatium vacuum relinquatur; id quod eo maius eſſe debet, quo magis aer rarus fuerit: Contra autem continuata aeris compreſſione, id ſpatium vacuum continuo diminuetur, donec tandem prorſus euaneſcat, vltra quem denſitatis gradum aerem comprimere impoſſibile erit.

X. Quod ad velocitatem materiae ſubtilis attinet, opor-

oportet ſingulis eius particulis eandem attribuere velocitatem, neque quae a centro remotiores ſunt, iis maiorem et proprioribus minorem adſcribere velocitatem. Praeterea enim, quod hinc theoria naſcatur experientiae penitus contraria, ob vim centrifugam in maioribus bullulis maiorem, ex hoc elucere poteſt, quod bullulam condenſando vel expanſioni relinquendo velocitas materiae ſubtilis eadem manere debeat, cum nihil ſit, quod eam immutet; Huc enim non pertinet retardatio, de qua §. 6. quae non propter immutationem bullulae, ſed propter reſiſtentiam quandam contingit. Quare cum velocitas materiae ſubtilis non a diſtantia a centro pendere queat neceſſe eſt eam vbique conſtantem ſtatuere.

XI. Sit CAB bullula aerea, quoad fieri poteſt compreſſa, quae proin eſt materia ſubtili vorticoſa penitus repleta. Circumdata vero ſit cruſta aquea ADEB, vt ergo reliquum ſpatium CDE materia ſubtili impleatur. Sit $AC = g$, $CD = b$. Sumatur pro ratione radii ad peripheriem, $1 : \pi$, pro grauitate ſpecifica materiae ſubtilis, n et pro grauitate ſpecifica aquae ſeu cruſtae m. Erit capacitas globuli CAB $= \frac{2\pi g^3}{3}$, et capacitas globuli CDE $= \frac{2\pi b^3}{3}$. Ergo ſoliditas cruſtae ADEB $= \frac{2\pi}{3}(g^3 - b^3)$. Quamobrem erit maſſa materiae ſubtilis ſpatium CDE implentis $= \frac{2\pi n b^3}{3}$, et maſſae cruſtae $= \frac{2\pi m}{3}(\frac{g^3 - b^3}{2})$. Et hae maſſarum quanti- *Fig. I.*

tita-

titates in quantum vis expanſis bullulis eaedem manere debent.

XII. Exprimat k altitudinem, ex qua graue cadendo velocitatem acquirit, materiae ſubtilis velocitati aequalem; Vnde ſequenti modo vis centrifuga, ſeu vis, qua ſuperficies globuli CDE premitur, inuenietur. Sumatur a centro indeterminata $CP = x$ cuius differentiale $Pp = dx$. Erit cruſta ſphaerica craſſitiei Pp et radii $CP = 2\pi xxdx$, quae ſi ducatur in denſitatem materiae ſubtilis, dat maſſam $2\pi nxxdx$, ſeu pondus. Quum haec materia gyretur velocitate ex altitudine k acquiſita, fiat ſecundum Hugenium, vt radius x ad duplam altitudinem, $2k$ ita pondus materiae gyrantis, $2\pi nxxdx$ ad pondus vi centrifugae huius cruſtae aequale, quod ergo erit $= 4\pi nkxdx$. Huius ergo integrale $2\pi nkx^2$ exprimit vim centrifugam ſphaerae radii CP. Conſequenter vis centrifuga bullulae DE erit $= 2\pi nkhh$.

Fig. II. XIII. Conſideremus nunc bullulam aeream quomodocunque expanſam CAB: Cuius extrema cruſta ADEB deſignet materiam aqueam, media DFGE materiam ſubtilem circa centrum gyrantem, et tertia ſeu intima CFG, ſpatium vacuum, vel quod ad minimum materia grauitatis expertiſit repletum. Dicantur $AC = a$, $CD = b$, et $CF = c$. Erit, computo vt ſupra inſtituto, ſoliditas cruſtae extremae ſeu aqueae $ADEB = \frac{2\pi}{3}(a^3 - b^3)$. Dein ſoliditas cruſtae mediae ſeu quantitas materiae ſubtilis $DFGE = \frac{2\pi}{3}(b^3 - c^3)$. Tertio autem capacitas totius bullulae erit $= \frac{2\pi}{3}a^3$. Sit grauitas ſpecifica aeris ſeu totius bullulae, i erit pondus eius $\frac{2\pi i}{3}a^3$, id quod aequale eſt ſummae

pon-

ponderum partium, nempe $\frac{2\pi m}{3}(a^3-b^3)+\frac{2\pi n}{3}(b^3-h^3)$. Eſt igitur $ia^3=ma^3-mb^3+nb^3-nc^3$.

XIV. Cum et quantitates materiae aquae, et quantitas materiae ſubtilis aequales eſſe debeant iis, quae ſupra erant inuentae in caſu bullulae maxime compreſſae, ſequentes obtinebuntur aequationes $\frac{2\pi}{3}(g^3-h^3)=\frac{2\pi}{3}(a^3-b^3)$ et $\frac{2\pi}{3}h^3=\frac{2\pi}{3}(b^3-c^3)$. Quamobrem $g^3-h^3=a^3-b^3$ et $h^3=b^3-c^3$. Vnde $b=\sqrt[3]{(a^3-g^3+h^3)}$ et $c=\sqrt[3]{(b^3-h^3)}=\sqrt[3]{(a^3-g^3)}$. Si haec ſubſtituantur in ſuperioris §. vltima aequatione, reperietur $ia^3=mg^3-mh^3+nh^3$. Vnde $h^3=(ia^3-mg^3):(n-m)$. Et porro $b=\sqrt[3]{((i-m+n)a^3-ng^3):(n-m)}$ ac $c=\sqrt[3]{(a^3-g^3)}$. Hoc ergo modo ex calculo excluduntur litterae b, c, et h denotantes interiorum bullulae partium a centro diſtantias.

