1729

Dissertatio de novo quodam curvarum tautochronarum genere

Leonhard Euler

Dissertatio de nouo quodam CVRVARVM TAVTOCHRONARVM GENERE

Auctore

Leonh. Eulero.

I.

M. Iul. 1727.

EDidit ante annum et quod excurrit D. Sully Parisiis descriptionem noui cuiusdam horologii; quod peculiari modo fabricatum ad dimetienda mari tempora, et inde determinandam locorum longitudinem, perquam idoneum iudicat. Praecipuum eius inuentum, consistit in nouo quodam oscillationum genere a vacillatione trochleae circa axem petito. Idque efficit ope ponderis, trochleam semper versus certum situm sollicitantis. At quomodo istae oscillationes isochronae efficiendae sint, de eo nondum plane certus est, cum id pendeat ab accurata descriptione curuae cuiusdam lineae ad id requisitae; quam autem aliter non nisi crebra tentatione cognouit, eiusque figuram crassa Minerua determinauit. De hac curua ad tautochronismum desiderata in praesenti dissertatione agere animus est, aliosque exhibere modos, quibus aequalitas oscillationum conseruari poterit.

II.

II. Huc fere autem reducitur modus,quo Sully in trochlea oſcillationes obtinere conatur.In centro trochleae C applicat duas laminas incuruatas CE, CF inter quas dependet filum CP, pondere P oneratum, et hic ſitus, quo filum neutram laminam tangit, eſt naturalis. Ex quo ſi pellatur, vt filum in M alterutram laminam tangat, ex natura vectis pondus P vim habebit trochleam in ſitum naturalem ſollicitandi. Et ea propter oſcillationes orientur, dum trochlea nunc cis nunc vltra ſitum hunc naturalem extrauagabitur. *Fig. I.* *Fig. II.*

III. Hae oſcillationes, ſiue minus ſiue magis ſint amplae, vt iſochronae reddantur, id pendet a curuatura laminarum affixarum, vt haec rite determinetur: et id ipſum eſt, quod D. Sully deſiderat.Eſt autem hoc problema valde intricatum,plurimaque diuerſa complectens, quae diligenter ſunt euoluenda et diſtinguenda: Quod rotam attinet, ea cum laminis ita debet eſſe comparata, vt indifferens ſit ad quemuis ſitum recipiendum, vnde centrum commune grauitatis in axe trochleae poſitum ſit oportet. Atque id in poſterum aſſumam, vt nimiam calculi prolixitatem euitem.

IV. Circa filum conſideranda ſunt, an ſit ſemper verticale? an ſemper verſus eandem plagam dirigatur?an vero ſecus? Circa potentiam autem filo applicatam ſequentia. 1. An ipſa habeat vim inertiae? vt ſi pondus appendatur; an vero non, vt elaſtra fere. Haec probe ſunt diſtinguenda, potentia enim vi inertiae praedita non omnem vim ad trochleam mouendam impendit, ſed quidquam ad ſui ipſius motum requiritur. Cum econtra

dopotentia inertia destituta omnem vim ad motum trochleae impendere queat.

V. 2. An uniformiter, i.e. semper aequali vi trahat, vt pondus, vel elastrum maxime tensum, cuius vis in remissionibus non nimis magnis quasi eadem persistit; an autem modo magis modo minus agat, vt elater, chorda tensa, aer condensatus, vel rarefactus. Quae con-

Fig. III. siderationes omnes diligenter in computum duci debent, vt laminarum curuatura inueniatur. Machina Sulliana maxime ex hisce est composita. Filum CD vecti AD circa A mobili, in B est alligatum, et vecti in D pondus P incumbit, vnde fit, vt nec filum semper verticale maneat, neque pondus vniformiter trahat, et insuper vis inertiae non exigua adsit.

VI. Casum autem simplicissimum hic primo examini subiicere animus est, et pro eo curuam quaesitam determinare, nec non modum monstrare, quo in praxi commode applicari possit: dein quantitatem cuiusvis partis definiam, vt oscillationes absoluantur dato tempore. Et tandem alium euoluam casum, qui non contemnendum in re nautica vsum mihi praestare videtur. Simplicissimus vero mihi est casus, quo filum perpetuo verticale persistit, potentia vnformiter agens et omni inertia destituta applicatur.

