1729

Problematis traiectoriarum reciprocarum solutio

Leonhard Euler

14. Atque ita primo casui problematis kepleriani de stationibus abunde satisfactum est. Quod alterum casum attinet, (in quo dantur apsidum ad inuicem positio, vniusque planetae anomalia, quaeritur autem altera stationaria;) attendenti facile patebit, posse, ope antecedentium, solutionem eius exhiberi quoque aequatione algebraica. Verum quia illa ad sextam dimensionem ascendit, nec vlla eam deprimendi spes est, inutilem prorsus ad praxin astronomicam censeo. Quamobrem eius loco commendare malo indirectam solutionem, sumendo anomaliam quaesitam ex coniectura prope veram, atque ita inquirendo commutationem stationariam per problema antecedens, qua inuenta positio prima corrigatur, et calculus repetatur donec sibi consentiat et veritatem exacte prodat.

PROBLEMATIS
Traiectoriarum Reciprocarum
Solutio.

Auctore

Leonhardo Eulero, Basil.

I.

M. Iul. 1727.

PRoblema, de quo in hoc schediasmate agere constitui, est celebre illud et in Actis Lips. multum agitatum, de inueniendis curuis, quae intra datas parallelas eaedem recto et inuerso situ positae et secundum parallelarum directionem hinc inde mo-

motae, mutua interſectione vbiq; angulum eundem conſtituunt, Problema in Act. Lipſ. Suppl. T. VII. a beate hic defuncto Nicolao Bernoulli propoſitum Ita autem cum hoc problemate res ſe habet, vt infinitae, tam algebraicae, quam tranſcendentes curuae ſatisfaciant. Quapropter ad plenam eius et perfectam ſolutionem requiritur, vt exhibeatur methodus, qua curuae ſatisfacientes omnes inueniri queant, ſimpliciſſimae autem tam algebraicae quam tranſcendentes re ipſa eruantur.

II. Dedi nuper, occaſione quaeſtionis, quae Cel. Bernoullio cum Anglo quodam eſt nomen celante, de inueniendis traiectoriis reciprocis algebraicis ſimpliciſſimis, in Act. Lipſ. A. 1727 methodum, qua ex quolibet curuarum ordine, excepto ſecundo et tertio, (ex quorum poſteriore quidem alia via curua ſatisfaciens inueniri poteſt), vna ad minimum traiectoria reciproca exhiberi poteſt, vna cum generali modo, omnes traiectorias reciprocas algebraicas ex curuis cuſpide et circa cuſpidem ramis ſimilibus et aequalibus praeditis et algebraicis, deriuandi. Animus hic eſt generalem huius problematis ſolutionem largiri, ex eaque infinitas formulas generales algebraicas easque maxime foecundas deducere. Quibus adiungam problematis cuiusdam agnati, de inueniendis traiectoriis reciprocis vno plures axes habentibus, ſolutionem.

III. Problema ad analyſin magis accommodatum ſic ſonat: *Inuenire curuam* CBD *circa axem* AB, *talem, vt ductis duabus rectis* MP, NQ, *ab axe vtrinque aequidiſtantibus eique parallelis, ſumma angulorum* PMB + Fig. I.

QND, *ſit vbique conſtans, aequalis nimirum duplo angu-li* DBA, *quem axis cum curua conſtituit.* Inuerſa enim CBD circa axem AB, cadet applicata QN ſuper PM, tum moueatur, donec applicatae QN punctum N incidat in punctum M, et curua ſic ſitu inuerſa ſit *cbd* oportet angulum interſectionis BM*d* eſſe conſtantem: Sunt autem anguli PM*d*, et QND aequales, conſequenter ſumma angulorum, PMB+QND, debet eſſe conſtans. Creſcentibus ergo ex vna parte axis AB, angulis applicatarum cum curua, ex altera parte tantundem decreſcere debent.

IV. Ducta ad axem AB, normali PQ, erit AP=AQ, ducantur duae proximae reſpondentes applicatae, *pm*, *qn*. Erit P*p*=Q*q*. Ducantur ex M et N, tangentes MR, NS, vt habeantur anguli RM*m*, SN*n*, quorum ille eſt decrementum anguli PMB, hic incrementum anguli QND. Quocirca erit ex conditione problematis RM*m*=SN*n*. Vnde natura curuae inueſtigari debet.

V. Sumatur vbique in applicata MP producta, PF, proportionalis angulo RM*m*, aſſumto elemento P*p*, abſciſſae AP pro conſtante, erit punctum F in curua quadam, cuius diameter erit axis traiectoriae BA, erit enim vbique PF=QG. Quare tota difficultas eo eſt reducta, vt ex curua FEG data altera CBD, in qua elementa angulorum BMP ſint reſpondentibus applicatis PF proportionales conſtruatur; Et vt curua CBD euadat traiectoria reciproca, curua FEG debet habere diametrum, et circa eam ramos ſimiles et aequales, cuiusmodi eſt FEG.

Cur-

Curua MBN ex ea conſtructa erit traiectoria reciproca, cuius axis eſt EB, diameter prioris curuae.

VI. Sit AP$=x$. PM$=y$ PF$=u$. Erit angulus RMm, vt $ddy:(dz^2+dy^2)$. Ergo $u=ddy:(dx^2+dy^2)$ poſito dx conſtante, ex qua aequatione datis u et x inueniri debet, y. Ponatur $dy=pdx$. erit $ddy=dpdx$. ergo $u=\frac{dp}{dx+ppdx}$ et $udx=\frac{dp}{1+pp}$. Ex qua aequatione, ob u et x datas, p inuenitur, indeque y; eſt autem $\frac{dp}{1+pp}$ duplum elementum ſectoris circularis, cuius radius eſt, 1. et tangens p; erit ergo $\frac{1}{2}\int udx=$ ſectori iſti circulari. Eſt vero $\int udx=$areae APEF, demta vel addita conſtante inuenitur ergo per quadraturas, p, indeque rurſus per quadraturas y ſequenti modo.