XIV. Vis centrifuga materiae ſubtilis in ſpatio DFGE gyrantis velocitate ex altitudine k producta ex §. 11. inueniri poteſt hoc modo: Vis centrifuga materiae globum radii x implentis inuenta eſt $=2\pi nkxx$. Quare ſe materia ſubtilis totum ſpatium CDE impleret, foret eius vis centrifuga $=2\pi nkbb$, a qua ſi auferatur, vis centrifuga materiae ſpatii CFG $=2\pi nkcc$, reſtabit vis centrifuga materiae ſubtilis in ſpatio FDEG gyrantis, cuius quantitas proin erit $=2\pi nk(bb-cc)$ et ſubrogatis loco b et c valoribus §. 13. inuentis, erit ea $=2\pi nk$ $\left[\left(\frac{(i-m+n)a^3-ng^3}{n-m}\right)^{\frac{2}{3}}-(a^3-g^3)^{\frac{2}{3}}\right]$. Ponatur $h^3=pg^3$ erit, ob $ia^3=mg^3-mh^3+nh^3$, $ia^3=(m-mp+np)g^3$

 vnde

vnde $g^3 = ia^3 : (m - mp + np)$. Erit ergo pondus vi centrifugae aequiualens $= 2\pi nkaa\,[(\frac{m-i+pi-mp+pn}{m-pm+pn})^{\frac{2}{3}} - (\frac{m-pm+pn-i}{m-pm+pn})^{\frac{2}{3}}] = \frac{2\pi nkaa}{\sqrt[3]{(m-pm+pn)^2}}(\sqrt[3]{(mi+pi-pm+pn)^2} - \sqrt[3]{(m-pm+pn-i)^2})$.

XVI. Cum vi centrifuga efficiatur, vt bullulae aereae sese continuo extendere conentur, erit ea aequalis vi elasticae aeris; ex inuenta igitur aequatione, quanta sit aeris elasticitas, inueniri poterit. Verum cum hoc loco primum legem duntaxat, qua aeris vis elastica pro diuersis densitatis, humoris et celeritatis gradibus immutetur, persequi conueniat, factor $2\pi n$ vtpote constans negligi poterit, eritque vis aeris elastica vt $\frac{kaa}{\sqrt[3]{(m-pm+pn)^2}}(\sqrt[3]{(m-i+pi-pm+pn)^2} - \sqrt[3]{(m-pm+pn-i)^2})$ Cum autem sit $ia^3 = (m-pm+pn)g^3$, loco a in computum duco g, vt ea tanquam constans abiici possit; Erit ergo $aa = gg\sqrt[3]{(\frac{m-pm+pn}{i})^2}$, quo substituto erit vis elastica aeris vt $k(\sqrt[3]{(\frac{m-i+pi-pm+pn}{i})^2} - \sqrt[3]{(\frac{m-i-pm+pn}{i})^2})$. Coeteris igitur paribus est aeris vis elastica vt altitudo k, velocitatem materiae subtilis in bullulis gyrantis graui descendenti imprimens.

XVII. Verum cum vires aeris elasticae inter se comparantur, id sit aeris vim expansiuam in eandem basin agentem explorando. Quamobrem, vt mensuram aeris vis elasticae, vt consuetum est, exhibeam, necesse est,

vt

vt preſſionem aeris in datam baſin inueſtigem. Nam, quae hucusque de iſta menſura tradidi, huc non quadrant, quia vis tota globuli aeris elaſtica eſt ſupputata, quae propterea in tanto maiorem baſin agit, quanto magis bullula eſt extenſa. Sunt autem hae baſes vt quadrata radiorum bullularum; Et iis etiam vires elaſticae proportionantur. Quocirca aſſumatur conſtans quidam ſphaerae radius e, fiatque vt a^2 ad e^2 ita vis aeris elaſtica inuenta paragr. praeced. ad vim in datam baſin agentem. Multiplicetur ergo oportet formula praecedens per $e^2 : a^2$ at vero eſt $a^2 = gg\sqrt[3]{\left(\frac{m-pm+pn}{i}\right)^2}$. Quamobrem abſoluta diuiſione, abiectisque e^2 et g^2 tanquam conſtantibus obtinebitur vis aeris elaſtica abſoluta, quae erit vt $k\left(\sqrt[3]{\left(\frac{m-i+pi-pm+pn}{m-pm+pn}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{m-i-pm+pn}{m-pm+pn}\right)^2}\right)$.