VII. Problema hoc sensu acceptum sic soluo. De-

Fig. IV. signet linea CM laminam alterutram in quouis situ non naturali, sitque CB linea verticalis, cui parallela erit fili directio MR curuam in M tangens; ex puncto contactus M ducatur in CB perpendicularis MT; erit haec etiam normalis in curuam. Ducatur recta CO, designans angulum

gulum BCO, quo machina ex ſitu naturali eſt deturbata. Centro C radio arbitrario CB deſcribatur circulus BO, cuius arcus BO metietur angulum BCO, quibus factis hoc modo curuam detego; patet potentiam ſecundum MR trahentem trochleam in ſitum naturalem perducere conari. Sit ea potentia P, erit illa vis vt P. TM. Eſt PM perpendiculum ex M in verticalem CB.

VIII. Cum autem haec vis continuo aliter reſpectu hypomochlii C applicetur, ei quaero aequipollentem radio CO in O normaliter applicandam. Producatur RM in N vsque, vbi occurrat horizontali ex C ductae, potentia P eundem edit effectum ac ſi radio CN in N applicata verſus NR traheret. At ex natura vectis eſt potentia in O applicanda et ſecundum normalem ad CO agens, aequipollensque potentiae P, ad potentiam P vt CN ſiue TM ad CO. Erit ergo ea $= \frac{P.TM}{CO}$ ſeu proportionalis, ob P et CO conſtantes, ipſi TM.

IX. Nunc ad curuam determinandam iſochroniſmum conſiderare oportet, qui obtinetur, ſi acceleratio ſpatio percurrendo ſemper proportionatur, poſſunt autem oſcillationes trochleae tanquam oſcillationes penduli CO ſpectari, quae ſi ſint iſochronae, et trochleae oſcillationes tales erunt. Percurrendus vero eſt puncto O arcus BO, et huius puncti O acceleratio eſt vt vis applicata $\frac{P.TM}{CO}$ i. e. vt TM; ad obtinendum ergo iſochroniſmum oportet, vt arcus BO vel angulus BCO proportionetur ipſi TM.

X. Quum linea TM sit in curuam normalis, in eamque CT, ex puncto fixo C, perpendicularis, atque linea CO ad curuam habeat vbique eundem situm; Problema huc reductum est, vt, data recta CO positione, in eaque puncto C, inueniatur curua CM huius proprietatis, vt, ducta normali MT, in eamque ex centro C perpendiculo CT, fit linea TM proportionalis angulo TCO, seu differentiale ipsius TM elemento anguli TCO.

Fig. IV. et V.

Fig. V.

XI. Vt obtineam haec elementa, puncto M accipio proximum m, et ex eo duco normalem mt, priori occurrens in R centro circuli osculatoris; in eamque demitto perpendiculum Ct priorem normalem in p secans; erit pT elementum lineae TM; at elementum anguli TCO est angulus TCp: vt ergo pT elemento ang. TCp proportionale sit, oportet, vt sit CT constans, quae est proprietas specifica curuae inueniendae. Patet hinc puncta T et t in R cadere debere, vt pt elementum ipsius CT sit $=o$.

XII. Vt ad huius curuae cognitionem propius accedam, centro C interuallo CB$=1$ describo circulum BS, qui secatur a radiis CM Cm in S et s. Vocetur BS, x et CM, y; erit S$s=dx$ et $mr=dy$, ducto arculo Mr centro C; vnde ob triangula CSs, CMr similia, obtinetur M$r=ydx$. Cum CT constans esse debeat, ponatur CT$=1$. Erit TM$=\surd(yy-1)$. Dein ob similia $\triangle\triangle$Mrm, MTC habetur CT(1):TM $[\surd(yy-1)]=mr(dy)$: M$r(ydx)$; vnde elicitur haec aequatio $dy\surd(yy-1)=ydx$: seu $dx=\frac{dy}{y}\surd(yy-1)$

XIII

XIII. Ad conftruendam fuccinctius hanc aequationem, pono $V(yy-1)=z$; erit $y=V(zz+1)$ et $dy=\frac{zdz}{V(zz+1)}$. His valoribus fubftitutis obtineo hanc aequationem $dx=\frac{zzdz}{zz+1}=dz-\frac{dz}{zz+1}$, quae aequatio ergo ope rectificationis circuli conftrui poteft. Centro C radio CB=1 defcribatur circulus NBST, quem in B tangat recta BP, in qua accipiatur vtcunque BP=z, ducaturque CP fecans circulum in N; erit arcus BN$\int\frac{dz}{zz+1}$, et CP=$V(zz+1)=y$. Eft autem $x=z-\int\frac{dz}{zz+1}$: fumatur ergo a puncto B arcus BS=BP−BN; erit BS=x. Radius CS in M producatur, vt fit CM=CP=y erit punctum M in curua quaefita. *Fig. VI.*