VII. Sit data quaecunque curua IEK diametro EA praedita; ſuper recta AO diametrum EA normaliter ſecante, accipiatur punctum quoduis O, quo centro et radio arbitrario OD deſcribatur circulus DGH, et ex D ducatur tangens DQ. Ducta quacunque applicata PF, ſpatio PFID aequalis ſumatur ſector DOG, et producatur DG in Q. ex Q ducatur ipſi DA parallela QN, occurrens applicatae FP productae in N; Erit punctum N in curua DN tali, vt ſit PN$=p$, ſi ſit AP$=x$. Hic dimidium, quod ſuperiore §. inuentum eſt, negligitur, cum enim $ddy:(dx^2+dy^2)$ ſaltem proportionetur ipſi u, etiam $\int udx$, tantum proportionalis aſſumi poteſt, ſectori DOG. vnde nihil intereſt ſiue dimidius ſector ſiue totus ſumatur, et dein ſiue $\int udx$ ab applicata DI, ſiue ab AF computetur. Fig. II.

VIII. Inuenta curua DN facili negotio habetur curua DM traiectoria reciproca, cum enim ſit $dy = pdx$ accipiatur vbique PM proportionalis areae DPN, erit punctum M, in traiectoria reciproca, cuius axis eſt AB, diameter curuae IEK aſſumtae. Apparet hic ſimul, infinitas, ex vnica aſſumta IEK, traiectorias reciprocas inueniri poſſe, prout enim transuerſalis DA aliter ducitur, punctaque O et D aliter aſſumuntur, ita aliae reſultant traiectoriae reciprocae. Dein etiam pro varia ratione, quae ponitur inter PM ſpatium DPN, traiectoriae variae formantur. Vnde patet data vna traiectoria reciproca, applicatas in eadem ratione augendo vel diminuendo, infinitas inueniri alias traiectorias reciprocas.

IX. Si ſpatium DPFI aequale accipiatur quadranti ODH, tangens DQ ipſique aequalis applicata PN euadit infinita, eritque tum PN aſymtotos curuae DN; Sin ſpatium illud maius fuerit quadrante, applicata PN erit negatiua. Traiectoriae autem DM applicata PM euadet, vbi PN eſt infinita, tangens curuae. Et deinde abeunte PN in negatiuam applicata PM decreſcet, quare curua DM habebit in M punctum reuerſionis. Si ſpatium DPN, exiſtente PN aſymtoto, eſt infinitum, applicata PM quoque erit infinita, adeoque aſymtotos etiam curuae DM.

X. Sit exempli gr. $u = \frac{aab}{xx+aa}$ et hinc eruatur aequatio inter x et y cum ſit u, vt $ddy : (dx^2 + dy^2)$ erit $bdx^2 + bdy^2 = aaddy + xxddy$ ponatur $dy = pdx$ erit $ddy =$

dpdx

$dpdx$, quibus valoribus ſubſtitutis habetur $bdx + bppdx = aadp + xxdp$. Ergo $\frac{bdx}{aa+xx} = \frac{dp}{1+pp}$ cuius aequationis vtriusque membri integratio a circuli quadratura dependet. Huc autem aequatio ea reducetur $\frac{b}{a}\left(\frac{dx}{a+x\sqrt{-1}} + \frac{dx}{a-x\sqrt{-1}}\right) = \frac{dp}{1+p\sqrt{-1}} + \frac{dp}{1-p\sqrt{-1}}$. Quae integrata abit in hanc $bl(a+x\sqrt{-1}) - bl(a-x\sqrt{-1}) = al(1+p\sqrt{-1}) - al(1-p\sqrt{-1}) + alh$ erit ergo $\left(\frac{a+x\sqrt{-1}}{a-x\sqrt{-1}}\right)^{\frac{b}{a}} = \frac{h+hp\sqrt{-1}}{1-p\sqrt{-1}} = \frac{hdx+hdy\sqrt{-1}}{dx-dy\sqrt{-1}}$. Sit $b=a$, et $h=\sqrt{-1}$ erit $\frac{a+x\sqrt{-1}}{a-x\sqrt{-1}} = \frac{dx\sqrt{-1}-dy}{dx-dy\sqrt{-1}}$ quae reducta dat $dy = \frac{x-a}{x+a}dx$. Si ſit $b=2a$ manente $h=\sqrt{-1}$ erit $dy = \frac{2ax+xx-aa}{2ax-xx+aa}dx$. Et ita porro; ſed huiusmodi exemplis non immoror, fuſius de iis infra agetur.

XI. Quum curuae genitricis IEK diameter EA ſit axis traiectoriae inde genitae, manifeſtum eſt, ſi illa curua plures vna diametros habuerit, traiectoriam inde ortam plures axes etiam habituram, ſi ergo loco curuae IEK curua infinitarum diametrorum adhibetur, traiectoria infinitos etiam axes habebit. Quando autem traiectoria deſideratur, quae axium datum habeat numerum, id aliter interpretandum eſt. Vt enim omnis curua vna plures diametros habens neceſſario infinitas habet, ita etiam traiectoria reciproca, quae vno plures, infinitos neceſſario axes habebit. Sed quia traiectoria infinitorum axium infinita habere debet puncta reverſionis, datus axium numerus ad vnam tantum curuae portionem intra duo puncta flexus proxima comprehenſam referendus

dus eſt. Deſideratur enim curua omni irregularitate, cuiusmodi eſt flexura et reflexio, deſtituta.

Fig. III. XII. Sit curua IEKek infinitis praedita diametris, EA, KL, ea, kl. et abſcindatur area DBTI $=$ quadranti ODH, linea TB producta aſymtotos erit curuae DNV, et tanget traiectoriam in C, vbi eſt punctum reflexionis. Portio ergo traiectoriae DMC, talis erit, de qua eſt quaeſtio numeri axium dati. Haec vero portio tot habebit axes, quot diametri fuerint in ſpatio DBTI. Quo circa in arbitrio noſtro poſitum erit numerum axium definire hoc modo: Propoſito numero axium abſcindatur ſpatium DBTI eundem diametrorum numerum comprehendens, tum deſcribatur circulus ODG tantus vt eius quadrans ODH adaequet abſciſſum ſpatium DBTI manifeſtum eſt, hoc modo generari curuam deſideratam.