XVIII. Euaneſcat pars bullulae aquea; erit $g = b$ et ideo $p = 1$. Quamobrem vis aeris elaſtica hoc caſu erit $k\left(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{\left(\frac{n-i}{n}\right)^2}\right)$ ſeu multiplicato per conſtantem $\sqrt[3]{n^2}$, erit ea vt $k\left(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$. Ponatur k ſeu velocitas conſtans, vt obtineatur lex elaſticitatum pro ſolis aeris diuerſis condenſationibus, erit tum vis elaſtica, vt $\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-i)^2}$. Et hinc ſequentes duco conſequentias. Si ſtatus aeris quam proxime ad maximam condenſationem accedat, erit $n-i$ tantum non $=0$, ergo vis elaſtica hoc in caſu erit vt $\sqrt[3]{n^2}$ i. e. ea erit conſtans. Aere ergo iam vehementer compreſſo, vis elaſtica amplius ſenſibiliter non immutatur.

XIX

XIX. Deinde si i respectu ipsius n valde paruum sit, seu si densitas aeris ad densitatem materiae subtilis admodum exiguam habuerit rationem erit $(n-1)^{\frac{2}{3}} = n^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}} i$, consequenter vis aeris elastica erit vt $\frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}} i$ siue neglecto $\frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}}$ vt i. Aere ergo valde rarefacto elasticitates erunt vt densitates aeris. Quare cum circa aerem naturalem obseruemus quantumuis is comprimatur elasticitatem propemodem in eadem ratione crescere, dubium non est, quin aer noster admodum sit dilatatus respectu materiae subtilis, atque rationem specificam aeris ad grauitatem specificam materiae subtilis perquam esse exiguam.

XX. Attamen cum ea prorsus negligi nequeat, Oportet seriei, inquam $(n-i)^{\frac{2}{3}}$ conuertitur, non tantum duos primos, sed tres accipere terminos, qui variationes obseruatas satis exacte monstrabunt. Hoc ergo pacto erit $(n-1)^{\frac{2}{3}} = n^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}} i - \frac{1}{9} n^{-\frac{4}{3}} i^2$. Atque hinc vis elastica erit vt $\frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}} i + \frac{1}{9} n^{-\frac{4}{3}} i^2$ seu multiplicando per $9n^{\frac{4}{3}}$, vt $6ni + i^2$. Dicatur vis elastica v fiatque $fv = 6ni + ii$. Ex hac igitur aequatione ope experimentorum, qua circa aeris incrementum vis elasticae eo continuo magis condensato, instituta sunt a Boyleo, inuenietur ratio $n : i$. Ex quo intelligetur extremus et maximus densitatis gradus, ad quem aerem comprimere possibile est.

XXI. Consultum ergo esse duxi experimenta Boyleana huc transcribere, vt ex iis de densitate seu grauitauitate ſpecifica materiae ſubtilis concludere liceat, et quamnam ad aerem rationem habeat. Aer primo in tubo ſpatium 12. digit. Angl. replebat poſtea vero cum columna mercuriali comprimebatur altitudines aeris et mercurii ſuperaffuſi in ſequenti tabula exhibentur, cuius prior columna A indicat ſpatium aeris in tubo, et altera B altitudinem mercurii comprimentis aerem: hae vero in digitis Anglic. exprimuntur.

A	B	A	B	A	B
12	0	8	$15\frac{1}{16}$	5	$41\frac{9}{16}$
$11\frac{1}{2}$	$1\frac{7}{16}$	$7\frac{1}{2}$	$17\frac{15}{16}$	$4\frac{3}{4}$	45
11	$2\frac{15}{16}$	7	$21\frac{3}{16}$	$4\frac{1}{2}$	$48\frac{12}{16}$
$10\frac{1}{2}$	$4\frac{6}{16}$	$6\frac{1}{2}$	$25\frac{3}{16}$	$4\frac{1}{4}$	$53\frac{11}{16}$
10	$6\frac{3}{16}$	6	$29\frac{11}{16}$	4	$58\frac{12}{16}$
$9\frac{1}{2}$	$7\frac{14}{16}$	$5\frac{3}{4}$	$32\frac{3}{16}$	$3\frac{3}{4}$	$63\frac{15}{16}$
9	$10\frac{2}{16}$	$5\frac{1}{2}$	$34\frac{15}{16}$	$3\frac{1}{2}$	$71\frac{5}{11}$
$8\frac{1}{2}$	$12\frac{8}{16}$	$5\frac{1}{4}$	$37\frac{15}{16}$	$3\frac{1}{4}$	$78\frac{11}{16}$
				3	$88\frac{7}{16}$

XXII. Exhibet igitur haec tubula columnam mercurialem, quae pondere ſuo aerem in datum ſpatium redigit. Hoc vero pondus non ſolum aerem comprimit, ſed ei inſuper adiici debet pondus atmoſphaerae, quod ſimul cum mercurio in aerem agit. Cum ergo ſumma ponderis mercurii et atmoſphaerae ea ſit, vis qua aer comprimitur, erit ea aequalis vi aeris elaſticae. Vnde, ſi numeris tabulae B addatur altitudo mercurii ponderi atmoſphaerae aequalis, quam Boyleus ſe $29\frac{1}{8}$ dig.

 obſer-

obſeruaſſe ſcribit; habebitur relatio inter denſitates aeris et elaſticitates. Sed cum ad iſtud accurate praeſtandum, exactiſſime altitudinem mercurii athmoſphaeram aequilibrantis obſeruaſſe neceſſe ſit; idque multis difficultatibus perturbetur: Mallem relicta hac altitudine $29\frac{1}{8}$ dig. ex experimentis ipſis, quum numerus eorum abunde ſufficiat, deducere pondus atmoſphaerae: Sed quia ad hoc accuratiſſima requiruntur experimenta, (in quibus praeſentia haberi nequeunt) altitudinem $29\frac{1}{8}$ dig. retinere cogor.