XIV. Curuam hoc modo conftructam ex ipfius circuli NBST euolutione generari obferuo. Ducatur enim ad curuam in M normalis MT, tanget ea circulum in T, cum ex §. 11. perpendiculum CT ex C in eam normalem demiffum fit=1. Et infuper ex eodem §. normalis TM eft ipfe curuae in M radius ofculi, qui cum circulum continuo tangat, liquet, circulum effe euolutam huius curuae inuentae: adeoque ea facilius et commodius euolutione fili circulo circumducti defcribetur.

XV. Quod iam attinet ad tempus abfolutum, id quoque fupputandum eft, vt liqueat, quo modo trochlea et potentiae fint inftituendae, vt ofcillationes dato tempore abfoluantur. Quare ad tempus totius ofcillationis inueniendum confiderabo accelerationem quamuis momentaneam. Sit trochlea CBS homogenea et aequabilis *Fig. VII.*

bilis vbiuis : ſit eius pondus $=Q$; et radius eius $CB=1$. Praeſtet potentia eundem vbique effectum ac pondus P hoc modo innoteſcet tempus vnius oſcillationis.

XVI. Ducta verticali CB conſiſtat curuae initium in loco quovis S; ſitque curua SM, in cuius puncto M tangens MQ ſit verticalis: adeoque radius oſculi BM erit horizontalis in B terminatus. Erit itaque MQ directio potentiae. Deſcendat curua in ſitum proximum, nempe punctum S in s, abibit M in m et MQ in mq; erit denuo Bm radius oſculi horizontalis. Ducantur radii CS, Cs, et rectae Cm, CM; centro C, interuallo Cm, deſcribatur arculus $m\mu$ curuae in altero priori ſitu in μ occurrens, erunt puncta m, μ duo puncta homologa et reſpondentia; ergo ang. $mC\mu = SCs$.

XVII. Peruenit porro potentia ex Q in q deſcripſit adeo ſpatiolum $Qq = m\mu$, quare ducta qn parallela BM; erit $Qn = M\mu$ propter eandem fili longitudinem et ob $CSM - Csm = M\mu$. Deſcendit igitur potentia hoc momento per Qn; vnde generari debet vis viua $P.Qn$, quae tota in trochleam transferetur: quia potentia inertiae expers ſupponitur. Vis ergo viua in trochlea, dum motu angulari SCs gyratur, augeri debet vi $P.Qn$.

XVIII. Sit velocitas puncti S, aequalis acquiſitae ex altitudine v. Erit vis viua totius trochleae $=\frac{Qv}{2}$; vnde eius differentiale $\frac{Qdv}{2} = P.Qn$; ergo $dv = \frac{2P.Qn}{Q} = \frac{2P.M\mu}{Q}$ Eſt autem ob $\Delta\Delta$ ſimilia $M\mu m$, et BmC; $M\mu : Mm = Bm$: BC

BC ; ergo $M\mu = \frac{Bm.Mm}{BC}$: at $Mm = Ss$; vnde $M\mu = \frac{Bm.Ss}{BC}$. Ergo $dv = \frac{2P.Bm.Ss}{Q.BC}$, consequenter momentum $\frac{dv}{Ss} = \frac{2P.Bm}{Q.BC} = \frac{2P.BS}{Q.BC}$, ob BS euolutam curuae SM, adeoque aequalem radio osculi BM seu Bm.

XIX. Inuento momento $\frac{dv}{Ss}$ facili negotio reperietur longitudo penduli isochroni hoc modo: sit pendulum isochronum OA oscillans in cycloide NA. Sitque arcus $AN =$ arcui BS et contemporaneus. Sumatur $Nn = Ss$, ducaturque verticalis nt, erit momentum per $Nn = \frac{nt}{Nn}$: id quod aequari debet momento $\frac{2P.BS}{Q.BC}$: Sed ex natura cycloidis est $\frac{nt}{Nn} = \frac{AN}{AO} = \frac{BS}{AO}$; ergo $AO = \frac{Q.BC}{2P}$. Fiat ergo vt pondus potentiae aequiualens, ad pondus trochleae, ita dimidius radius BC ad quartam, quae erit longitudo penduli isochroni.