XIII. Si loco curuae IEKek adhibeatur linea recta ipſi DB parallela, quaelibet applicata FP erit diameter, ergo et traiectoriae DMC quaeuis applicata erit axis. Atque haec eſt illa curua de qua Cel. Bernoullius ſub pantogoniae nomine, fuſius in Actis Erud. 1726 egit. Aequatio eius naturam exprimens, erit $1 = addy:(dx^2 + dy^2)$ ſeu $dx^2 + dy^2 = addy$ cuius haec eſt proprietas, vt, radiis ſecundum axium directionem incidentibus, radii reflexi omnes ſint inter ſe aequales. Facilius autem curua haec ſic conſtruetur, vt accipiatur $x = \int \frac{aadp}{aa+pp}$ et $y = \int \frac{apdp}{aa+pp}$.

XIV. Methodum hanc inueniendi traiectorias reciprocas per duplicem quadraturam, non eo fine attuli

vt

vt inde traiectoriae reciprocae eruantur, id quod vix praestari posset, si simplices vel algebraicae desiderentur, sed vt inde adipiscar solutionem problematis de inueniendis traiectoriis reciprocis pluribus vno axibus gaudentibus, quod Anonymus Anglus Cel. Ioh. Bernoullio proposuit. At nunc ad alium pergo modum perquam foecundum in exhibendis traiectoriis simplicioribus, et praecipue algebraicis. Persequar autem hic illum tantum problematis casum, quo angulus intersectionis ponitur rectus; cum facillime reliqui casus omnes ad hunc reducantur.

XV. Sit CBD traiectoria orthogonalis, cuius axis sit AB quem ad angulos rectos secet recta PQ; Ducantur duae applicatae PM, QN, axi AB parallelae, vtrinque aeque distantes ab eodem, illisque proximae, pm qn, nec non basi PQ parallelae MR, NS. Erunt triangula MRm, nSN, similia, ob SnN+RmM=recto. Sint AP$=x$ PM$=y$, erunt P$p=$MR$=dx$, R$m=dy$ nec non AQ$=-x$, Q$q=$NS$=-dx$; sit QN$=z$, seu S$n=dz$. Ex similitudine triangulorum MRm,nSN deducetur MR (dx) : R$m(dy)=$S$n(dz)$: SN$(-dx)$ vnde erit $dydz=-dx^2$. Ex qua aequatione inueniri debet y. Etenim z ab y dependet, quia in expressione ipsius y, posito loco x,$-x$, habetur z. Fig. IV.

XVI. Ponatur $dy=pdx$, est autem p functio ipsius x. Abeat ea, posito $-x$, loco x in q, erit $dz=-qdx$ et consequenter erit $pq=1$. Vnde patet, loco p talem sumi debere ipsius x functionem, ex qua factum in eandem, sed loco x posito $-x$ adaequet vnitatem. Totum ergo huius ſolutionis artificium huc redit, vt idoneae eligantur functiones ipſius, x loco p ſubſtituendae. Ad hoc autem, niſi fortunae earum inuentionem committere velimus, accuratior functionum requiritur cognitio. Cuius, vt quaſi prima elementa iaciam, ſequenti modo eas diſcernere commodum viſum eſt.

XVII. Primo loco notandae ſunt functiones, quas pares appello, quarum haec eſt proprietas, vt immutatae maneant, etſi loco x, ponatur $-x$. Huiusmodi ſunt omnes potentiae ipſius x, quarum exponentes ſunt numeri pares, aut fractiones, quarum numeratores ſunt numeri pares, denominatores vero impares: Dein quaecunque functiones ex huiusmodi potentiis vel additione vel ſubtractione, vel multiplicatione vel diuiſione, vel denique ad potentiam quamcunque elevatione componuntur, ſunt itidem pares ut $x^{\frac{4}{5}}, (ax^2+bx^{\frac{2}{3}})^n$

XVIII. Secundo functiones impares obſeruo, quae prorſus ſui negatiuas producunt, ſi x, abit in $-x$. Cuiusmodi ſunt x ipſum, x^3, x^5 etc. omnes potentiae, quarum exponentes ſunt numeri impares, vel fractiones, quarum numeratores et denominatores ſunt numeri impares, nec non functiones, quae harum potentiarum additione vel ſubtractione, etiam eleuatione ad exponentis imparis dignitatem componuntur, vt, $x^{\frac{3}{5}}, (ax^3+bx^{\frac{5}{7}})^3$

XIX. Si functio impar per imparem multiplicatur, factum ſemper erit functio par, ut x^3 in $x^{\frac{1}{3}}$, dat $x^{\frac{10}{3}}$ At functio par in imparem ducta ſemper quidem impa-

rem

rem producit, interdum tamen ea ſimul pro pari haberi poteſt, vt $x\sqrt{(aa+xx)}$ eſt functio ſimul par et impar, quippe eadem cum $\sqrt{(aaxx+x^4)}$, quae eſt par. Quod autem de elevatione functionis paris ad dignitatem quamuis ſupra dictum eſt, quod potentia ſit quoque par, ſi exponens ſit fractio, cuius denominator numerus par, v.g. $\frac{1}{2}$, reſtrictio adhibenda eſt, niſi radix re ipſa extrahi queat, vt $(\frac{aa}{xx}+2a+xx)^{\frac{1}{2}}$ non eſt functio par, conuenit enim cum $\frac{a}{x}+x$. De huiusmodi autem functionibus iudicium facile patet.

XX. Praeterea obſeruatu dignae ſunt functiones reciprocae, quae mihi ſunt functiones poſito in iis $-x$, loco x, abeuntes in tales, quae in illas ductae producunt vnitatem, vt $(\frac{a+x}{a-x})^n$, quae, poſito x negatiuo, abit in hanc $(\frac{a-x}{a+x})^n$, cuius in illam factum eſt $=1$. Huc referendae quoque ſunt exponentiales a^x, $(aa+xx)^{x^3}$ etc. omnes nempe functiones pares eleuatae ad functiones impares.