XXIII. Sed denſitates aeris ſunt reciproce vt volumina eiusdem maſſae aereae; volumina vero columna A exhibeantur: Ergo denſitates erunt reciproce vt numeri columnae A. Si igitur denſitas aeris in ſtatu naturali ponatur, 1; reliquae denſitates habebuntur ſi numerus 12 per reliquos reſpondentes numeros columnae A diuidatur. Deinde elaſticitates, vt vidimus, ſunt vt numeri ſecundae columnae B aucti numero $29\frac{1}{8}$. Cum vero ſit $fv = 6ni + ii$, atque ex obſeruationibus allatis habeantur in quolibet caſu et v et i, duae hae literae f et n determinari debent; Id quod duobus quibusuis experimentis praeſtabitur. Sumatur ad literam f determinandam experimentum primum; Et erit $i = 1$, et $v = 29\frac{1}{8}$, vnde $29\frac{1}{8}f = 6n + 1$. Ergo $f = \frac{48n+8}{233}$. Quo valore in aequatione ſubſtituto habebitur $48nv + 8v = 1398ni + 233ii$, conſequenter $n = \frac{8v - 233ii}{1398i - 48v} = \frac{233ii - 8v}{48v - 1398i}$.

XXIV. Vt hinc inueniatur n, oportet experimentorum allatorum aliquod adiungere. Sumatur igitur

tur vltimum, erit $i = 12 : 3 = 4$, et $v = 88\frac{7}{16} + 29\frac{1}{8} = 117\frac{9}{16}$. Vnde $n = \frac{940\frac{1}{2}}{5592} = \frac{3728}{5643} = \frac{2787,5}{51}$ hinc erit $n = 54, 64$. Vt pateat, quantum experimenta inter ſe conueniant vel diſconueniant, accipiatur id quod aer in triplo minus ſpatium eſt redactum; Erit ergo $i = 3$, et $v = 58\frac{12}{16} + 29\frac{2}{16} = 87\frac{7}{8}$. Vnde habetur $n = \frac{2097}{4218} = \frac{703}{4194} = \frac{1394}{24} = 58\frac{1}{12}$. At experimentum quo aer duplo tantum denſior exhibetur paulo plus quam 17 pro valore ipſius n exhibet. Ex qua ingenti diſcrepantia intelligi poteſt, quam parum accurata haec ſint experimenta: Id quod praeterea ex ſaltibus, qui in iis deprehenduntur, ſatis colligi poteſt.

XXV. Id autem ex reliquis experimentis calculum inſtituens obſeruaui, inde quo minus aer erat compreſſus, eo minorem ipſius n valorem inuentum. Ex quo intelligi poteſt, reliquis in numeris ſaltibus neglectis, vel altitudinem mercurii atmoſphaerae aequiponderantis non ſatis accurate eſſe aſſumtam, vel tubum nimis fuiſſe anguſtum, vt ne facillime quidem mercurius in eo deſcendere potuerit. Prius quidem vix credi poteſt: Sed poſterius eo magis veriſimile eſt, quod tanta inſit difformitas experimentis: Vnde concludi debet, mercurium non ſucceſſiue, ſed quaſi per ſaltus deſcendiſſe. Eandem difformitatem in Boylei experimentis circa rarefactionem aeris aduertens, inde quicquam concludere nolui: ſed plenius de denſitate materiae ſubtilis iudicium tamdiu differam, donec vel accuratiora experimenta in manus veniant, vel ipſi inſtituere vacauerit.

XXVI.

Fig. III. XXVI. Vt autem clarius ob oculos ponatur, qua lege elasticitates aeris pro diuersis densitatibus crescant, tota res figura geometrica repraesentari potest. Neglectis pelliculis aqueis inuenta est aeris vis elastica proportionalis $\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-i)^2}$: Vnde patet, id per parabolam cubicalem secundam praestari posse. Sit AMC parabola cubicalis secunda super axe AB, in qua applicatae PM ferit in ratione subsesquiplicata abscissarum AP. Capiatur $AB=n$ et erecta applicata BC, ducatur axi parallela CD. Dico si in ea capiatur $CQ=i$, applicatam correspondentem QM repraesentare vim aeris elasticam. Nam est $QM=BC-PM$. Sed BC est vt $\sqrt[3]{AB^2}$ seu $\sqrt[3]{n^2}$, et PM vt $\sqrt[3]{AP^2}$, seu, ob $AP=AB-BP$, $(CQ)=n-i$, erit PM vt $\sqrt[3]{(n-i)^2}$. Vt ergo sit QM vt $\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-i)^2}$ cui quantitati etiam, vt patet, proportionalis est vis aeris elastica.

XXVII. Si ea accipiatur regula, qua vires aeris elasticae in ratione densitatum ponuntur; Ex hac figura patebit quantum ea a vero, si modo hanc theoriam veram appellare licet, aberret. Ducatur per puncta C et M recta CMR perpendicularem AD ex A in AB ductam secans in R; exprimet haec recta distantiis suis a CD vires elasticas secundum istam regulam aeri iuxta abscissas in linea CD condensato respondentes. Si igitur QM naturalem aeris vim elasticam denotet, regula ista in condensationibus iusto minorem exhibebit vim elasticam, at in rarefactionibus iusto maiorem, donec vtraque regula aeri infinite rarefacto elasticitatem nullam attribuat.

