



1727

Methodus inveniendi traectorias reciprocas algebraicas

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Methodus inveniendi traectorias reciprocas algebraicas" (1727). *Euler Archive - All Works*. 3.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/3>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

existimat potius, multos deceptos fuisse a flamma quadam ex sepulchris clausis & post longum demum annorum cursum apertis eructante, quam pro ardente lucernæ flamma habuerunt, præsertim quando simul lampada invenerunt, quam veteres Romani ex superstitiosa religione in honorem animæ immortalis sepulchris suorum indiderunt. Usus in Medicina Amiantho nullum adscribit, qui ei ab autoribus tribuitur, de alumine plumoso potius interpretandum ratus, operam etiam illos atque oleum perdere, qui oleum incombustibile ex eo destillare allaborant, perhibet.

LEONHARDI EULERI, A. L. M. METHODUS
inventendi Trajectorias reciprocas Algebraicas.

QUUM temporis spatium, quod Anonymo illi Anglo ad aperiendam, quam invenire potuerit, trajectoriam algebraicam illam tertii ordinis sequentem, concesseram, elapsum sit, meam hujus quæstionis solutionem, una cum aliis insuper ad algebraicas trajectorias reciprocas pertinentibus inventis cum publico communicare constitui. Cum primum istud problema examinare atque de solutione ejus meditari animum sibiit, præcipue eam, quam commendavit Celeb. D. Joh. Bernoullius, Præceptor meus hisce in rebus atque Patronus summe colendus, selegi viam per rectificationes curvarum; & strenuam, quantam potui, navavi operam in indagazione ejusmodi curvarum algebraicarum, quæ rectificari possent, ut exinde æquationes algebraicas pro trajectoriis reciprocis eruerem. Hoc in negotio oc-

cupatus, in istam incidi æquationem, $yy + \frac{2}{3}a = a\sqrt{axx}$, quæ est ad curvam, diametro & vertice in diametrum normali gaudentem, ac insuper rectificabilem. Ut itaque ex ista æquatio algebraica pro trajectoria reciproca inveniri possit, fit (Fig. 4) MBM ista curva, ABP diameter & A initium abscissarum, ut scilicet AB sit, $a\sqrt{\frac{B}{2}}$, atque est $AP = x$. $PM = y$. Sit curva $BM = S$. & ex M ducatur diametro parallela MQ , occurrens lineæ AQ normali in diametrum in Q , assumaturque in ea $MN = BM$ erit N in trajectoria quæsitâ. Sit $AQ = t = y$, & $QN = z = x - s$.
Est

TAB. V.
Fig. 4.

Est autem per æquationem $x = \frac{(yy + \frac{2}{3}aa)^{\frac{3}{2}}}{aa}$ ideoque $dx = \frac{3y dy \sqrt{yy + \frac{2}{3}aa}}{aa}$, ergo $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{9y^2 dy^2 + 6aa}{aa^2}$
 $\frac{yy dy^2 + a^2 dy^2}{aa}$, ergo $ds = \frac{3yy dy + aa dy}{aa}$, consequenter

$s = \frac{y^3}{aa} + y$ posito loco y, t , inuenietur substituendo in ista æquatione $z = x - s$, pro x & s valores inventos, habebitur $z = \frac{(tt + \frac{2}{3}aa)^{\frac{3}{2}}}{aa} - t - \frac{t^3}{aa}$. Ergo $aa z + aat + t^3 = (tt + \frac{2}{3}aa)^{\frac{3}{2}}$

& reducendo ad rationalitatem reperietur ista æquatio pro trajectoria reciproca, $a^2 z z + 2a^2 t z + 2aat^2 z = \frac{1}{3} a^2 t t + \frac{8}{27} a^6$; quæ dividendo per aa reducitur ad hanc $aaz z + 2aat z + 2t^3 z = \frac{1}{3} aat t + \frac{8}{27} a^4$, seu ponendo $aa = \frac{2}{3} bb$, ad hanc, $12t^3 z + 18bb t z + 9bb z z - 3b b t t - 4b^4 = 0$. Quæ est æquatio ad quarti ordinis curuam. Ad istam ergo æquationem peruentum est ope rectificationis curuæ, quæ solutio proinde soli fortunæ esset adscribenda, nisi comperta mihi fuisset peculiaris methodus inueniendi curuas algebraicas rectificabiles, unde & æquatio illa, quam ad constructionem istius trajectoriæ reciprocæ selegeram, promanauit.