XXI. Hiſce de functionibus praemiſſis manifeſtum eſt, p eſſe functionem ipſius x reciprocam, cum ſit $pq=1$. Quemadmodum autem huiusmodi functiones reciprocae inueniendae ſint, breui oſtendere conabor; Sed primo de functionibus exponentialibus nihil intermiſcere conſtitui, cum ante omnia traiectorias reciprocas algebraicas eruere animus ſit. Poſtmodum autem de exponentialibus quaedam ſubiungam.

XXII. Vt autem rem generalius abſoluam, aſſumo tertiam variabilem t, et inueſtigabo, quomodo x et y in t, determinari debeant, vt traiectoria reciproca reſultet, pono itaque $dx = rdt$, et $dy = pdt$. Efficiendum ergo eſt, vt poſito t negatiuo, et dx in negatiuum abeat. Quare loco r ponatur oportet functio ipſius t par, quae ſit N; erit $dx = \mathrm{N}dt$, et abeunte t in negatiuum, erit $dx = -\mathrm{N}dt$. Conſequenter ob $d \cdot dz = -dx^2$, poſito in caſu $-t$, loco p, q, vt ante, habebitur $pq = \mathrm{NN}$.

XXIII. Ponatur $p = (\mathrm{P}+\mathrm{Q})^n$ denotante P functione pare et Q impare ipſius t, erit $q = (\mathrm{P}-\mathrm{Q})^n$ adeoque $(\mathrm{PP}-\mathrm{QQ})^n = \mathrm{N}^2$; ergo $\mathrm{PP} = \mathrm{N}^{\frac{2}{n}} + \mathrm{QQ}$, et $\mathrm{P} = \sqrt{(\mathrm{N}^{\frac{2}{n}} + \mathrm{QQ})}$ erit ergo $p = (\mathrm{Q} + \sqrt{(\mathrm{N}^{\frac{2}{n}} + \mathrm{QQ})})^n$. Nihil contradictorii hic latet in aequatione $\mathrm{P} = \sqrt{(\mathrm{N}^{\frac{2}{n}} + \mathrm{QQ})}$ etenim P, quae functio par eſſe debet, talis etiam in aequatione exhibetur. At ſi Q erueretur, inueniretur $\mathrm{Q} = \sqrt{(\mathrm{N}^{\frac{2}{n}} - \mathrm{PP})}$ id quod contradictionem inuoluit; nam Q, quae functionem imparem denotat, aequatur hic functioni pari. Vt fractiones in exponentibus euitem, ſcribo loco N, N^n et erit $dx = \mathrm{N}^n dt$, et $dy = dt\,(\mathrm{Q} + \sqrt{(\mathrm{N}^2 + \mathrm{Q}^2)})^n$ poteſt hic loco Q, ſcribi NQ, (§. 19) et dein loco N^n, vt ante, N; habebitur $dx = \mathrm{N}dt$, et $dy = \mathrm{N}dt(\mathrm{Q} + \sqrt{(1+\mathrm{QQ})})^n$.

XXIV. Vt nouae formulae reſultent, tollo irrationalitatem, ponendo $\sqrt{(\mathrm{N}^2 + \mathrm{Q}^2)} = \mathrm{N} + \mathrm{RQ}$, erit $\mathrm{Q} = \frac{2\mathrm{NR}}{1-\mathrm{RR}}$ vnde R functio impar ſit ipſius t neceſſe eſt, ob Q imparem, erit ergo $\mathrm{Q} + \sqrt{(\mathrm{N}^2 + \mathrm{Q}^2)} = \frac{\mathrm{N}.(1+\mathrm{R})}{1-\mathrm{R}} =$ (ſcripto loco R,

co R, $\frac{Q}{P}) \frac{N.(P+Q)}{P-Q}$. Denotabunt ſemper P pares et Q impares functiones ipſius t. Erit ergo $dx = N^n dt$, et $dy = dt \left(\frac{NP+NQ}{P-Q}\right)^n$; altera formula eodem modo tractata dat, $dx = N dt$, et $dy = N dt \left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)^n$. Huiusmodi formulae generales infinitae poſſunt inueniri, alias aequationes loco $p = (P+Q)^n$ aſſumendo: cuiusmodi eſt haec formula $dx = N dt$, et $dy = N dt\ (P+Q)^{mn}$.
$\overline{(S+\sqrt{SS+(PP-QQ)^{\frac{-m}{k}}})^{nk}}$ denotante S functione impare, ſed duabus formulis inuentis tanquam ſimpliciſſimis et foecundiſſimis in productione traiectoriarum algebraicarum contentus ero, quarum altera irrationalitate eſt affecta, altera vero rationalis.

XXV. Accipio formulam priorem, caſus quibus dy integrabile redditur, euoluturus. Sit primo $N = 1$ erit $dx = dt$ unde $dy = dx\ (Q + \sqrt{1+QQ})^n$. Pono porro $Q = x$ erit $dy = dx\ (x + \sqrt{1+xx})^n$ cuius integrale obſeruo generaliter haberi poſſe; ponatur $x + \sqrt{(1+xx)} = u$, erit $x = \frac{uu-1}{2u}$, conſequenter $dy = \frac{u^n du}{2} + \frac{u^{n-2} du}{2}$ et hinc $2y = \frac{u^{n+1}}{n+1} + \frac{u^{n-1}}{n-1} = \frac{(x+\sqrt{1+xx})^{n+1}}{n+1} + \frac{(x+\sqrt{1+xx})^{n-1}}{n-1}$ habetur ergo hic aequatio algebraica generalis infinitas curuas ſuppeditans, numeros rationales loco n ſubſtituendo.

XXVI. Antequam autem ad deriuationem aequationum determinatarum ex generali pergam; quaedam ex aequatione differentiali deducenda ſunt, quae ex integrata difficilius eruerentur. Primo palam eſt, ſi ſit $n=0$ traiectoriam tum eſſe lineam rectam, cum axe angulum ſemirectum conſtituentem, propter $dy=dx$. Dein, ſi fuerit $n=1$ erit $dy=xdx+dx\sqrt{(1+xx)}$; vnde patet, hanc aequationem eſſe ad traiectoriam reciprocam, quae methodo Bernoulliana ope rectificationis parabolae conſtruitur, quo vnico caſu non abſolute eſt integrabilis.