XXVIII

XXVIII. Si certo constaret ratio quam n ad i habet, quantum haec regula in quouis casu a vero aberret, assignari posset: Nec non aeris vis elastica maxima AD, seu ratio AD : QM. Ob hunc defectum pono saltem $n : i = q : 1$, eritque $n = qi$, adeoque vis elastica QM erit vt $\sqrt[3]{q^2 i^2} - \sqrt[3]{(qi-i)^2}$, diuidatur per $\sqrt[3]{i^2}$ vtpote constantem, erit vis elastica aeris naturalis vt $\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-1)^2}$. Assumatur quiuis alius condensationis gradus, quo densitas sit ad naturalem vt s ad 1. Erit ea densitas si, adeoque vis elastica respondens erit $\sqrt[3]{qi^2} - \sqrt[3]{(qi-si)^2}$, erit ea igitur vt $\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-s)^2}$. Vnde sequitur, elasticitatem aeris naturalis esse ad elasticitatem aeris s vicibus densioris vt 1 ad $\frac{\sqrt[3]{q}^2 - \sqrt[3]{(q-s)}^2}{\sqrt[3]{q}^2 - \sqrt[3]{(q-1)}^2}$ sed secundum regulam vulgarem oporteret esse vt 1 ad s, si $s = q$ tum erit DR $= q$. QM, et AD $= \frac{\sqrt[3]{q}^2}{\sqrt[3]{q}^2 - \sqrt[3]{(q-1)}^2}$ .QM. Quia vero q valde est magnum respectu 1, erit $\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-1)^2} = \frac{2}{3\sqrt[3]{q}}$; erit itaque AD $= \frac{3}{2}q$. QM. Regula ergo ea plus dimidio nunquam a vero aberrare potest.

XXIX. Cognita pro quouis condensationis gradu aeris elasticitate, poterit inde inueniri quanta esse debeat aeris densitas in data quacunque altitudine. Cum enim aer naturalis comprimatur a pondere aeris superincumbentis, necesse est, vt, quo altius ascendatur, aer ob imminutum ibi atmosphaerae pondus rarior fiat. Nam vbique eousque aer dilatatur, quoad preſſio aequalis ſit eius elaſticitati. Sit igitur curua BMV ſcala denſitatum aeris, cuius nimirum applicatae PM exprimant aeris denſitates in altitudinibus P. Sit A is locus, quo denſitas aeris eſt maxima, adeoque vbi $AB = n$. Accipiatur locus quicunque P, cuius altitudo AP ſuper A dicatur x; denſitas vero ibi ſeu $PM = y$, erit ibi aeris vis elaſtica vt

Fig. IV.

$\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-y)^2}$, cui proportionalis eſſe debet preſſio ab aere ſuperiore PT orta. Preſſiones autem ſunt vt denſitates et altitudines coniunctim: Quamobrem erit preſſio aeris ſuperioris vt area MPTV i. e. vt $-\int y dx$. Eſt itaque $a\int y dx = \sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-y)^2}$, adeoque $a y dx = \frac{2dy}{3\sqrt[3]{(n-y)}}$; vnde $a dx = \frac{2dy}{3y\sqrt[3]{(n-y)}}$ ſeu poſitio $a = \frac{2}{3}$, erit $dx = \frac{dy}{y\sqrt[3]{(n-y)}}$ quae hoc modo integrari debet, vt poſito $x = o$, y fiat $= n$.

XXX. Si fiat $n = y$ erit tum dx infinities maius quam dy, ergo tangens in B parallela erit axi verticali AT. Propterea haec curua alicubi punctum flexus contrarii habere videtur; id quod hoc modo inuenietur. Quia eſt $dx = \frac{dy}{y\sqrt[3]{(n-y)}}$; erit $dy = y dx \sqrt[3]{(n-y)}$. Aſſumto dx pro conſtante, erit $ddy = dy dx \sqrt[3]{(n-y)} - \frac{1}{3} y dx dy (n-y)^{-\frac{2}{3}} = o$. Vnde $3n - 3y = y$. Conſequenter $y = \frac{3}{4} n$. Quam ob rem punctum flexus contrarii eo erit loco, quo denſitas aeris eſt ad maximam vt 3 ad 4. Applicetur

cetur igitur $CD = \frac{3}{4}$ AB, erit in puncto D punctum flexus contrarii. Est deinde subtangens huius curuae $\frac{ydx}{dy} = \frac{1}{\sqrt[3]{(n-y)}}$. Vnde colligitur si y fuerit respectu ipsius n valde paruum, tum esse subtangentem constantem; Vt adeo hoc in casu haec curua cum logarithmica confundatur.