XX. Potentiam ideo adhibui inertia destitutam, ne ad velocitatem in ea generandam vis requiratur. Hinc igitur facile patet, si potentia ita sit exigua, vt pondus ei suffectum nullam ad trochleae pondus habeat rationem sensibilem, vim in eo generandam reiici posse; adeoque loco P poterit, vt Sully vult, pondus substitui, modo valde exiguum respectu Q. Vt autem nihilominus oscillationes trochleae dato tempore absoluantur BC, inde determinari debet; fiat enim, vt Q ad 2P ita AO ad BC: sit Q centies maius quam P, sitque AO longitudo penduli oscillantis singulis minutis secundis, nempe $= 3166$ scrup. ped. Rhen. erit $BC = 63$. scrup. quae est quantitas satis magna pro radio BC. Atque hoc sensu pondus ſatisfaciet appenſum, vt Sully deſiderat. Id vt ad ſenſum verticale perſeueret, neque oſcilletur, cautelae ab Autore adhibitae locum obtinebunt; praecipue vero filum ſatis longum eſſe debet, vnde ob radium BC exiguum, directio fili ſemper fere verticalis obtinebitur.

Fig. VIII. XXI. Quin et hoc modo commode iſti difficultati medebimur. Conſtruatur trochlea ED multo maior, quam circulus generator BF curuae laminis tributae; hoc modo trochleae ingens erit imprimendus motus, cum tamen pondus appenſum ob circuli BF paruitatem vix moueatur, vt motus in eo generandus merito reſpectu motus trochleae reiici queat, praecipue ſi inſuper pondus P ad trochleae pondus exiguam habuerit rationem. Illo autem caſu dicto radio trochleae CD $= a$ erit longitudo penduli iſochroni $= \frac{Q \cdot a^4 \cdot BC}{2P}$. Hac ergo ratione horologium Sully emendatum, multo maiorem praeſtare poterit vtilitatem.

XXII. Ex dictis patet praecipuam difficultatem circa directionem fili, quod non ſemper verticale perſiſtat, verſari. Hoc vero incommodum ſequentis curuae conſtructione tolletur. Ducatur filum ante, quam ipſi potentia applicetur, per foramen quoddam fixum, hoc modo fiet, vt filum perpetuo verſus datum punctum directum ſit. Quaeſiui igitur pro hoc caſu curuam tautochroniſmum producentem, et incidi in ſequentem proprietatem.
Fig. IX. Sit C centrum trochleae, BM curua quaeſita A punctum illud fixum ſeu foramen, per quod filum ſemper

tranſit

tranſit. Dictis uncn $AC = a$, et quouis radio $CM = y$. Sit porro PM normalis in curuam, et CP normalis in MP poſitis $CP = p$ et $PM = t$, deſignanteque b conſtantem pro lubitu accipiendam; hanc obtinui aequationem naturam curuae experimentem $b\sqrt{(aa-tt)} - bp = p\sqrt{(aa-tt)}$. Ex hac aequatione, cum ſit algebraica, per notas regulas curua deſiderata ope circuli rectificatione conſtruetur, ſimili modo, quo in §. 13. curua ibi inuenta erat conſtructa.

XXIII. Obtinetur autem data aequatio $b\sqrt{(aa-tt)} - bp = p\sqrt{(aa-tt)}$ hoc modo: Sit C centrum trochleae, O punctum fixum ad quod filum ſemper tendit, ſeu in O ſit foramen per quod filum eſt ductum, cui infra foramen potentia inertia carens ſit applicata, vt filum perpetuo per hoc foramen O tranſeat: Sit CM ſitus quiuis curuae inueniendae, quam tangat recta OM, directio fili, in hoc curuae ſitu ex centro trochleae C demittatur in OM productam; perpendiculum; CN exprimet haec CN quantitatem vis, quam potentia filo infra foramen applicata, ad trochleam mouendam impendit, cum potentia ea ponatur conſtans. Fig. X.

XXIV. Ex iſochroniſmi principio autem vis ad trochleam mouendam applicata debet eſſe, vt via deſcribenda, donec in ſitum naturalem reuertatur, haec via deſcribenda menſuranda eſt ex angulo, quo ſitus hic CM a naturali diſtat, ducatur linea CB quae ex naturali ſitu peruenit in CO; erit angulus BCO ille, qui exprimit viam deſcribendam, oportet ergo vt ſit linea CN, quae exprimit vim ad mouendam trochleam in ſitu CM, proporportionalis angulo BCO, seu ex puncto M ducatur MP normalis in curuam in puncto M, et ex C in eam demittatur perpendicularis CP, erit MP=CN adeoque debet esse MP, vt angulus BCO.