XXVII. Tertio, etſi loco n ponatur $-n$, aequationem nihilominus ad eandem fore curuam, abſciſſis ſaltem ex axis altera parte ſumtis, ſeu exiſtentibus negatiuis. Conueniunt enim duae hae expreſſiones $(-x+\sqrt{1+xx})^n$ et $(x+\sqrt{1+xx})^{-n}$, vt cuivis examinanti facile patebit. Nihil ergo in poſterum lucraturus eſſem, loco n valores negatiuos ſubſtituendo. Quare ſubſtitutione numerorum affirmatiuorum tantum vtar, cum ii ſoli ſufficiant ad vniuerſalem aequationem exhauriendam.

XXVIII. Excuſſi iam ſunt caſus, vbi $n=0$, et $n=1$ progredior vlterius, ſed integralem aequationem in vſum vocando, et pono $n=2$. Erit $3y=2x^3+3x+2+2xx\sqrt{1+xx}$, quae ad rationalitatem reducta huc redit $12yx^3+18xy-9yy+3xx+4=0$. Et haec aequatio quatuor dimenſionum, ſine dubio ſimpliciſſima eſt, poſt illam paraboloidem tertii ordinis: ſatisfacit adeo quaeſtioni, quam Cel. Bernoullius Anonymo Anglo propoſuit, et ego repetii in Act. Erud. 1726. de inuenienda traiectoria algebraica, eam tertii ordinis, in ſimplicitatis ordine proxime excipiente.

XXIX. Si ponatur $n=3$ prodibit aequatio pro linea

linea 5 ordinis haec $128yx^4+192yx^2+48y-64yy-8xx-9=0$. Sit $n=4$ resultabit aequatio 6 ordinis, et hinc legitima inductione inferri potest, aequationem generalem ad rationalitatem reductam esse semper ordinis $n+2$. Id quod etiam in valoribus fractis loco n subrogatis obtinet. Si sit $n=\frac{1}{2}$ aequatio erit ordinis $\frac{5}{2}$. Quae autem, cum adhuc sit irrationalis, reducta erit ordinis quinti, et generaliter si fuerit $n=\frac{p}{q}$ aequatio reducta ascendet ad $p+2q$ ordinem.

XXX. Patet ergo aequationem generalem loco n alios atque alios valores substituendo, ex quolibet curuarum ordine, si excipias secundum et tertium, vnam ad minimum traiectoriam reciprocam exhibere. Et dato ordine curuarum, quot ex eo ope huius aequationis inueniri possint traiectoriae, facile determinare erit, nempe dispiciendum est, quoties $p+2q$ numerum dati ordinis producere queat, sed loco p et q numeri saltem affirmatiui et integri substitui possunt, et eiusmodi insuper vt $p:q$ ad minores terminos reduci nequeat. Sed de hac formula generali fusius in Act. Lips. 1727. actum est a me, ideoque hic ad alia me conuerto.

XXXI. Adhaereo adhuc aequationi §. XXV. ad hanc reductae $dy=dx\,(Q+\sqrt{(QQ+1)})^n$. Circa quam obseruaui, nullis eam substitutionibus potentiarum rationalium, quales sunt x^3, x^5 etc. nec non x^{-1}, x^{-3} etc. loco Q factis, generaliter integrabilem reddi, quanquam vtique passim reperiantur casus particulares integrabiles, quos autem persequi institutum minime permittit. At substituendo loco Q potentias ipsius x irrationales, sed legitigitimas nempe functiones impares, quales ſunt $x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{1}{5}}, x^{\frac{1}{7}}$ et vbi numerator exponentis eſt vnitas, ſemper formulam integrabilem reddi obſeruaui.

XXXII. Sit itaque $Q = x^{\frac{1}{3}}$, erit $dy = dx\,(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x^{2:3} + 1})^n$. Quae vt integretur, pono $x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + 1} = t$, erit $x^{\frac{1}{3}} = \frac{tt - 1}{2t}$ unde $x = \frac{t^3}{8} - \frac{3t}{8} + \frac{3}{8t} - \frac{1}{8ttt}$ adeoque $dx = \frac{3ttdt}{8} - \frac{3dt}{8} - \frac{3dt}{8tt} + \frac{3dt}{8t^4}$: ergo $dy = \frac{3t^{n+2}dt}{8} - \frac{3t^n dt}{8} - \frac{3t^{n-2}}{8} + \frac{3t^{n-4}dt}{8}$. Conſequenter $\frac{8y}{3} = \frac{t^{n+3}}{n+3} - \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n-1}}{n-1} + \frac{t^{n-3}}{n-3} = \frac{(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + 1})^{n+3}}{n+3} - \frac{(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + 1})^{n+1}}{n+1} - \frac{(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + 1})^{n-1}}{n-1} + \frac{(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + 1})^{n-3}}{n-3}$.

XXXIII. Sunt autem quidam caſus, quibus integratio a logarithmis dependet, nempe ſi fuerit $n = 1$ vel 3. Ceterae ſubſtitutiones omnes loco n factae ſuppeditant curuas algebraicas, idque vt ſuperior ſecundum certam legem. Quod de ſuperiori formula enunciatum eſt, valores ipſius n, negatiuos ſuperfluos eſſe; idem etiam de hac, nec non de generaliſſima tenendum eſt. Quemadmodum et ſemper obtinet, ſi fiat, $n = 0$, tum traiectoriam degenerare in lineam rectam.

XXXIV. Caſus huius aequationis ſimpliciſſimus ſine dubio erit, quo $n = 2$. In eoque poſito breuitatis ergo

ergo loco $x^{\frac{1}{3}}t$, reperietur $5y = 6t^5 + 5t^3 + (6t^4 + 2tt - 4)\sqrt{(1+tt)}$. Consequenter ad rationalitatem reducendo peruenietur ad hanc aequationem, $60t^5y + 50t^3y - 25y^2 - 60t^4 - 45t^6 + 16 = 0$.

Atque haec tandem, substituto $x^{\frac{1}{3}}$ loco t, abibit in aequationem 8. ordinis. Si ponatur $n = 4$ aequationem ad 10 dimensiones assurrecturam, facile praeuidere potui. Et aequationem generalem ad ordinem linearum $n + 6$ esse referendam. Vt adeo et haec formula, ex quolibet curuarum ordine ad minimum vnam, si excipiantur 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 9, traiectoriam exhibeat.