XXXI. Potest quidem aequatio pro ista curua $dx = \frac{dy}{y\sqrt[3]{(n-y)}}$ ad quadraturam circuli et logarithmos reduci: sed inde multo difficilior enascitur eius curuae constructio, quam si per quadraturas construatur. Designet igitur AMC parabolam cubicalem secundam, vt in fig. 3. sitque $CD = n$. Assumatur aeris densitas quaeuis in CD, puta CQ, ponaturque $CQ = y$. Cuius applicata respondens QM erit $\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-y)^2}$, cui proportionalis accipi $-\int ydx$ debet. Dicatur QM, z, breuitatis ergo: eritque $-ydx = dz$ et $dx = \frac{-dz}{y}$, atque $x = \int \frac{-dz}{y}$. Ducatur PM, quae erit y, et in ea producta, si opus est, capiatur $PN = \frac{1}{y}$, erit area $PBEN = \int \frac{-dz}{y}$. Quapropter in MQ prolongata accipiatur QL, quae sit vt area PBEN. Erit punctum L in curua quaesita. Est enim in ea, ducta LH, $CH = LQ = \int \frac{-dz}{y} = x$, et $HL = CQ = y$. Hoc igitur modo curua DLV determinabitur. Fig. V.

XXXII. Quae hucusque aeris proprietates ex theoria exposita deriuatae sunt, eae nihil absoluti in se continent, sed tantum rationem dant, secundum quam elasticitas aeris pro diuersis densitatibus, humiditatibus et materiae subtilis celeritatibus existimari debeat. Verum

rum nunc abſoluti quid tradam altitudinem columnae mercurialis determinaturus, quam datus aereus globulus *Fig. VI.* ſuſtinere valet. Sit itaque AB diameter horizontalis bullulae aereae, de qua intelligi debent, quae §. 14. inuenta ſunt. Incumbat ei columna mercurialis ABED altitudinis $AD = f$, quae tanta ſit, vt in aequilibrio conſiſtat cum vi, quam bullula habet, ſeſe expandendi. Haec autem columna in ſingulis bullulae punctis perpendiculariter agit in eius ſuperficiem, idque vi, quae eſt vt altitudo columnae f, et baſis ſeu ſuperficies bullulae, quam premit, atque grauitas ſpecifica coniunctim. Cum autem ſemidiameter AC ſit $= a$; erit circulus maximus bullulae $\frac{\pi aa}{2}$, adeoque ſemiſuperficies eius $= \pi aa$, quae eſt baſis, quae a columna mercuriali premitur. Exprimatur porro grauitas ſpecifica mercurii, reſpectu habito ad reliquas grauitates ſpecificas, litera r, erit preſſio, quam columna mercurialis in bullulam exercet $= \pi aarf$.

XXXIII. Haec autem preſſio deſtrui debet preſſione a vi centrifuga materiae ſubtilis orta, quae etiam in ſingula ſuperficiei puncta aequaliter agit. Quamobrem vis, qua vis centrifuga in haemiſphaerium agit, idque extendere annititur, aequalis eſſe debet vi comprimenti columnae mercurialis. Vis autem ea eſt dimidium vis elaſticae totius bullulae, cuius aequale pondus §. 14. inuentum eſt, $\frac{2\pi nkaa}{\sqrt[3]{(m-pm+pn)}^2}\left[\sqrt[3]{(m-i+pi-pm+pn)^2} - \sqrt[3]{(m-i-pm+pn)^2}\right]$; huius ergo dimidio aequari debet pondus columnae mercurialis $\pi aarf$. Vnde ſequens enaſcinafcitur aequatio : $rf\sqrt[3]{(m-pm+pn)^2} = nk$ $[\sqrt[3]{(m-i+pi-pm+pn)^2}-\sqrt[3]{(m-i-pm+pn)^2}]$ feu $f=\frac{nk}{r}$ $\left(\sqrt[3]{\left(\frac{m-i+pi-pm+pn}{m-pm+pn}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\frac{m-i-pm+pn}{m-pm+pn}\right)^2}\right)$.

XXXIV. Vt haec aequatio tractatu facilior euadat faltem pro naturali aeris ftatu, pono i admodum paruum refpectu n; et propterea erit $\sqrt[3]{(m-i+pi-pm+pn)^2}$ $=\sqrt[3]{(m-pm-+pn)^2}+\frac{2(pi-i)}{3\sqrt[3]{(m-pm+pn)}}$. Atque eodem modo $\sqrt[3]{(m-i-pm+pn)^2}=\sqrt[3]{(m-pm+pn)^2}-\frac{2i}{3\sqrt[3]{(m-pm+pn)}}$. Quibus valoribus fubftitutis, orietur haec aequatio $rf(m-pm+pn)=\frac{2pnik}{3r}$, vnde $f=\frac{2pnik}{3r(m-pm+pn)}$. Sed fi ponatur humiditas in aere euanefcens, erit $p=1$. Tum igitur erit $f=\frac{2ik}{3}$. Si autem aer vaporibus fuerit infectus p eo minor erit vnitate, quo plus vaporum in aere hofpitatur ; ponatur itaque hoc in cafu $p=1-q$, erit $f=$ $\frac{2nik(1-q)}{3r(qm+n(1-q))}=\frac{2ik}{3r}-\frac{2qmik}{3r(qm+n(1-q))}=\frac{2ik}{3r}\left(1-\frac{qm}{qm+n(1-q)}\right)$.