Postmodum vero problema istud inueniendarum trajectoriarum algebraicarum reciprocarum, ex immediata earum natura disentiens, in istam incidi æquationem, (Fig. 5) appellando AQ, x ; QN, y . $dy = dx(x + \sqrt{xx + 1})$ denotante, n , numero quocunque. Quæ æquatio, ut facile patet, est ad trajectoriam reciprocam, ponendo enim in expressione ipsius dy , pro x , $-x$. inuenietur $dy = -dx(-x + \sqrt{xx + 1})^n$, quæ duæ æquationes respectiue inuicem ductæ dant $dy^2 = -dx^2$, id quod est de essentia trajectoriarum reciprocarum. Est autem ista æquatio $dy = dx(x + \sqrt{xx + 1})^n$ generaliter integrabilis, exceptis duobus casibus, ubi n est vel 1 vel -1 , quibus in casibus integratio dependet a logarithmis. Antequam vero integretur ista æqua-

TAB. V.
Fig. 5.

tio, monendum est, five, n , sit affirmativum five negativum, æquationem ad eandem esse curvam, una quippe obtinet, cum abscissæ AQ cis axem conversionis AB sumuntur, altera cum illæ trans AB accipiuntur. Conveniens scilicet deprehendetur hæc æquatio, $dy = dx(x + \sqrt{xx+1})^{-n}$ cum ista $dy = dx(-x + \sqrt{xx+1})^n$. Ideo vero istud præmoneo, ne quis substituendo pro, n , valores negativos, se problematis solutionem ulterius promovisse existimet. Integretur jam æquatio ista $dy = dx(x + \sqrt{xx+1})^{-n}$ id quod facile fieri poterit ponendo $x + \sqrt{xx+1}$

$$= t \text{ ut habeatur } x = \frac{t^2-1}{2t} \text{ \& } dx = \frac{dt}{2} + \frac{dt}{2t} \text{ ut adeo esset } 2dy$$

$$= t^n dt + t^{n-2} dt. \text{ Quocirca erit } 2y = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + \frac{1}{n-1}$$

$$t^{n-1} = \frac{1}{n+1} (x + \sqrt{xx+1})^{n+1} + \frac{1}{n-1} (x + \sqrt{xx+1})^{n-1}$$

Quæ æquatio generalis pro trajectoriis reciprocis ad casus speciales applicata suppeditat ex quolibet curvarum ordine, exceptis secundo & tertio, ad minimum unam trajectoriam reciprocam. Si enim pro n ponatur, Q , reperietur hæc quarti ordinis æquatio, conveniens cum jam inventa $12yx^3 + 18xy - 9yy + 3xx + 4 = 0$. Si substituatur loco n , 3 , reperietur ista quinti ordinis trajectoria reciproca, $128yx^4 + 192yxx + 48y - 64yy - 8xx - 9 = 0$. Sit $n = 4$, reperietur ista sexti ordinis $720yx^5 + 1200yx^3 + 450yx - 225yy + 15xx + 16 = 0$. Si $n = 5$, reperietur æquatio septimi ordinis, & in genere quicumque numerus loco n substituatur, curva inde generata erit ordinis $n+2$, si n sit numerus integer, sin vero sit fractus, $n+2$, reducitur ad fractionem in minimis terminis, & indicabit numerator fractionis ordinem curvæ inde natæ. Ex. gr. sit $n = \frac{1}{2}$ invenietur ista ordinis 5 , cum sit $\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$. $72yyx^3 - 81y^2 + 144x^2 - 216yyx - 96xx + 16 = 0$. Hinc itaque colligi potest, quot, beneficio istius æquationis generalis, ex quovis ordine trajectoriæ reciprocæ inveniri queant. Scilicet ex 4 unam, ex 3 duas, ex sexto unam, ex 7 tres, ex 8 duas, &c. Superest mihi præterea alia