XXXV. Haec eadem formula, vt et reliquae, quae ex substitutionibus §. XXXI determinatis deducuntur, alia via ex altera aequationis generalis forma deriuantur. Et quam ideo paucis hic complectar, quod insuper ex ea plures formulae algebraicae generales, aliunde altioris indaginis, fluant. Aequatio generalis haec est, $dx = N dt$, $dy = N dt\,(Q + \sqrt{(QQ+1)})^n$. In qua si fiat $Q = x$, et successiue $N =$ vel 1 vel xx, vel x^4 etc. nec non vel $a + bxx$, $axx + bx^4$ et eiusmodi compositae functiones pares ipsius x subrogentur, aequatio generalis semper erit integrabilis et algebraicarum aequationum summopere foecunda.

XXXVI. Exposito modo, quo ad aequationes algebraicas generales peruenitur, examinandi sunt alii casus, quibus quidem aequatio generalis non integrabilis redditur, nihilo tamen minus infinitis modis facilibus determinatu, algebraicas exhibere poteſt aequationes. Asſumo hanc formulam $dx = N^n dt$ et $dy = dt (Q + \sqrt{(QQ + NN)})^n$, fiat $N = tt$ et $Q = t$ erit $dx = t^{2n} dt$ et $x = \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ et $dy = dt (t + t\sqrt{(1+tt)})^n$. Vnde patet hanc aequationem ſemper eſſe integrabilem ſi fuerit n numerus integer impar; id quod facile videre eſt, ſi reipſa ad dignitatem eleuetur.

XXXVII. Sunt autem inſuper alii caſus, quibus formula noſtra integrabilis redditur, quos ſic inuenio ponatur $t + t\sqrt{(tt+1)} = utt$, erit $t = \frac{2u}{uu-1}$, ideoque, $dt = -\frac{2uudu - 2du}{(uu-1)^2}$; conſequenter $dy = -\frac{2^{n+1} u^{3n} du (uu+1)}{(uu-1)^{2n+2}}$ vnde patet ſi fuerit n numerus negatiuus par, fore aequationem integrabilem, id quod patebit, ſi $(uu-1)^{-2n-2}$ ipſo facto eleuetur. Plures caſus elicientur, ſi fiat $t + \sqrt{(tt+1)} = ut$; et obtinebitur $dy = du (u^{\frac{3n+1}{2}} - u^{\frac{3n-1}{2}}) (u-2)^{\frac{n-1}{2}}$; quae erit integrabilis, primo ſi ſit n quilibet numerus impar: dein ſi $\frac{3m+1}{2}$ fuerit numerus integer. Fiat ergo $\frac{3n+1}{2} = m$; erit $n = \frac{2n-1}{3}$ adeoque loco n poni poteſt fractio cuius denominator $= 3$ et numerator numerus impar.

XXXVIII. Vnicum exemplum attuliſſe ſufficiat, ſit $n = 1$. erit $dx = ttdt$, et $t = \sqrt[3]{3x}$; deinde $dy = tdt + tdt\sqrt{(1+tt)}$: ergo $y = \frac{tt}{2} + \frac{(1+tt)\sqrt{(1+tt)}}{3}$ vnde elicitur haec

haec aequatio ordinis sexti $(12yy-12xx)^3)=3456y^5+12528x^2y^3-432yx^4-2304y^4-288x^2y^2+81x^4+512y^3$. Possunt itaque infinitae aequationes algebraicae etiam ex hac aequatione $dy=dt(t+t\sqrt{(1+tt)})^n$ erui, et simili modo ex aliis formis, loco N vel Q; alios valores substituendo, casus, quibus hoc contingit, non superiori absimili modo detegentur.

XXXIX. Quae de priori duarum generalium formularum, irrationali hucusque tradita sunt, vsum eius et foecunditatem satis superque commonstrant. Progredior nunc ad alteram formulam rationalem quae est, $dx=N^n dt$ et $dy=dt\left(\frac{N.(P+Q)}{P-Q}\right)^n$ seu quod eodem redit, $dy=dt\left(\frac{N.(1+Q)}{1-Q}\right)^n$. Non immoror hic deriuandis hinc curuis transcendentalibus nempe logarithmicae semirectangulae, si $Q=t$, $N=1$. et $n=1$. aut cycloidi, si $n=\frac{1}{2}$. quippe quae ab aliis iam fusius pertractatae sunt, propositum mihi est, vt in priori, quas ea sub se comprehendit curuas algebraicas, persequi, et regulas, quibus algebraicae inueniri queant, eruere.

XL. Ne autem fractio in causa sit, cur difficilius casus algebraici dignoscantur, eam tollo loco N. ponendo $N(1-QQ)$ Debet enim N esse functio par, ipsius t Habebitur $dx=dt(N-NQQ)^n$ et $dy=dt(N(1+Q)^2)^n$ seu $dx=N^n dt(1-QQ)^n$ et $dy=N^n dt(1+Q)^{2n}$. Vt hinc aequatio algebraica deriuari queat, oportet vt et dx et dy integrabile fiat. Ponatur $N=1$; erit $dx=dt(1-QQ)^n$ et $dy=dt(1+Q)^{2n}$; sit $Q=t$ erit $dx=dt(1-tt)^n$ et $dy=dt(1+t)^{2n}$ vnde $y=\frac{(1+t)^{2n+1}}{2n+1}$; ergo $\sqrt[2n+1]{(2n+1)y}-1$

$-1=t$. Vt igitur dx integrari queat, patet loco n substitui debere numerum integrum affirmatium.

XLI. Cum n sit numerus integer affirmatiuus, constituet $(1-tt)^n$, si in seriem conuertatur, progressionem numeri terminorum finiti, hanc $1-\frac{n}{1}tt+\frac{n.n-1}{1.2}t^4-\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}t^6$ etc. Vnde obtinebitur $x=t-\frac{n.t^3}{1.3}+\frac{n.n-1\,t^5}{1.2.5}-\frac{n.n-1\,n-2.t^7}{1.2.3.7}$ etc. in qua si loco t substituatur valor inuentus $\sqrt[2n+1]{(2n+1)y}-1$ habebitur aequatio inter y et x adeoque pro curua quaesita.