XXXV. Cum autem f indicet altitudinem columnae mercurialis in aequilibrio confiftens, exprimet eadem litera f altitudinem mercurii in barometro. Ex inuenta igitur aequatione, datis velocitate materiae fubtilis in bullulis gyrantis, aeris et materiae fubtilis grauitatibus fpecificis, atque quantitate aquae in aere verfantis, inueniri poterit altitudo mercurii in barometro. Nam r grauitas fpecifica mercurii, vt et m grauitas fpecifica aquae aliunde iam conftant. Percurram itaque cafus, quibus mercurius aſcendere, et quibus deſcendere debet; vt inde pateat, quid in aere acciderit et aſcendente et deſcendente mercurio in barometro. Ad hoc cum tantum ratione opus ſit, negligo factorem $\frac{2}{3}r$ tanquam conſtantem, eritque f vt $ik\left(1-\frac{qm}{qm+n(1-q)}\right)$.

XXXVI. Hinc igitur conſequitur manente facto, ik mercurium in barometro aſcendere decreſcente fractione $\frac{qm}{qm+n(1-q)}$. Haec vero fractio creſcente q etiam creſcit, decreſcente vero q decreſcit: Nam creſcente q elemento dq, fractio creſcet elemento $\frac{mndq}{(qm+n(1-q))^2}$. Quamobrem manente facto ik mercurius in barometro aſcendere decreſcente aeris humiditate; ea vero aucta mercurius deſcendere debebit. Atque hanc puto eſſe rationem, cur aſcenſus mercurii in barometro plerumque coelum ſerenum, deſcenſus vero pluuiam aduerſamque tempeſtatem praenunciet: Illo enim caſu aer maximam partem a vaporibus vacuus eſt, hoc vero iis magis infectus.

XXXVII. Poſſunt quidem aliae concurrere rationes, ob quas mercurius aſcendere vel deſcendere queat immutata vaporum quantitate: Quando ſcilicet factum ik creſcit vel decreſcit. Sed fortaſſe hoc factum ſenſibiliter neque creſcere neque decreſcere poteſt, propter alterutram literam eadem fere ratione auctam, qua altera diminuitur. Nam velocitas materiae ſubtilis, cuius quadratum eſt vt k, augmenta accipit aucto calore, ſed idem calor aerem rarefacit, et quantitatem i minorem efficit, vt ergo factum ik quaſi ſemper conſtans permaneat. Ex

quo

quo intelligitur tute ſemper aſcenſum vel deſcenſum mercurii diminutae vel auctae vaporum in aere verſantium quantitati attribui poſſe, quanquam negari non poſſit et factum ik quodammodo effectum humiditatis et augere et diminuere poſſe.

XXXVIII. Neque vero hinc inferre licet, barometrum idem ac hygrometrum praeſtare oportere; cum et hoc humiditatem aeris monſtret. Sed id conſiderandum eſt, barometri effectus a tota aeris maſſa ſeu totius atmoſphaerae ſtatu pendere; hygrometri autem a ſolo aere id ambiente. Quamobrem altitudo mercurii in barometro incrementa accipit, ſi vniuerſus aer a vaporibus liberatur, decrementa vero ſi is vaporibus impraegnatur. Vnde colligitur hygrometrum fere ſummam ſiccitatem oſtendere poſſe, cum altitudo mercurii minima ſit; et ſimiliter hygrometrum humiditatem indicare poſſe, cum mercuriis ſummam altitudinem attigerit. Plus enim immenſa aeris altitudo in barometrum valet, quam infima haec regio, quae ſola in hygrometrum agit.

XXXIX. Si humiditas aeris euaneſcat, habetur iuxta §. 33. haec aequatio $f = \frac{2ik}{3r}$, quam n non ingreditur. Ex ea igitur cum experimentis ratio $r:i$, vt et altitudo f conſtet, inueni poteſt altitudo k, ex qua graue cadendo velocitatem acquirit ei, qua materia ſubtilis in bullulis aeris gyratur, aequalem; Eſt enim $k = \frac{3rf}{2i}$. Circa quam expreſſionem obſeruo eam excepto coefficiente numero $\frac{3}{2}$ eandem eſſe cum altitudine generante velocitatem, qua ſonus per aerem promouetur, vt ergo velocitas materiae ſubtilis conſtantem habeat rationem ad

velo-

velocitatem foni. Hic autem animum abducaere oportet humiditate aeris, qua accedente k alio modo exprimetur.

XL. Obferuatur altitudo mercurii in barometro a 22. vsque ad 24. et vltra dig. Pedis Rhenani. Cum autem aerem a vaporibus vacuum fupponam, attribuo literae f maximam, quam habere poteft altitudinem, nempe 2460 fcrup. Ped. Rhenani. Dein rationem r ad i pono vt 10000 ad 1. Quemadmodum ex experimentis de grauitate aeris concluditur. Quibus pofitis erit $k = \frac{30000 \cdot 2460}{2} = 36900$ pedibus. Adeoque materia fubtilis velocitate mouetur tanta, quanta a graui ex altitudine 36900 ped. in vacuo defcendente acquiritur. Si ergo haec materia fua velocitate in directum pergeret, conficeret vno minuto fecundo $1518\frac{1}{2}$ ped. Rhenanos.