Fig. XI. XXV. Sit iam CB in situ naturali, fiatque ea aequalis distantiae foraminis a centro trochleae C, sitque CM curua inuenienda, accipiatur punctum quoduis M in curua, in eoque tangatur curua a linea MO, centro C, radio CB describatur arcus circuli secans tangentem in M in O, erit hoc punctum O foraminis situs respondens puncto curuae M. Ducatur linea CO; erit angulus BCO idem cum angulo BCO in fig. X. ex M erigatur perpendicularis in curuam MP, cui in P occurrat perpendiculum CP ex C in eam demissum, oportet hanc MP proportionalem esse angulo BCO, seu elementum ipsius MP proportionale elemento anguli BCO.

XXVI. Vt obtineam haec elementa assumo puncto M proximum m, et ducantur lineae respondentes mo, mp, illa tangens in m, et haec mp perpendicularis in m, quae in p secetur a perpendiculari Cp in ipsam; secabit haec Cp priorem perpendicularem in t, eritque Pt incrementum normalis PM. Iungantur puncta C et o, recta Co, erit angulus OCo, incrementum anguli BCC: ad determinationem curuae CM quaesitae igitur requiritur, vt sit Pt proportionale elemento angulari OCo. Est autem Pt vt angulus PCt ductus in radium PC, erit ergo ang. OCo ad PCt. CP in data ratione, quae sit 1 ad b vt per consequens sit $OCo : PCt = CPt : b$.

XXVII. Concurrant perpendiculares MP, mp in R, in R, centro circuli osculatoris in M erit ang. $PCt = MRm$ ob $\triangle\triangle$ PCt et pRt similia, sed angulus $MRm =$ ang. OMo, qui formatur a tangentibus proximis OM, om; ergo $PCt = OMo$, oportet ergo sit $OCo : OMo = CP : b$: producatur tangens OM in S, donec occurrat perpendiculo CS in se demisso, erunt demisso ex O in mo perpendiculo On, triangula Ono, OSC similia; ergo $Oo : On = CO : OS$. Sunt autem anguli $OCo : OMo = \frac{Oo}{OC} : \frac{On}{OM} = \frac{CO}{OC} : \frac{OS}{OM}$ (substitutis loco Oo et On proportionalibus OC et OS) $= OM : OS$. Est ergo $OCo : OMo = OM : OS$.

XXVIII. Cum autem requiratur, vt sit $OCo : OMo = CP : b$, obtinebitur haec analogia $CP : b = OM : OS$, quae tota ab angulis libera est, et inde habetur haec aequatio $CP.OS = b.OM$. Est autem ob $\triangle COS$ ad S rectang. $OS = \sqrt{(CO^2 - CS^2)} =$ (ob $OC = CB$ et $CS = PM$) $= \sqrt{(CB^2 - PM^2)}$. Dein est $OM = OS - SM = OS - CP = \sqrt{(CB^2 - PM^2)} - CP$; vnde haec aequatio obtinetur $CP\sqrt{(CB^2 - PM^2)} = b\sqrt{(CB^2 - PM^2)} - b.CP$. Vnde curua desiderata determinari debet.

XXIX. Applicentur symbola, et vocetur CB distantia centri trochleae a foramine a, CP, p, et MP, t; habebitur pro curua quaesita haec aequatio $p\sqrt{(aa\ tt)} = b\sqrt{(aa - tt)} - bp$, quae eadem est cum ea quam §. XXII. exhibui. Erit ergo $p = \frac{b\sqrt{(aa - tt)}}{b + \sqrt{(aa - tt)}}$. Ex qua aequatione curua construi poterit atque ad vsum applicari. Si foramen ponatur infinite distans a centro trochleae, erit fili directio ſibi ſemper parallela, adeoque habetur caſus prior, quo inuenta erat CP ſemper conſtans. Poſito enim a infinito, abibit $\sqrt{(aa-tt)}$ in a et obtinebitur $p = \frac{ab}{a+b} =$ ob b reſpectu ipſius a in denominatore euaneſcens.