XLII. Sit $n=1$ erit $x=t-\frac{1}{3}t^3=\sqrt[3]{3y}-1-\frac{1}{3}(\sqrt[3]{y}-1)^3=\sqrt[3]{9yy}-y-\frac{2}{3}$; ergo $(x+y+\frac{2}{3})^3=9yy$. Quae aequatio euadit tertii ordinis, et exprimit parabolam cubicalem semirectangulam, quae pro simplicissima omnium traiectoriarum reciprocarum algebraicarum habetur. De qua Cel. Ioh Bernoullius in Act. Erud. 1725. peculiari schediasmate egit. Sunt autem reliquae substitutiones loco n factae minus felices in exhibendis curuis simplicibus, posito enim $n=2$, aequatio iam vltra trigesimum gradum assurgit.

XLIII. Possunt loco Q aliae functiones ipsius t substitui, vt t^3, t^5 aut $t^{\frac{1}{3}}$ etc. quae omnes formulam infinitis modis integrabilem reddent, semper nimirum quando n fuerit numerus affirmatiuus integer. Simili modo res se habet si alii loco N valores subrogentur. Sit nimirum $N=tt$ erit $dx=t^{2n}dt(1-QQ)^n$ et $dy=t^{2n}dt$ $(1+Q)^{2n}$. Ponatur $Q=t$. erit $t^{2n}dt(1-tt)^n$ et $dy=t^{2n}dt$

(1+

$(1+t)^{2n}$. Vnde patet et x et y haberi poſſe modo ſit $2n$ numerus integer. Si enim fuerit numerus par, facile patet omnia eſſe in ſimplices terminos reſolubilia, ſi $2n$ fuerit numerus impar erit $(1-tt)^n$ irrationale, ſed licet $2n$ ſit numerus impar, nihilominus $t^{2n}dt\ (1-tt)^n$ erit integrabile.

XLIV. Sit $2n=1$ erit $dx=tdt\sqrt{(1-tt)}$ et $dy=tdt+ttdt$. Quare $x=-\frac{1}{3}(1-tt)^{\frac{3}{2}}$ et $y=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3$. Erit igitur $t=\sqrt{(1-\sqrt[3]{9xx})}$ ponatur $y+\frac{1}{8}=x$ habebitur reductione per acta, haec aequatio ſexti gradus $(12uu+24xx)^3=6912u^5-7344u^3xx-11232ux^4-9216u^4+7488uuxx+10125x^4+4096u^3$. Alii loco n, numeri ſubſtituti alias exhibebunt curuas algebraicas, deinde innumerabiles aliae loco Q et loco N ſubſtitutiones fieri poſſunt, quae ſemper, ſi n eſt numerus affirmatiuus integer, algebraicas efficient aequationes. Et haec praecipua ſunt, quae de Algebraicis curuis afferri poſſunt.

XLV. Hiſce coronidis loco ſubiungo alias formulas generales, quae reſultant, ſi loco (vid. §. XXII.) p et q functiones exponentiales ſubrogantur. Habentur autem in exponentialibus et functiones pares et reciprocae, vt P^R eſt functio par, ſi ſint et P et R functiones pares, at ſi fuerit R functio impar; erit ea functio reciproca, priori in caſu abeunte x in $-x$ manet P^R, in poſteriori mutatur in P^{-R}.

XLVI. Quibus ergo in locis, antea functiones pares ſubſtituere opus fuerat, poterunt huiusmodi exponen-

ponentiales adhiberi, et loco functionum imparium ſi-
miles exponentiales ductae in functionem imparem quan-
dam vt $P^R Q$, exiſtentibus P et R paribus functionibus et
Q impari.

XLVII. Cum functiones reciprocae ita ſint com-
paratae, vt factum earum in ſe ipſas, ſed loco x poſito
$-x$, aequetur vnitati, patet, quicquid ſit p, ſemper ei inſu-
per eiusmodi functionem reciprocam multiplicatione
adiungi poſſe, nempe vbi fuerat $dy = pdt$ poteſt etiam
ſumi $dy = T^V pdt$. denotante T functione pari et V impa-
ri. Nihilominus enim factum ex dy in ſe, ſed abeunte
t in $-t$, idem erit ac ante.

XLVIII. Formulis ergo generalibus §§. XXIII.
XXIV. inuentis adiungi poterit functio reciproca, im-
mutato earum vſu. Et habebitur $dx = Ndt$ et $dy =$
$T^V Ndt(Q + \sqrt{(1+QQ)})^n$ deinde loco formulae ratio-
nalis habebitur $dx = Ndt$ et $dy = T^V Ndt(\frac{P+Q}{P+Q})^n$. Atque
his formulis in ampliſſimos curuarum exponentialium,
quae problemati traiectoriarum reciprocarum ſatisfa-
ciunt, campos deducimur.

XLIX. Exemplum nobis ſit, hypotheſis, qua,
$n = o$, $N = 1$, $T = a$, et $V = t = x$; erit $dy = a^t dt = a^x dx$ quae
eſt aequatio ad logarithmicam ordinariam, quae ſatisfa-
ciet applicatam ſubtangenti aequalem pro axe conuerſio-
nis aſſumendo. Pluribus exemplis, quippe curuas igno-
tas exhibentibus, haec perſequi minime conſultum duco.

L. Hiſce tandem, quae hactenus attuli, quaeſtio-
ni exaſſe me ſatisfeciſſe non dubito, quaecunque enim
ad

ad enodationem huiusmodi quaestionum iure requiri possunt, abunde hic exhibuisse mihi videor. Dedi enim primo generalissimas aequationes applicatu faciles: secundo methodum dedi infinitas aequationes vniuersales algebraicas inueniendi, ex quibus simplicissimas reipsa deduxi.