XLI. Ifto hanc differtationem finio, cum defint accurata experimenta, ex quibus reliqua adhuc defiderata determinentur, et quibus Theoria haec plenius confirmetur. Incerta eft adhuc ratio n ad i, feu quam habet grauitas fpecifica materiae fubtilis ad grauitatem fpecificam aeris. Ad hanc vero inueftigandam accuratis experimentis ad id facientibus inftituendis operam ftudiumque adhibebo. Quantitas autem n fi haberetur, facile formulae inuentae ad praxin applicarentur; atque aliis idoneis inftrumentis adhibendis quouis tempore, quantum aquae in aere contineatur, affignari poffet. Et forfitan multa infuper alia, ad quae, iis quae fufficiunt cognitis, quafi manu duceremur.

PLAN-

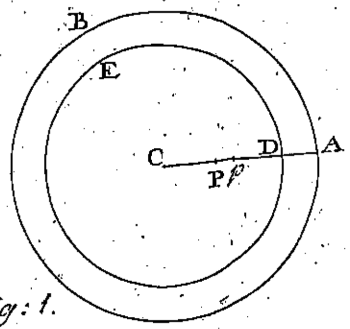

fig: 1.

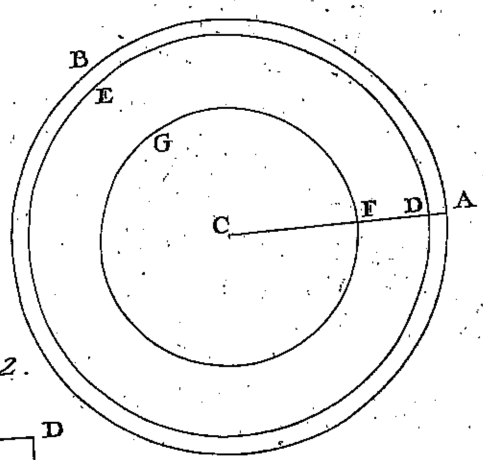

fig: 2.

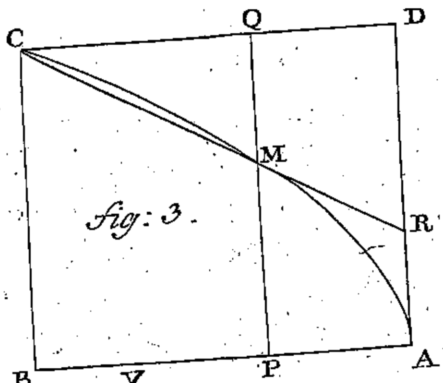

fig: 3.

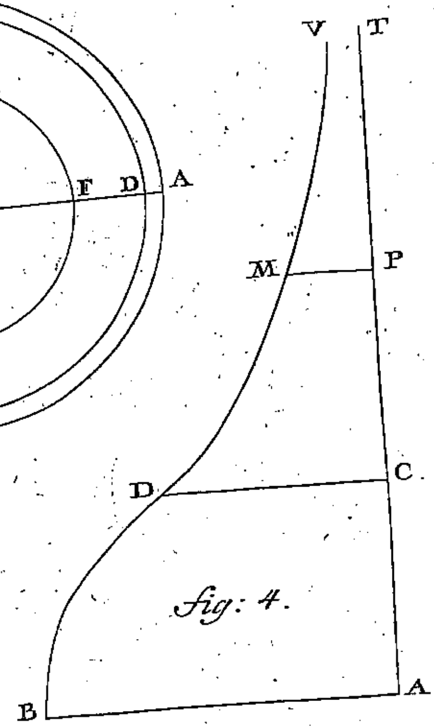

fig: 4.

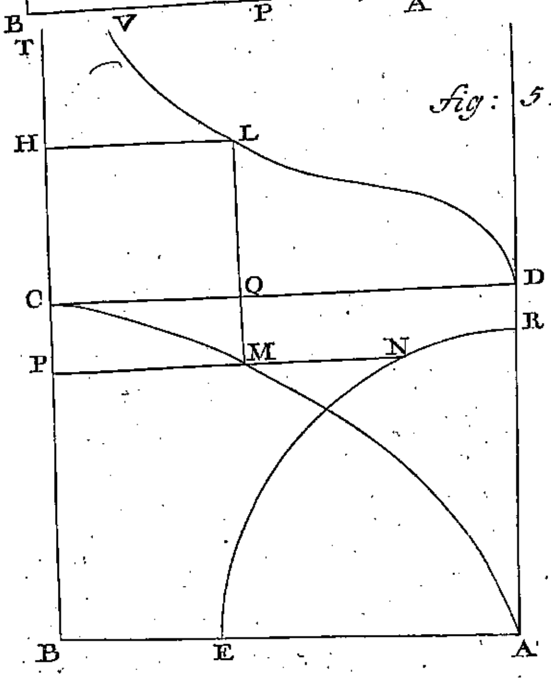

fig: 5.

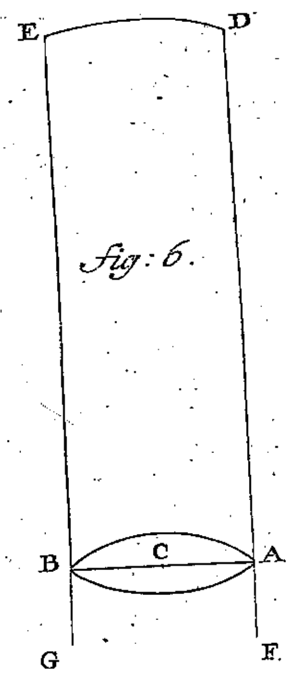

fig: 6.