XXX. Si etiam in hac machina loco elateris pondus applicare commodius viſum fuerit, id vt in priori caſu quoque praeſtari poterit, iisdem obſeruandis monitis, vt pondus ſatis exiguum appendatur, radius trochleae diminuatur, aucto eius pondere, idque tantum, quoad error a vi inertia ponderis oriundus inſenſibilis euadat, machinaeque irregularitatem, quae animaduerti nequeat, inducat. Cum autem curuae ad iſtam machinam requiſitae conſtructio valde ſit operoſa, contra vero curua priori caſui, quo directio fili ad eandem perpetuo plagam tendit, conſtructu ſit facillima, priorem modum huic poſteriori fere praeferendum exiſtimo.

THEO-

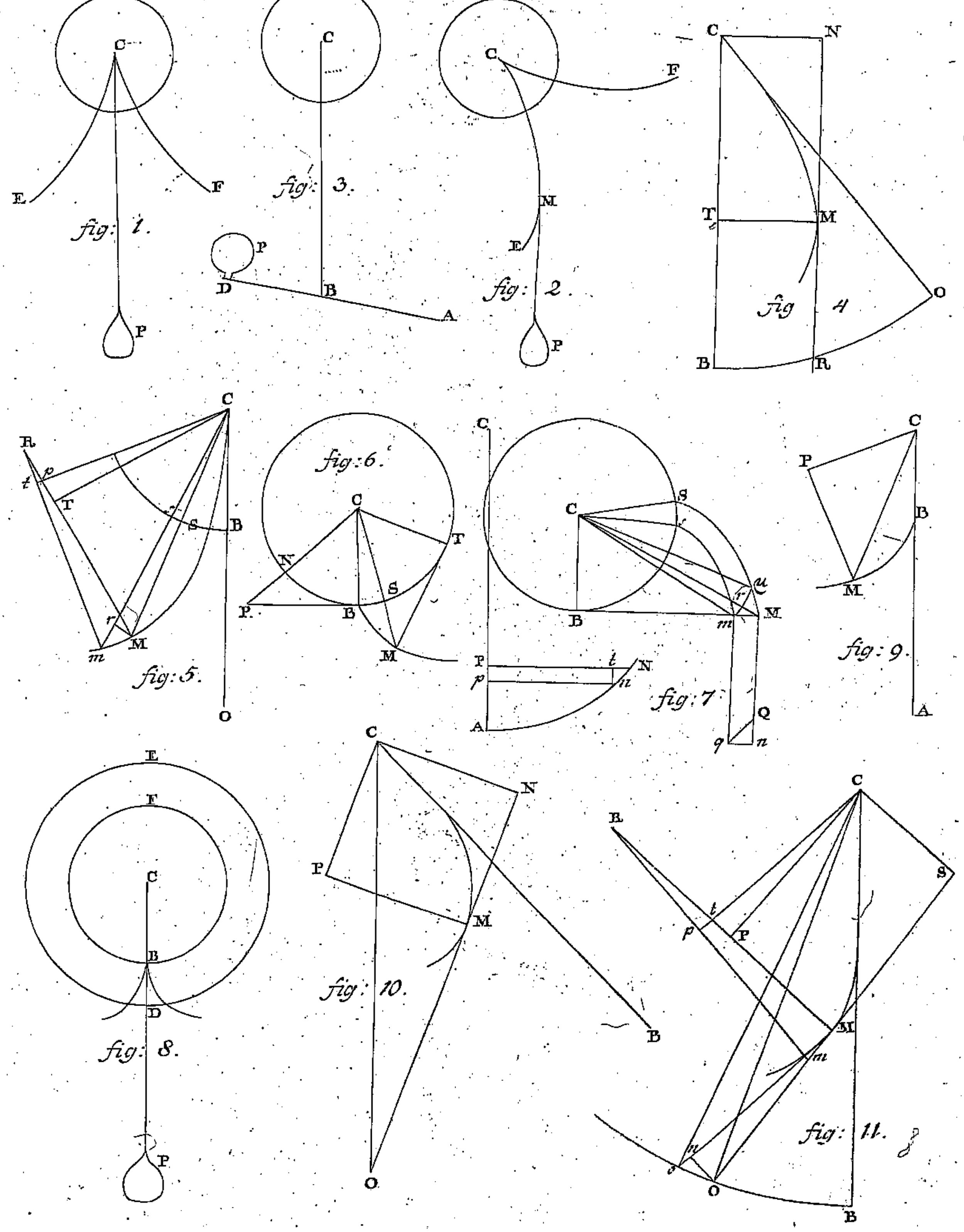
fig: 1.
fig: 2.
fig: 3.
fig 4
fig: 5.
fig: 6.
fig: 7
fig: 8.
fig: 9.
fig: 10.
fig: 11.