Tandem, quae ex transcendentalibus curuis cognitae sunt, etiam ex aequationibus generalibus facile deriuantur. Hisce omnibus praemisi solutionem duorum problematum agnatorum, de Pantogonia infinitorum axium traiectoria et de traiectoriis datum axium numerum habentibus, quippe quae ex consideratione naturae traiectoriarum reciprocarum sponte fluunt.

Theoria Noua DE MOTV AQVARVM PER CANALES QVOSCVNQVE FLVENTIVM

Auctore

Daniele Bernoulli, Ioh. Fil.

Motum aquarum per tubos determinare aggressi sunt multi Geometrae iique celeberrimi; sed pauci aliquid dederunt, quod experientiae esset conforme, nemo autem integram theoriam stabiliuit. Aquam in tubo stagnantem *M. Iun. 1727.*

per

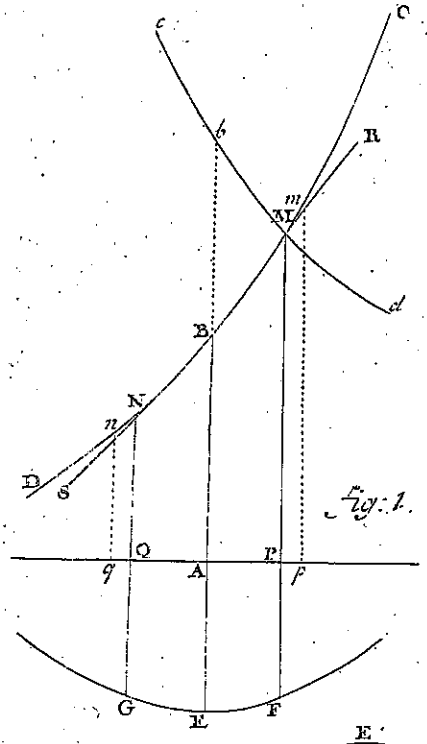

fig: 1.

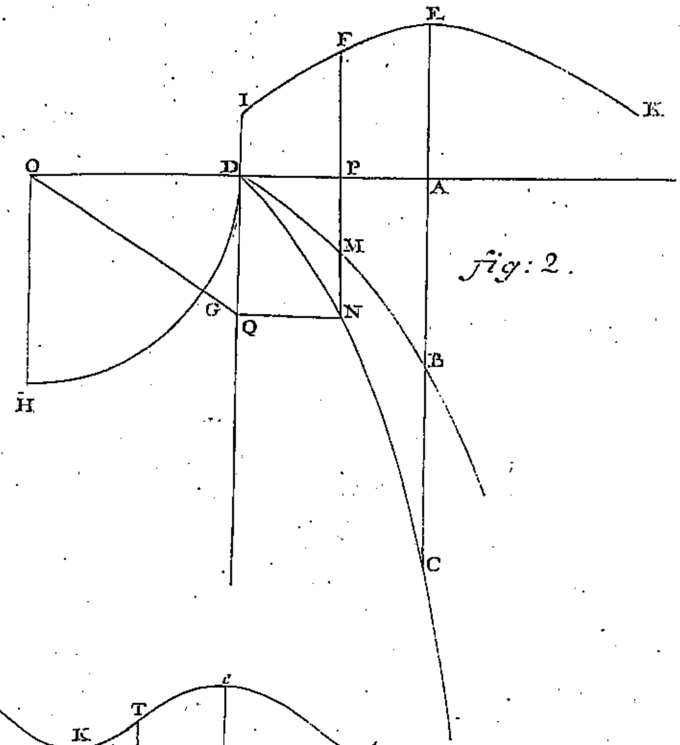

fig: 2.

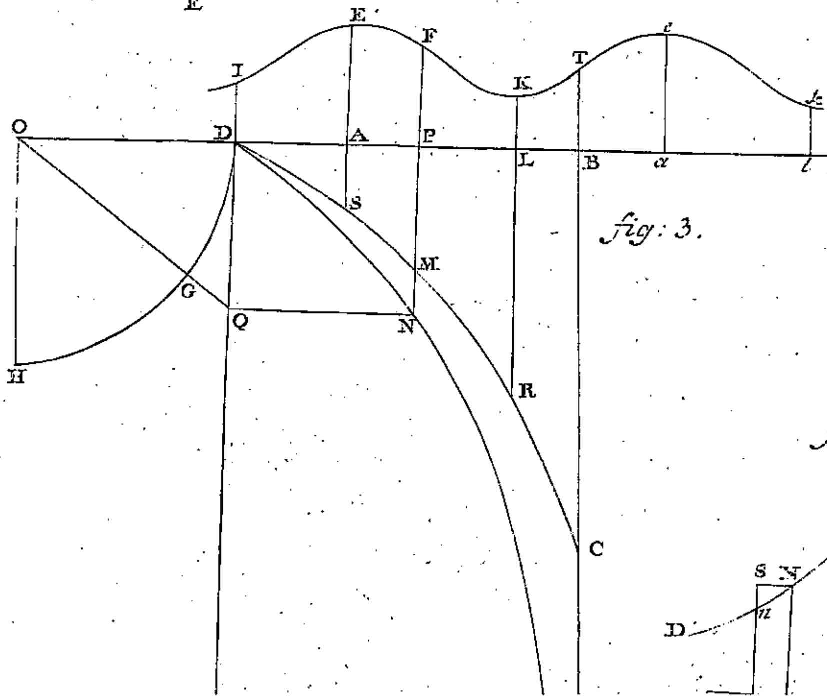

fig: 3.

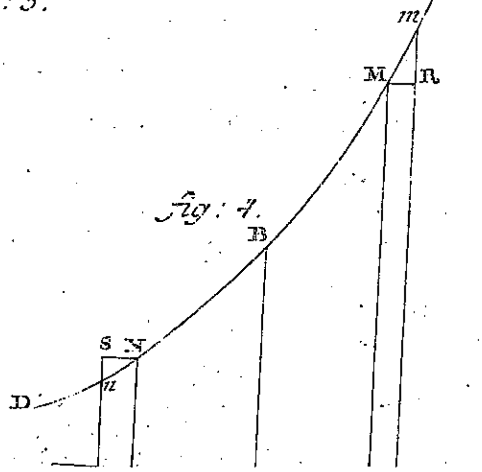

fig: 4.