alia methodus inveniendi trajectorias reciprocas algebraicas, ex qua quidem difficilior æquationes pro illis eruuntur, verum hoc ea se commendare potest, quod sit universalis, & omnes, quotquot existunt, curvas satisfaciētes algebraicas suppeditare queat. Est illa quidem affinis methodo per rectificationes, a Celeb. D. Joh. Bernoullio detectæ, & non difficulter exinde elicitur. Dependet scilicet ea ab inventionē curvarum diametro & cuspidē in vertice gaudētib; quas curvas possibiles omnes cujusvis ordinis cum invenire in promptu sit, omnes trajectoriae reciprocae algebraicæ possibiles inde eliciuntur. Cum enim omnes trajectoriae algebraicæ inveniri queant, ex curvis rectificabilibus diametro & vertice in diametrum perpendiculari præditis, ejusmodi vero curvæ omnes sint evolutæ totidem curvarum algebraicarum cuspidatarum & diametro instructarum, hinc quoque trajectoriae reciprocae reperientur, hoc nempe modo. (Fig. 6) Sit CAM curva ejusmodi cuspidata, AB ejus diameter, ducatur AQ eidem normalis, & sumtæ pro lubitu abscissæ AP ducatur respondens applicata PM, ducatur radius MS circuli osculantis curvam in M, erit punctum S in evoluta AS, eritque MS = curvæ AS. Si itaque radius MS circa centrum S moveatur in SN ita ut fiat diametro AB parallelus, erit punctum N in trajectoria reciproca, cujus axis conversionis erit linea AB. Sequenti vero modo æquatio pro ea reperietur, data æquatione ad curvam AM. Dicantur AP, x. PM, y. AQ, t, & QN, z. Sit brevitatis gratia

TAB. V.
Fig. 6.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \text{ invenietur instituto calculo, posito elemento } dy. \text{ constante, quod sit } AQ, t = x + \frac{ds^2}{dx} \text{ \& } QN, z = y +$$

$$\frac{ds^2 \cdot ds - dx}{dy dx} \text{ unde data relatione } y \text{ ad } x, \text{ reperiri poterit æqua-}$$

tio inter t & z, seu coordinatas trajectoriae reciprocae.

Sunt autem æquationes ad curvas ejusmodi cuspidatas ex quovis ordine sequentes. I. Ex ordine tertio, $a + by. xx = y^3 + cy^2$. II. Ex ordine quarto, $ax^2 + b + cy + eyy. xx = y^4 + fy^3 + gy^2$. Sunt scilicet in æquationibus generalissimis ad cujusvis ordinis curvas omittendi sequentes termini. Primo illi termini

in quibus continentur potentia ipsius x imparium exponentium. Secundo terminus in quo meræ constantes, & tertio terminus in quo y unius tantum est dimensionis. Cum autem ex istis æquationibus difficulter ad æquationes pro trajectoriis reciprocis perveniat, etiam si eæ admodum faciles atque simplices reperiantur, operæ pretium esset, si quis ad ulteriorem rei analyticæ promotionem, perpendat, quomodo minori negotio æquationes pro trajectoriis reciprocis, determinatis t & z in x & y , dataque insuper relatione inter x & z , erui possent, quomodo exterminata alterutra x vel y , altera quoque exterminanda sit, atque æquatio, quam nonnisi t & z una cum constantibus ingrediantur, inde elici possit.

JO. HENR. A SEELEN, SS. THEOL. LIC. ET
Gymn. Lub. Rect. Selecta Litteraria, quibus varia Sacra, Civilia, Philologica, Philosophica ac alia continentur, libri MSS. rarissimique accurate recensentur, & præ reliquis notabilia ex iisdem suppeditantur. Editio secunda, novorum Speciminum Pentade multisque accessionibus aliis aucta.

Lübeca, sumpt. Petr. Bœckmann, 1726, 8.

Alph. 2 pl. 8.

CL. Autor, apud ad instar, quotidiana diligentia ex rarioribus monumentis, quasi ex optimis floribus, loculos suos complere annisiis, in communes quoque usus, quæ prodesse judicat, liberalissime effert. Selecta hæc maximam partem sunt Programmata in Gymnasio Lub. solennioribus actibus edita, totusque horum numerus XXV observationibus continetur. Alteri huic editioni se multum inferuisse, in nova Præfatione fatetur, quam altera, quam priori editioni præmiserat, excipit, de moderato rei literariæ studio. Primum locum in Selectis his concessit pleniori notitiæ Bibliothecæ Hispanicæ Nicolai Antonii, Equitis S. Jacobi Regiique Consilarii, cujus vitam & scripta recenset, & eundem 1617 natum & 1684, contracto multo ære alieno, denatum esse, commemorat. Inter scripta ejus eminet, quam Seelenius hic recenset, Bibliotheca illa, quam in veterem & novam distinxit,
 qua-